

**Ю. О. Карпов Ю. Г. Ведміцький**  
**В. В. Кухарчук В. В. Усов В. І. Родінков**

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ  
ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

**ЗАДАЧІ ТА ПРИКЛАДИ**  
*РОЗРАХУНКУ*  
**ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ**

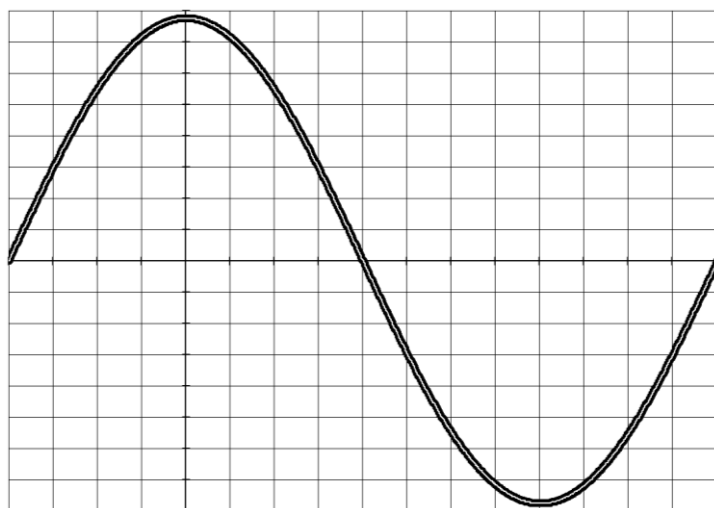


**Карпов Ю. О.  
Ведміцький Ю. Г.  
Кухарчук В. В.  
Усов В. В.  
Родінков В. І.**

# **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**



## **ЗАДАЧІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ**



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

Ю. О. Карпов Ю. Г. Ведміцький В. В. Кухарчук  
В. В. Усов В. І. Родінков

# ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ



## ЗАДАЧІ ТА ПРИКЛАДИ *РОЗРАХУНКУ* ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Вінниця  
ВНТУ  
2016

**УДК 621.3.01(075)**

**ББК 31.21.я73**

**Т33**

Автори:

**Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В.,  
Усов В. В., Родінков В. І.**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів.

Лист № 1/11-20788 від 31.12.2013 р.

Рецензенти:

**В. І. Сенько**, д.т.н., професор (НТУУ «КПІ»)

**Л. В. Сібрук**, д.т.н., професор (НАУ)

**Д. Й. Родькін**, д.т.н., професор (КНУ ім. Остроградського)

**Т33** **Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. та інші**  
**Теоретичні** основи електротехніки. Задачі та приклади розрахунку лінійних електричних кіл : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук та ін. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 345 с.

ISBN 978-966-289-105-8

В навчальному виданні наведено та докладно описано розв'язування багатьох задач та прикладів розрахунку лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами, які зустрічаються в електротехніці, електроенергетиці, електромеханіці, радіотехніці, засобах автоматики та вимірювальної техніки. Матеріал викладено в обсязі, необхідному для проведення теоретичних та технічних розрахунків із застосуванням сучасного програмного забезпечення. Посібник розрахований на студентів, аспірантів та викладачів електротехнічних, електроенергетичних та електромеханічних спеціальностей, а також може бути корисним спеціалістам, які займаються теорією лінійних електричних кіл.

**УДК 621.3.01(075)**

**ББК 31.21я73**

**ISBN 978-966-289-105-8**

© Ю. Карпов, Ю. Ведміцький, В. Кухарчук, В. Усов, В. Родінков, 2016

## Зміст

Передмова .....	4
Розділ 1. Компонентні співвідношення. Закони Кірхгофа .....	7
Розділ 2. Лінійні кола однофазного синусоїдного струму .....	27
Розділ 3. Еквівалентні перетворення в електричних колах .....	49
Розділ 4. Методи розрахунку електричних кіл .....	68
Розділ 5. Резонансні явища .....	87
Розділ 6. Кола з індуктивно-зв'язаними вітками .....	103
Розділ 7. Трифазні електричні кола .....	123
Розділ 8. Чотириполюсники. Прості електричні фільтри .....	148
Розділ 9. Електричні кола за несинусоїдних напруг і струмів .....	167
Розділ 10. Кола з розподіленими параметрами в усталеному режимі .....	189
Розділ 11. Елементи синтезу лінійних двополюсників .....	208
Розділ 12. Класичний метод розрахунку перехідних процесів в лінійних колах .....	230
Розділ 13. Операторний метод розрахунку перехідних процесів в лінійних колах .....	269
Розділ 14. Використання перехідних та імпульсних характеристик для розрахунку перехідних процесів .....	294
Розділ 15. Перехідні процеси в електричних колах з розподіленими параметрами .....	314
Література .....	344

## ПЕРЕДМОВА

Успішне вивчення та оволодіння матеріалом будь-якого технічного курсу, в тому числі й курсу «Теорія електричних кіл» можливе тільки за умови виконання таких положень:

1. Засвоєння теоретичної частини курсу, тобто *знання* та *розуміння* законів і теорем теорії електричних кіл, а також основних формул і співвідношень, що пов'язують параметри, які характеризують процеси в електричних колах;

2. На основі накопиченої суми знань формування стійких *навичок та вміння* використовувати отримані теоретичні знання для розв'язання тих або інших практичних завдань.

Необхідно зважити на те, що друга умова набагато важливіша за першу, оскільки знання в чистому вигляді при необхідності завжди можна поповнити або відновити за допомогою відповідних підручників і численних довідкових посібників. Розв'язування ж практичних задач потребує дещо інших знань, умінь та навичок. Розвивати в собі ці навички можливо тільки шляхом регулярного розв'язання практичних вправ та задач. Саме така *самостійна робота* сприяє набуванню навичок творчого і незалежного мислення, критичного аналізу та обробки отриманих результатів розрахунку.

У пропонованому навчальному посібнику, який узагальнює багаторічний досвід викладання курсу ТОЕ у Вінницькому національному технічному університеті, зроблена спроба *розкрити сам процес* розв'язування деяких практичних задач аналізу електричних кіл, що, на наш погляд, допоможе студентам засвоїти методику виконання другої умови.

Зрозуміло, що немає і не може бути *єдиного універсального методу* розв'язування задач різних типів. Очевидним є і те, що розв'язувати задачі можна лише попередньо вивчивши теоретичний матеріал, скориставшись відповідними підручниками, серед яких ми особливо рекомендуємо [1-12], та опираючись на постійну практику і орієнтуючись на вже розв'язані та проаналізовані приклади. Для цього в даному навчальному посібнику зібрано досить багато вдалих зразків вправ і задач, демонстрація та аналіз розв'язків яких дозволяє спробувати свої сили у випадках розв'язування більш складних прикладів. З цією ж метою в збірник включені головним чином учбово-навчальні задачі, підібрані таким чином, що під час їх розв'язування можна було б в більш доступній формі та яскравіше відтінити особливості застосування того чи іншого методу розрахунку.

Іншою особливістю посібника є те, що в ньому наведено не просто розв'язки цих задач, а в кожному конкретному випадку пропонується *методологічний розбір та аналіз самого процесу розв'язування задачі*.

Потрібно також зважити на те, що повністю орієнтуватися на вже розв'язану задачу можливо лише тоді, коли розв'язувана задача схожа на зразок. Проте наведена при розгляді задачі логіка та послідовність кроків допоможуть при аналізі задач інших типів.

В запропонованому посібнику усі задачі є *навчально-практичними*, тобто не завжди відображають реально існуючі електротехнічні пристрої або схеми. Усі задані параметри в такого роду задачах повинні бути використані в процесі їх

розв'язування. В чисто практичних задачах проблема підбору вихідних даних для розв'язування не завжди є простим завданням.

В кожному розділі спочатку розглядаються найпростіші та нескладні задачі, які майже завжди розв'язуються шляхом безпосереднього застосування якого-небудь правила або закону, або підстановкою числових даних у відоме співвідношення. Зрозуміло, що для правильного розв'язку задачі необхідно добре знати фізичний зміст літерних позначень у формулах та правильно підставляти числові дані, пам'ятаючи, що одиниці вимірювання прийнято використовувати в Міжнародній системі одиниць СІ. В наших задачах вимірюються: напруга у *вольтах* (В), струм в *амперах* (А), опір в *омах* (Ом), індуктивність в *генрі* (Гн), ємність у *фарадах* (Ф), активна потужність у *ватах* (Вт), реактивна потужність у *вольт-амперах реактивних* (вар), повна потужність у *вольт-амперах* (ВА), частота в *герцах* (Гц), час в *секундах* (с), магнітний потік у *веберах* (Вб), магнітна індукція в *теслах* (Тл), напруженість магнітного поля в *амперах на метр* (А/м).

В деяких випадках електротехнічні величини вимірюють в кратних або частинних одиницях. Для цього застосовують спеціальні приставки:  $10^9$  – *гіга* (Г);  $10^6$  – *мега* (М);  $10^3$  – *кіло* (к);  $10^{-3}$  – *мілі* (м);  $10^{-6}$  – *мікро* (мк);  $10^{-9}$  – *нано* (н);  $10^{-12}$  – *піко* (п).

Задачі підвищеної складності потребують поглибленого знання теорії, більш уважного та вдумливого підходу і, перш за все, необхідності зрозуміти задачу, її суть. Слід чітко розрізняти, яке невідоме (або невідомі) потрібно знайти, що задано, за допомогою яких співвідношень можна пов'язати між собою відомі та невідомі величини. В багатьох випадках необхідно скласти систему рівнянь, використовуючи відомі правила та закони.

Дуже часто задачі мають декілька варіантів розв'язку. В таких випадках бажано розглянути всі можливі способи, а потім вибрати оптимальний в певному сенсі (наприклад, висока точність розрахунку, мінімальна кількість рівнянь в системі, менші витрати часу на розв'язування та інше).

Застосування всіх запропонованих вище рекомендацій буде докладно продемонстровано в ході методичного розбору задач різного ступеня складності. В кінці кожного розділу наведено задачі для самостійного розв'язування, а в кінці умови до кожної із задач подано відповіді до них. В окремих випадках пропонуються короткі методичні підказки.

За умови розв'язання задач, запропонованих для самостійної роботи, в необхідних випадках потрібно звертатися до відповідних розділів підручника і до вже розв'язаних задач схожого типу.

Відзначимо, що короткі теоретичні відомості, які б відповідали змісту задач кожного з розділів, ми вважаємо наводити недоцільним, головним чином тому, що весь теоретичний матеріал повніше і детальніше викладений у відповідних підручниках і навчальних посібниках.

У тих задачах, де потрібен значний об'єм обчислень, хід та послідовність обчислювальних операцій, як правило, не наводиться, а лише підставляються числові значення у відповідних одиницях вимірювання та наводиться остаточний результат. В пропонованому посібнику розглядаються відносно прості задачі, під час розв'язування яких для отримання числових значень шуканих величин доста-

тньо скористатися калькулятором.

Слід зазначити, що посібник подібного типу є першим, що видається українською мовою, що свідчить про його своєчасність та корисність. Автори також сподіваються, що пропонуванний навчальний посібник буде корисним не тільки для студентів, а й для аспірантів, інженерів та викладачів вищих навчальних закладів.

Автори висловлюють щирю подяку рецензентам д.т.н., проф. кафедри «Теоретичних основ електротехніки» Національного технічного університету України «КПІ» Сеньку В. І, д.т.н., проф., завідувачу кафедри «Радіоелектронних пристроїв та систем» Національного авіаційного університету Сібрику Л. В., д.т.н., проф., завідувачу кафедри «Систем автоматизованого управління електроприводу» Кременчуцького національного університету ім. М. Остроградського Родькіну Д. Й. за корисні поради та рекомендації.

Автори з великою подякою сприймуть і врахують в своїй подальшій роботі всі висловлені зауваження, які можна направляти за адресою: 21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ.

*Колектив авторів*



## Розділ 1

# КОМПОНЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ. ЗАКОНИ КІРХГОФА

Для розв'язання завдань цього розділу потрібно знати компонентні співвідношення, закони Кірхгофа та поняття про топологію схем.

**1.1** Струм, що протікає через індуктивність  $L = 0,5$  Гн, визначається виразом  $i = 2(1 - e^{-0,5t})$  А. Знайти закон зміни напруги на індуктивності залежно від часу, енергію магнітного поля та напругу на індуктивності в момент, коли миттєве значення струму дорівнює  $i_1 = 1,2$  А.

### Розв'язування

За умовою задачі необхідно знайти три невідомі. Перші дві знаходяться безпосереднім застосуванням відомих формул.

1. Напруга на індуктивності пов'язана зі струмом компонентним співвідношенням  $u = L \frac{di}{dt}$ . Звідси

$$u = 0,5 \frac{d}{dt} [2(1 - e^{-0,5t})] = 0,5e^{-0,5t} \text{ В.} \quad (1.1)$$

2. Енергія магнітного поля індуктивності визначається за формулою

$$w_1 = \frac{Li_1^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 1,2^2}{2} = 0,36 \text{ Дж.}$$

3. Щоб знайти третю невідому, тобто напругу на індуктивності  $u_1$  в момент часу  $t_1$ , коли струм дорівнює  $i_1 = 1,2$  А, необхідно скористатися виразом (1.1), але для цього слід знати момент часу  $t_1$ , який можна визначити з умови задачі.

Дійсно, за умовою  $i_1 = 1,2$  А при  $t = t_1$ , тобто  $i_1 = 2(1 - e^{-0,5t_1})$ .

Звідси  $e^{-0,5t_1} = \frac{2-1,2}{2} = 0,4$ . Підставляючи це значення в (1.1), маємо  $u_1 = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$  В.

Таким чином, остаточна відповідь:

$$u = 0,5e^{-0,5t} \text{ В; } w_1 = 0,36 \text{ Дж; } u_1 = 0,2 \text{ В.}$$

Аналіз цієї задачі показує, що іноді для знаходження невідомої величини доводиться вирішувати деяку допоміжну задачу – в нашому випадку знаходити час  $t_1$  або, точніше, числовий коефіцієнт  $e^{-0,5t_1}$ .

**1.2** В колі (рис. 1.1, а) діє ідеальне джерело напруги, часова діаграма е.р.с. якого зображена на рис. 1.1, б. Параметри кола:  $R=2$  Ом,  $C=1000$  мкФ. Побудувати графік струму, що протікає в джерелі та визначити значення цього струму в момент  $t_1=1,5$  мс.

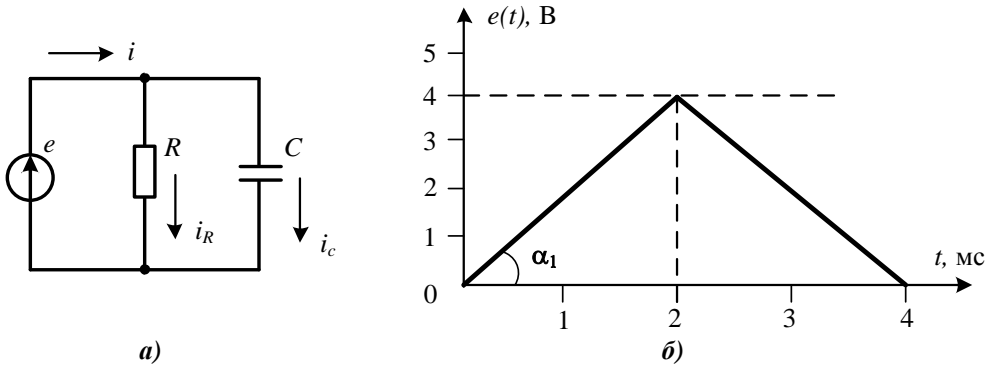


Рисунок 1.1

### Розв'язування

Почнемо шукати відповідь на перше питання.

1. Для знаходження струму джерела  $i$  визначимо спочатку струми  $i_R$  та  $i_C$ , використовуючи компонентні співвідношення  $i_R = \frac{u}{R}$  та  $i_C = C \frac{du}{dt}$ , а потім за першим законом Кірхгофа знайдемо струм  $i = i_R + i_C$ . Для застосування компонентних співвідношень спочатку потрібно визначити аналітичну залежність напруги джерела від часу. Для цього скористаємося заданим на рис. 1.1, б графіком цієї напруги.

2. Аналітичні вирази для напруги джерела запишемо, враховуючи, що графік складається з відрізків двох прямих ліній.

На ділянці  $0 < t < t_1 = 2$  мс пряма проходить через початок координат, тому її рівняння  $u = tg\alpha_1 \cdot t$ , де  $tg\alpha_1 = k_1$  визначимо з умови, що при  $t = 2$  мс  $= 0,002$  с напруга  $u = 4$  В. Звідси  $k_1 = \frac{4}{0,002} = 2000$ , отже  $u = 2000 t$  В.

На другому відрізку часу  $t_1 < t < t_2 = 4$  мс рівняння прямої  $u = k_2 t + b_2$ .

Коефіцієнти  $k_2$  та  $b_2$  визначимо з двох умов: при  $t = 2$  мс  $u = 4$  В, а при  $t = 4$  мс  $u = 0$ .

Підставивши ці числові значення в записані рівняння та розв'язавши отриману систему, яка має вигляд

$$\begin{cases} 4 = k_2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + b_2, \\ 0 = k_2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} + b_2, \end{cases}$$

визначимо значення коефіцієнтів  $k_2$  та  $b_2$ . В кінцевому підсумку маємо  $u = -2000t + 8$  В, а загальний аналітичний вираз запишемо у вигляді:

$$u = \begin{cases} 2000t \text{ В, } 0 < t < t_1, \\ -2000t + 8 \text{ В, } t_1 < t < t_2. \end{cases}$$

3. Тепер можна знайти струми  $i_R$  та  $i_C$ .

Отже, на інтервалі  $0 < t < t_1$

$$i_R = \frac{u}{R} = 1000t \text{ А,}$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = 10^{-3} \cdot \frac{d}{dt}(2000t) = 2 \text{ А.}$$

Тут значення ємності підставлено у фарадах ( $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ).

На інтервалі  $t_1 < t < t_2$

$$i_R = \frac{u}{R} = -1000t + 4 \text{ А,}$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = 10^{-3} \cdot \frac{d}{dt}(-2000t + 8) = -2 \text{ А.}$$

Тоді за першим законом Кірхгофа струм в джерелі

$$i = i_R + i_C = \begin{cases} 1000t + 2 \text{ А, } 0 < t < t_1, \\ -1000t + 2 \text{ А, } t_1 < t < t_2. \end{cases}$$

Графік зміни струму в часі зображений на рис 1.2.

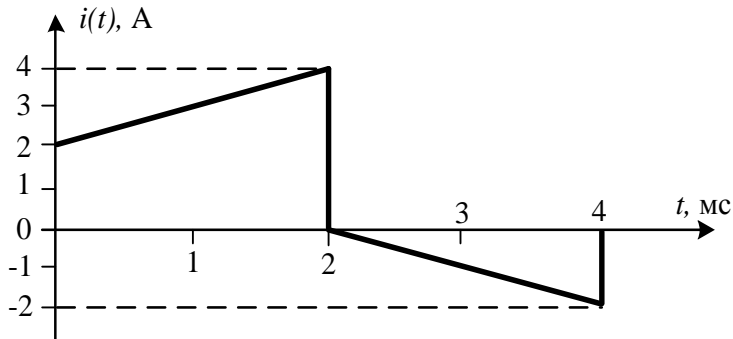


Рисунок 1.2

Як бачимо з наведеного рисунка, форми струму та напруги в електричному колі в загальному випадку можуть суттєво відрізнятися.

4. Дамо відповідь на останнє запитання: чому дорівнює струм джерела в момент  $t = 1,5$  мс? Цей момент часу належить першому часовому відрізку, тому шуканий струм  $i = 1000 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} + 2 = 3,5$  А.

**1.3** Ідеальне джерело струму під'єднане до послідовно з'єднаних опорів  $R=1$  Ом та індуктивності  $L=0,5$  Гн. Форма струму в колі зображена на рис. 1.3. Побудувати графік зміни напруги джерела живлення та визначити значення енергії, що перетворюється в теплову.

### Розв'язування

Для розв'язання задачі необхідно спочатку знайти деякі допоміжні величини. За послідовного з'єднання елементів кола напругу джерела живлення можна знайти за другим законом Кірхгофа з виразу  $u = u_R + u_L$ , де  $u_R$  та  $u_L$  – миттєві значення напруги відповідно на резисторі та індуктивності.

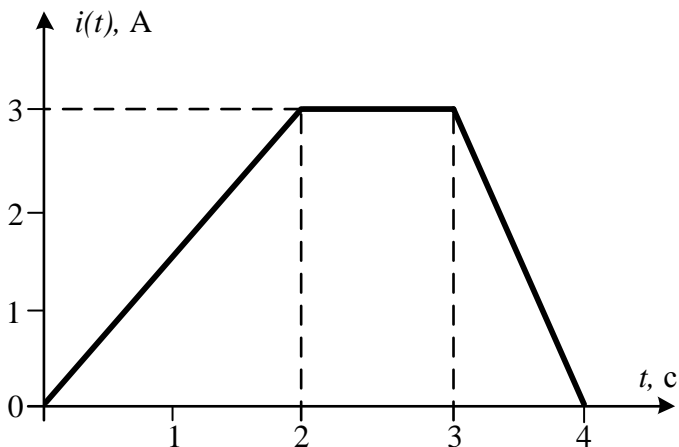


Рисунок 1.3

Ці величини за відомим струмом знаходяться за допомогою компонентних співвідношень  $u_R = Ri$  та  $u_L = L \frac{di}{dt}$ .

1. В задачі відомо *графік* струму, тому залежність струму від часу отримаємо, скориставшись цим графіком. Залежність знаходимо для трьох ділянок, як це було виконано в попередній задачі, і як це впливає з наведеного графіка.

Перший відрізок лежить в межах  $0 < t < t_1$ , де  $t_1 = 2$  с. На цій ділянці графік струму є прямою лінією, що проходить через початок координат, тому його рівняння  $i = k \cdot t$ .

В нашому випадку  $k = 1,5$ , звідки  $i = 1,5t$  А.

На другому відрізку  $t_1 < t < t_2 = 3$  с струм постійний та рівний  $i = 3$  А.

На третій ділянці  $t_1 < t < t_2 = 4$  з рівняння струму  $i = kt + b$ , де  $k = -3$ ,  $b = 12$ , тобто на цій ділянці  $i = -3t + 12$  А.

Таким чином, аналітична залежність струму від часу запишеться у вигляді:

$$i = \begin{cases} 1,5t, & 0 < t < t_1, \\ 3, & t_1 < t < t_2, \\ -3t + 12, & t_2 < t < t_3. \end{cases}$$

2. Звідси знаходимо напругу на активному опорі

$$u_R = Ri = \begin{cases} 1,5t, & 0 < t < t_1, \\ 3, & t_1 < t < t_2, \\ -3t + 12, & t_2 < t < t_3 \end{cases}$$

і на індуктивності

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \begin{cases} 0,75, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < t_2, \\ -1,5, & t_2 < t < t_3. \end{cases}$$

3. Напругу джерела знайдемо за другим законом Кірхгофа

$$u = u_R + u_L = \begin{cases} 1,5t + 0,75, & 0 < t < t_1, \\ 3, & t_1 < t < t_2, \\ -3t + 10,5, & t_2 < t < t_3. \end{cases}$$

Отримані аналітичні залежності дозволяють легко побудувати шуканий графік  $u(t)$  (рис. 1.4).

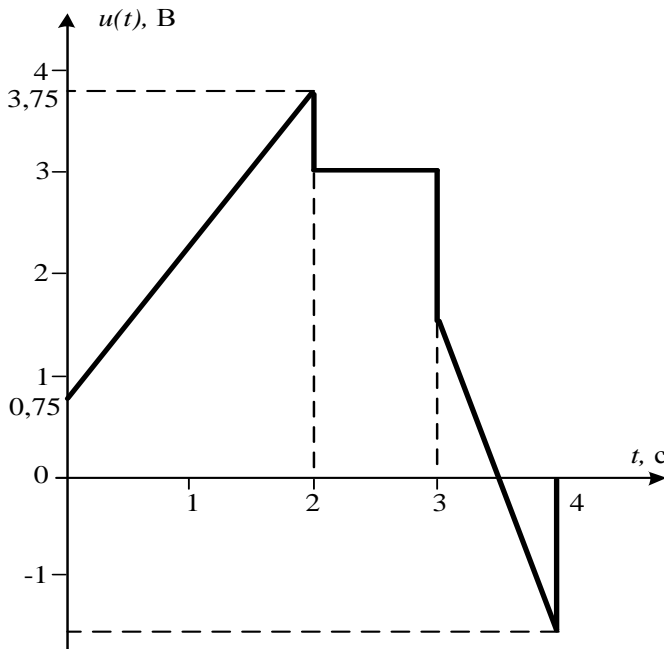


Рисунок 1.4

4. Визначимо кількість енергії, яка перетворилася на тепло. Електричну енергію перетворює на тепло активний опір (резистор), тому для обчислення енергії за час  $t_3$  необхідно скористатися інтегралом:

$$W = \int_0^{t_3} i^2 R dt .$$

Оскільки на трьох різних ділянках струм має різні аналітичні вирази, то й інтеграл слід брати як суму трьох інтегралів на відповідних часових інтервалах:

$$W = \int_0^{t_1} (1,5t)^2 R dt + \int_{t_1}^{t_2} 3^2 R dt + \int_{t_2}^{t_3} (-3t + 12)^2 R dt = 18 \text{ Дж}.$$

**1.4** До кола (рис. 1.5, а) під'єднується ідеальне джерело струму, часова діаграма якого наведена на рис. 1.5, б. Ємності  $C_1 = 25$  мкФ та  $C_2 = 4C_1$  на момент підключення незаряджені, і, як наслідок, напруги на них дорівнюють нулю.

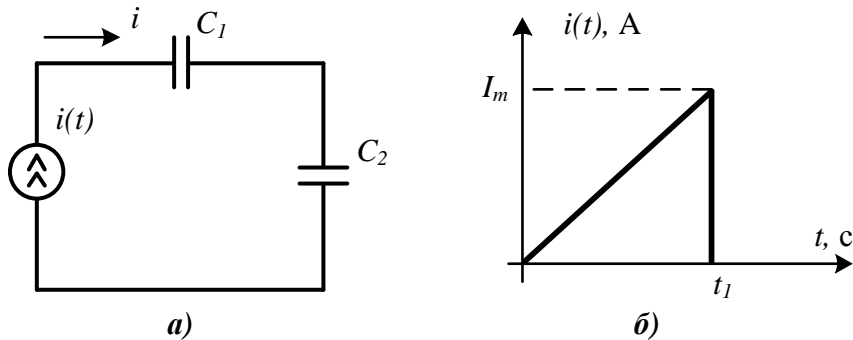


Рисунок 1.5

Побудувати графік зміни напруги на джерелі в часі та визначити його значення  $t_1$ , за умови, що в момент  $t = \frac{t_1}{2}$  напруга джерела дорівнює 10 В, а  $I_m = 1$  А.

### Розв'язування

1. Якщо відомо струм в ємності, то напруга на ній визначається з компонентного співвідношення

$$u = \frac{1}{C} \int i dt .$$

З графіка видно, що на інтервалі  $0 < t < t_1$  зміна струму в часі визначається виразом  $i = \frac{I_m}{t_1} t$ . Проте слід врахувати, що при обчисленні невизначеного інтеграла необхідно знаходити постійну інтегрування, яка в даному випадку рівна нулю, оскільки ємності за умовою задачі незаряджені.

Таким чином, напруга на першій ємності

$$u_{C_1} = \frac{1}{C_1} \int i dt = \frac{1}{C_1} \int \frac{I_m}{t_1} t dt = \frac{I_m}{2C_1 t_1} t^2 + A_1,$$

а на другій

$$u_{C_2} = \frac{1}{C_2} \int i dt = \frac{1}{4C_1} \int \frac{I_m}{t_1} t dt = \frac{I_m}{8C_1 t_1} t^2 + A_2,$$

де  $A_1$  і  $A_2$  – сталі інтегрування, які в даному випадку дорівнюють нулю.

2. Напруга джерела на інтервалі  $0 < t < t_1$  змінюється за законом

$$u = u_{C_1} + u_{C_2} = \frac{5I_m}{8C_1 t_1} t^2 = 2,5 \cdot 10^4 \frac{t^2}{t_1},$$

а її залежність в часі зображена на рис. 1.6.

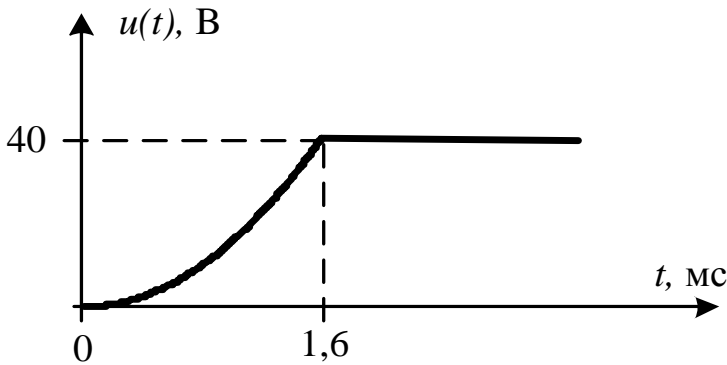


Рисунок 1.6

Числове значення  $t_1$  визначаємо із заданої умови: при  $t = \frac{t_1}{2}$  напруга

$u = 10$  В. Звідси  $10 = \frac{2,5 \cdot 10^4 \cdot t_1}{4}$ . Розв'язавши отриманий вираз відносно часу  $t_1$ ,

отримуємо значення:  $t_1 = 1,6$  мс.

При  $t > t_1$  струм джерела струму рівний нулю, внутрішній опір ідеального джерела струму дорівнює нескінченності, тому ємності на цьому інтервалі залишаються зарядженими і напруга на них не змінюється. Як наслідок напруга джерела живлення дорівнює  $u = 2,5 \cdot 10^4 \cdot t_1 = 40$  В.

**1.5** На рис. 1.7, а зображено коло з джерелом електричної енергії, а на рис. 1.7, б показано залежність напруги джерела від часу. Знайти  $u_2$ , якщо:

1) елементи 1 та 2 – резистори  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом;

2) елементи 1 та 2 – індуктивності  $L_1 = 0,1$  Гн,  $L_2 = 0,4$  Гн.

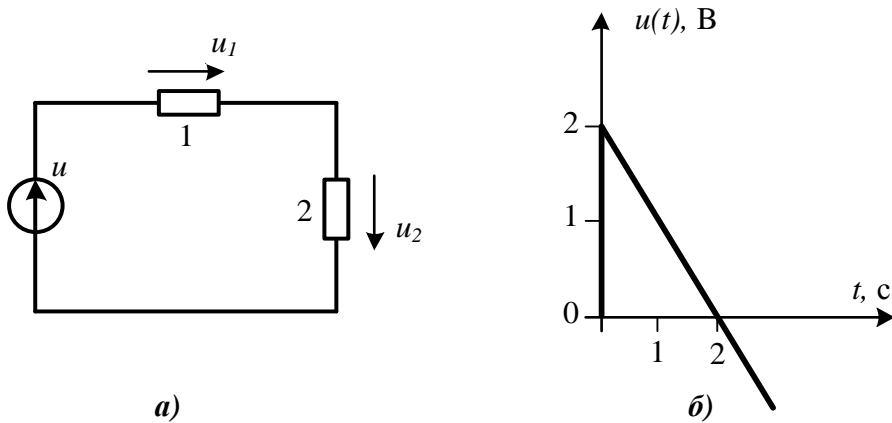


Рисунок 1.7

### Розв'язування

1. В першому випадку напруга на кожному елементі незалежно від форми струму визначається з виразів  $u_1 = R_1 i$ ,  $u_2 = R_2 i$ , звідки е.р.с. джерела  $e = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2) i$ . З останнього виразу маємо

$$i = \frac{u}{R_1 + R_2},$$

тому

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u = 0,6u.$$

З графіка визначаємо аналітичну залежність напруги джерела від часу  $u = -t + 2$  В. Звідси остаточно маємо

$$u_2 = -0,6t + 1,2 \text{ В.}$$

2. За умови підключення індуктивностей, для яких  $u_1 = L_1 \frac{di}{dt}$ ,  $u_2 = L_2 \frac{di}{dt}$ , е.р.с. джерела  $e = u_1 + u_2 = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$ . Звідси  $\frac{di}{dt} = \frac{u}{L_1 + L_2}$ . Відповідно,

$$u_2 = L_2 \frac{di}{dt} = -0,8t + 1,6 \text{ В.}$$

**1.6** Для зображеної на рис.1.6, а схеми виконати таке:

- 1) скласти орієнтований граф схеми;
- 2) накреслити три різні дерева графа;
- 3) визначити число незалежних контурів в схемі;
- 4) вибрати незалежні контури, додатні напрями їх обходу та записати для них рівняння за другим законом Кірхгофа;
- 5) записати необхідні рівняння за першим законом Кірхгофа;



б) записати матрицю з'єднань, а для одного дерева графа, показаного на рис.1.8, записати головну контурну матрицю.

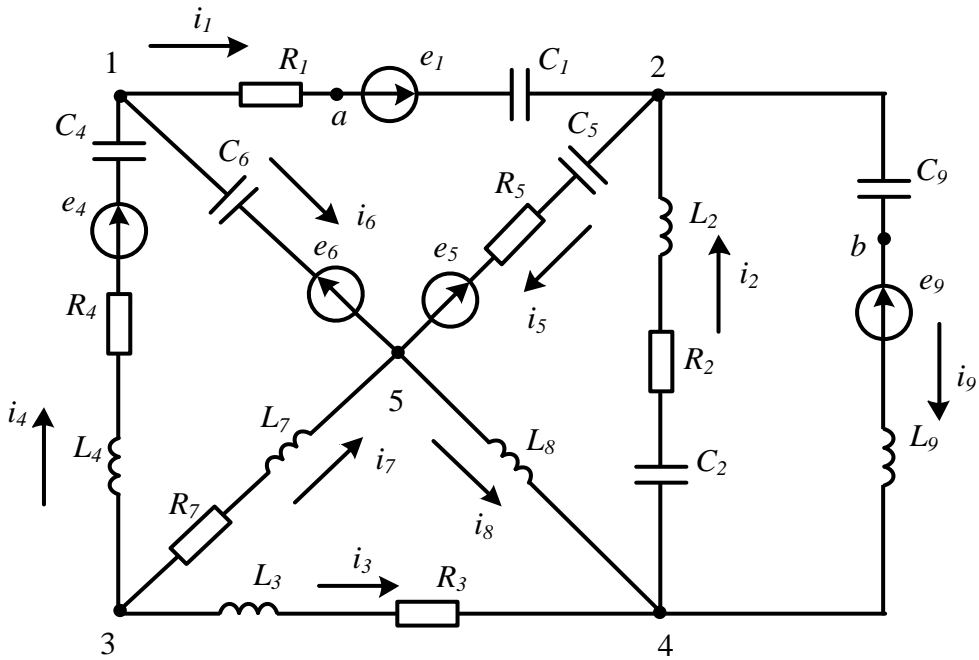


Рисунок 1.8

**Розв'язування**

1. Як відомо, граф схеми – це сукупність відрізків ліній (на схемі це вітки), які називаються *ребрами* графа, і вузлів, які називаються *вершинами* графа. Нарисуємо п'ять вершин графа, що відповідають вузлам схеми, і з'єднаємо їх відрізками, що зображають дев'ять віток схеми, стрілки на яких вказують напрям струмів в вітках (рис. 1.9).

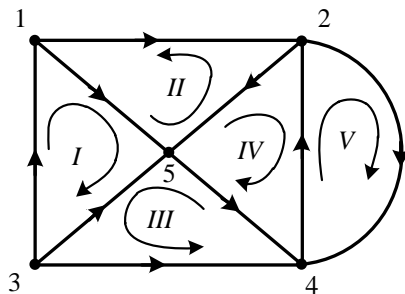


Рисунок 1.9

2. *Дерево* графа – це зв'язний підграф, який містить всі вузли і не має контурів. На рис.1.10 (жирні лінії) показано три різні можливі дерева. Загальне ж число

дерев графа можна знайти за формулою  $n^{n-2}$ , де  $n$  – число вершин графа.

3. Кількість незалежних контурів рівна числу хорд або віток зв'язку, тобто тих віток графа, які не увійшли до дерева. На рис. 1.10 вони показані пунктиром. Оскільки хорд п'ять, тому маємо п'ять незалежних контурів.

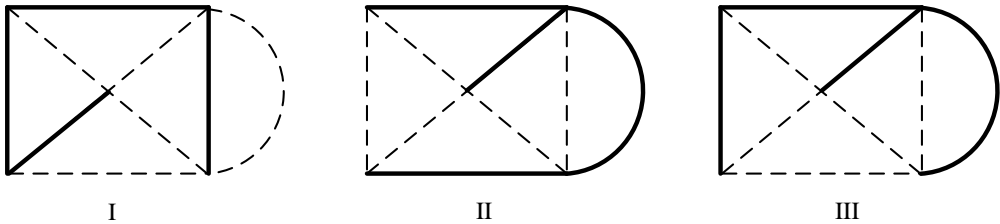


Рисунок 1.10

4. Виберемо довільно п'ять незалежних контурів і додатні напрями їх обходу так, як показано на графі рис.1.9. Пригадаємо другий закон Кірхгофа:

*алгебраїчна сума напруг на пасивних елементах контуру в будь-який момент часу рівна алгебраїчній сумі е.р.с. цього контуру.*

Докладно розберемо запис рівняння для першого контуру. Напряга на пасивному елементі записується із знаком «плюс», якщо напрям обходу контуру і напрям струму в цьому елементі збігаються. В протилежному випадку ця напруга записується зі знаком «мінус». В правій частині рівняння е.р.с. позитивна, якщо її напрям збігається з напрямом обходу контуру.

Почнемо обхід контуру з вузла 1. В першому контурі шість пасивних елементів, тобто в лівій частині рівняння повинно бути шість доданків. Струми в четвертій і шостій вітках збігаються з напрямком обходу цього контуру, тому напруги на пасивних елементах в цих вітках позитивні. Напруги на елементах сьомої вітки негативні. В правій частині рівняння тільки два доданки, тому що в контурі дві е.р.с., причому  $e_4$  є позитивною, а  $e_6$  – негативною. Отже, скориставшись компонентними співвідношеннями, для першого контуру отримуємо

$$\text{I. } \frac{1}{C_6} \int i_6 dt - L_7 \frac{di_7}{dt} - R_7 i_7 + L_4 \frac{di_4}{dt} + R_4 i_4 + \frac{1}{C_4} \int i_4 dt = -e_6 + e_4.$$

Аналогічно для решти контурів.

$$\text{II. } \frac{1}{C_6} \int i_6 dt - R_5 i_5 - \frac{1}{C_5} \int i_5 dt - \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - R_1 i_1 = -e_6 + e_5 - e_1.$$

$$\text{III. } L_3 \frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 - L_8 \frac{di_8}{dt} - L_7 \frac{di_7}{dt} - R_7 i_7 = 0.$$

$$\text{IV. } -L_2 \frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - L_8 \frac{di_8}{dt} - R_5 i_5 - \frac{1}{C_5} \int i_5 dt = e_5.$$

$$\text{V. } \frac{1}{C_9} \int i_9 dt + L_9 \frac{di_9}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = -e_9.$$

5. В заданому колі п'ять вузлів, тому за першим законом Кірхгофа складаємо чотири незалежні рівняння. Нагадаємо, що цей закон формулюється таким чином:

*алгебраїчна сума струмів віток, що сходяться в одному вузлі, у будь-який момент часу рівна нулю.*

Більш докладно розглянемо застосування цього закону на прикладі вузла 2. Пам'ятаємо, якщо струм направлений від вузла, то він входить в рівняння із знаком «плюс». У вказаному вузлі сходяться чотири вітки, причому струми першої та другої вітки направлені до вузла і вони входять в рівняння зі знаком «мінус», а струми в п'ятій та дев'ятій вітках направлені від вузла, тому рівняння має вигляд:

$$2: -i_1 - i_2 + i_5 + i_9 = 0.$$

Аналогічно складаємо рівняння для решти вузлів.

$$1: i_1 - i_4 + i_6 = 0.$$

$$3: i_3 + i_4 + i_7 = 0.$$

$$4: i_2 - i_3 - i_8 - i_9 = 0.$$

6. *Головним контуром* називають контур, який складений з віток дерева і лише однієї хорди. *Головна контурна матриця*  $[B]$  – це матриця, в якій число рядків рівне числу головних контурів, а число стовпців – числу віток. Елементи  $b_{jk}$  матриці визначаються таким чином: якщо вітка  $k$  міститься в контурі  $j$  та її напрям збігається з напрямом обходу контуру, то  $b_{jk} = 1$ , якщо не збігається, то  $b_{jk} = -1$ , якщо вітка  $k$  не входить в контур  $j$ , то  $b_{jk} = 0$ .

Для графа на рис. 1.11 головна контурна матриця має вигляд:

$$[B] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

Нижче пояснимо значення окремих елементів цієї матриці.

Елемент  $b_{11} = 1$ , оскільки перша вітка входить в контур I та її напрям збігається з напрямом обходу цього контуру; елемент  $b_{45} = -1$ , тому що вітка 5 входить в контур IV, але її напрям не збігається з напрямом обходу контуру, елемент  $b_{36} = 0$ , оскільки вітка 6 не входить в контур III.

*Матриця з'єднань*  $[A]$  не пов'язана з конкретними деревами, вона складається для повного графа. Число стовпців матриці з'єднань рівне числу віток, а число рядків на одиницю менше числа вузлів. Якщо вітка  $k$  приєднана до вузла  $j$  та направлена від нього, то елемент матриці  $a_{jk} = 1$ , якщо вона направлена до вузла,

то  $a_{jk} = -1$ , якщо ж вітка з вузлом не пов'язана, то  $a_{jk} = 0$ .

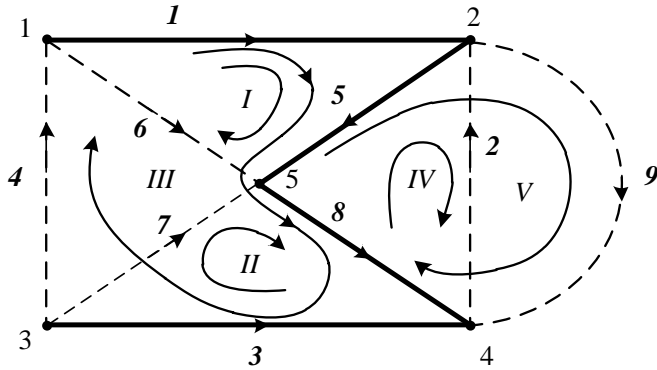


Рисунок 1.11

Таким чином, матриця з'єднань:

$$[A] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right\| \end{matrix}.$$

**1.7** Записати вираз для знаходження напруги  $u_{ab}$  між точками  $a$  та  $b$  в схемі, зображеній на рис. 1.12.

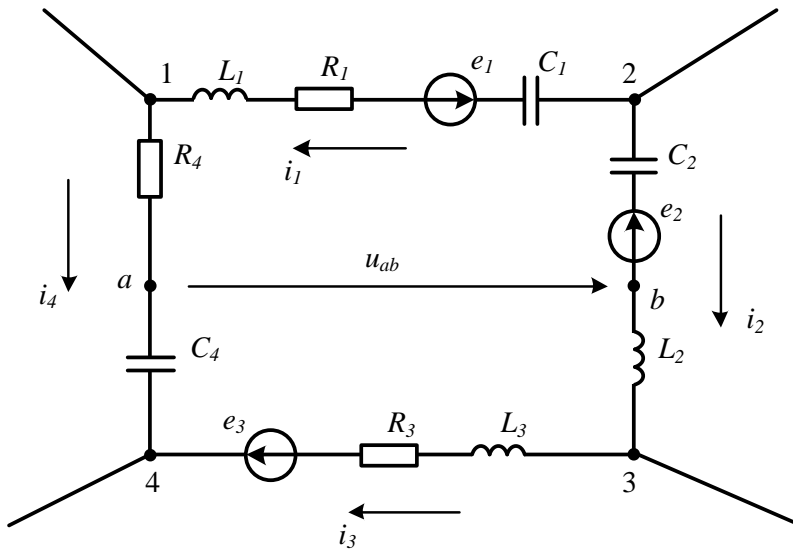


Рисунок 1.12

### Розв'язування

Для знаходження напруги між будь-якими двома точками в схемі зручно показати цю напругу стрілкою (див. рис. 1.12). Потім слід вибрати незамкнений контур, початком якого є точка  $b$ , а кінцем точка  $a$ , і *ніби замкнути* цей контур напругою  $u_{ab}$ , створивши тим самим *умовний замкнений контур*. Таких контурів в даній схемі вийшло два.

Складемо рівняння для умовного контура  $a-b-2-1-a$ , обравши попередній напрямок його обходу

$$u_{ab} - \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_4 i_4 = e_2 - e_1.$$

$$\text{Звідси } u_{ab} = e_2 - e_1 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - R_4 i_4.$$

Підтвердимо правильність такого підходу ще одним способом визначення напруги  $u_{ab}$ . Для цього виразимо потенціал точки  $a$  через потенціал точки  $b$ , послідовно визначаючи потенціали точок між кожним елементом ділянки схеми у напрямі  $b-2-1-a$

$$\varphi_a = \varphi_b + e_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - e_1 - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - R_4 i_4.$$

$$\text{Звідси } u_{ab} = e_2 - e_1 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - R_4 i_4.$$

Як бачимо, отримана формула співпадає з вищенаведеною.

**1.8** На ділянці кола протікають сталі струми. Потрібно знайти напругу  $U_{mn}$  (рис. 1.13), якщо  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $E_1 = 20$  В,  $E_2 = 10$  В,  $I_1 = 2$  А,  $I_3 = 7$  А. Нагадаємо, що в тих випадках, коли в колі струми та напруги сталі, тобто їх величини не залежать від часу, їх зазвичай позначають великими літерами.

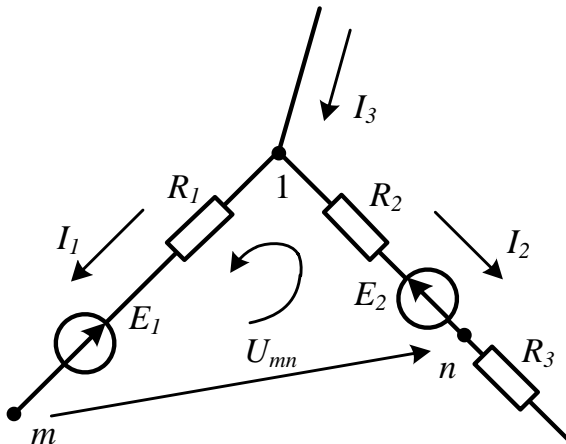


Рисунок 1.13

### Розв'язування

Значення шуканої напруги зручно визначати за другим законом Кірхгофа для умовного контуру, який містить в собі напругу  $U_{mn}$ . Покажемо її на рисунку стрілкою, виберемо напрям обходу контуру (див. рис. 1.13) та складемо рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$U_{mn} - R_2 I_2 + R_1 I_1 = E_2 - E_1.$$

Звідки  $U_{mn} = E_2 - E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2$ .

В правій частині останнього виразу невідомим є струм  $I_2$ , який легко знайти за першим законом Кірхгофа, складеним для вузла 1. Оскільки  $-I_1 - I_2 + I_3 = 0$ , то  $I_2 = I_3 - I_1 = 7 - 2 = 5$  А, а  $U_{mn} = 10 - 20 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = -5$  В.

Знак «мінус» вказує на те, що потенціал точки  $n$  вищий за потенціал точки  $m$ .

**1.9** В колі (рис. 1.14) е.р.с. і струми – величини сталі. Знайти е.р.с.  $E_3$ , якщо  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $R_3 = 7$  Ом,  $R_4 = 2$  Ом,  $E_1 = 20$  В,  $E_2 = 10$  В,  $U_{ac} = 15$  В,  $U_{bc} = 70$  В,  $I_2 = 4$  А.

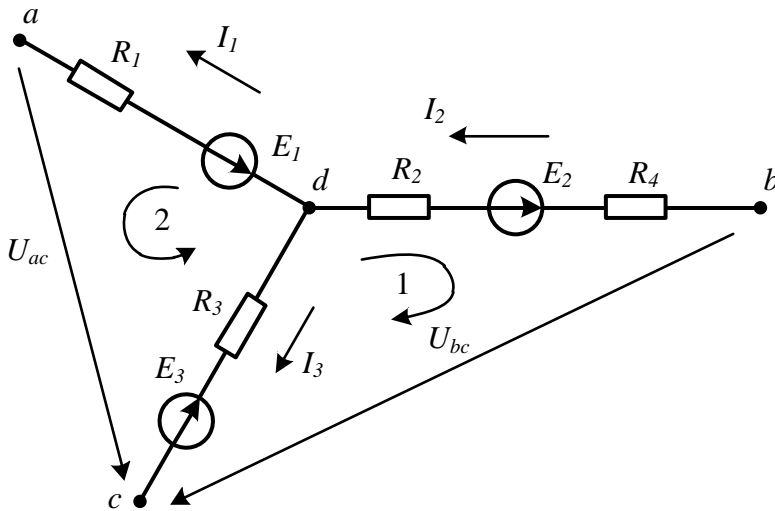


Рисунок 1.14

### Розв'язування

Розберемося уважніше з умовою задачі. На перший погляд необхідно знайти всього одну величину – е.р.с.  $E_3$ . За відомими напругами  $U_{ac}$  і  $U_{bc}$  це можна здійснити, розглядаючи умовні контури, в які входять е.р.с.  $E_3$  або напруга  $U_{bc}$ , або напруга  $U_{ac}$ . В першому контурі окрім е.р.с.  $E_3$  невідомим залишається струм  $I_3$ , а в другому контурі з'являється ще одне невідоме – струм  $I_1$ . Щоб розв'язати нашу задачу з трьома невідомими, потрібно скласти три рівняння.

Два з них складаємо за другим законом Кірхгофа для умовних контурів 1 та 2 з урахуванням заданих напрямів їхнього обходу, а третє рівняння запишемо за

першим законом Кірхгофа для вузла  $d$ . В результаті отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} U_{bc} - R_3 I_3 - (R_2 + R_4) I_2 &= E_2 + E_3, \\ U_{ac} - R_3 I_3 + R_1 I_1 &= E_3 - E_1, \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0. \end{aligned}$$

Відтак, підставивши числові значення і розв'язавши цю систему, отримуємо відповідь:  $E_3 = 19$  В.

**1.10** На рис. 1.15 зображено джерело енергії, яке навантажене опором  $R$ . Струм в колі сталий. Якщо  $R = R_1 = 5$  Ом, то  $U_{12} = 20$  В.

1. Знайти, якою буде напруга  $U_{12}$ , якщо за джерело слугує ідеальне джерело напруги, а  $R = R_2 = 2$  Ом?

2. Якою буде ця ж напруга, якщо джерелом є ідеальне джерело струму за того ж опору навантаження?

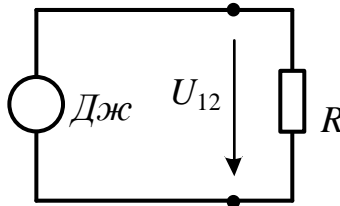


Рисунок 1.15

### Розв'язування

Відразу ж зазначимо, що напруга  $U_{12}$  є напругою джерела в обох випадках.

1. Якщо джерело – ідеальне джерело напруги, то значення його напруги не залежить від навантаження, тому для даної схеми напруга на навантаженні рівна напрузі джерела  $U$  за будь-якого навантаження.

Тому  $U_{12} = U = 20$  В.

2. В ідеальному джерелі струму величина струму не залежить від опору навантаження, тому із умови задачі струм джерела  $I = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{20}{5} = 4$  А залишається

незмінним за будь-якого навантаження, а шукана напруга на опорі  $R_2 = 2$  Ом визначиться із закону Ома:  $U_{12} = I R_2 = 4 \cdot 2 = 8$  В.

**1.11** В електричному колі постійного струму (рис. 1.16,  $a$ ,  $b$ ) з параметрами  $E_1 = 30$  В,  $E_2 = 15$  В,  $R_1 = 3$  Ом,  $R_2 = 7$  Ом,  $R_3 = 10$  Ом знайти покази приладів, спочатку вольтметра, а потім амперметра, якщо увімкнути їх між точками  $m$  і  $n$ .

### Розв'язування

1. Знайдемо спочатку покази вольтметра. Зазвичай, якщо внутрішній опір вольтметра не заданий, його приймають нескінченно великим і при визначенні показів приладу слід шукати напругу між тими точками, до яких підключено вольтметр, не змінюючи при цьому структуру схеми (див. рис. 1.16, а).

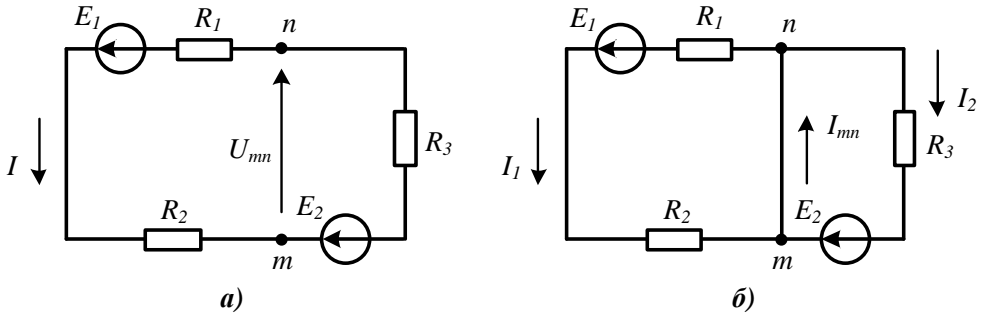


Рисунок 1.16

Спочатку знайдемо напрям напруги  $U_{mn}$ , а потім розрахуємо її значення. Для цього визначимо струм у колі (див. рис. 1.16, а), склавши рівняння за другим законом Кірхгофа. Напрямок обходу контуру обираємо проти годинникової стрілки

$$R_1 I + R_2 I + R_3 I = E_1 - E_2,$$

звідки

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 - 15}{3 + 7 + 10} = 0,75 \text{ А.}$$

Напругу  $U_{mn}$  знайдемо, записавши рівняння за другим законом Кірхгофа для умовного контуру, який складається з цієї напруги, а також з е.р.с.  $E_2$  і опору  $R_3$  (правий контур). Якщо вибрати напрям обходу контуру за годинниковою стрілкою, то  $U_{mn} = E_2 + R_3 I = 22,5 \text{ В}$ . Обхід лівого контуру дає той самий результат.

2. Якщо внутрішній опір амперметра не заданий, то його приймають рівним нулю. Тому для знаходження показів амперметра необхідно замкнути точки  $m$  і  $n$  та знайти струм в цій замкнутій вітці (на рис. 1.16, б це струм  $I_{mn}$ ). Такий підхід розділив коло на два незв'язаних між собою контури, тому за законом Ома для заданих напрямків струмів

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = 3 \text{ А,}$$

$$I_2 = \frac{E_2}{R_3} = 1,5 \text{ А.}$$

Шуканий струм знаходимо за першим законом Кірхгофа

$$I_{mn} = I_1 + I_2 = 4,5 \text{ А,}$$

тобто амперметр має показувати струм 4,5 А.



**Задачі для самостійного розв'язування**

**1.12** Для схеми (див. рис. 1.8), на якій вказані обрані додатні напрями струмів у вітках, скласти рівняння за другим законом Кірхгофа для двох контурів I та II, з урахуванням вказаних напрямів обходу контурів (рис. 1.17).

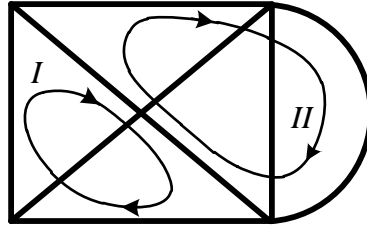


Рисунок 1.17

**1.13** Додатково накреслити ще три різних дерева схеми, наведеної на рис. 1.8.

**1.14** Розписати головну контурну матрицю для схеми на рис. 1.8, якщо її дерево показано на рис. 1.10 (I).

**1.15** Задана вітка деякого кола (рис. 1.18). Вважаючи відомими параметри елементів вітки  $R$ ,  $L$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ , а також її струм та напругу  $u_{ab}$ , записати вираз для напруги на ємності.

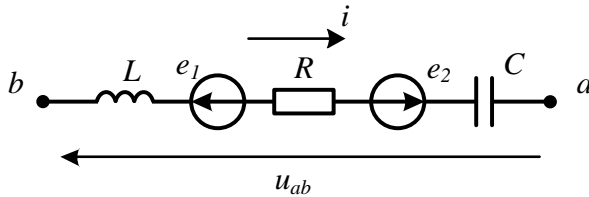


Рисунок 1.18

**1.16** Для ділянки кола (рис. 1.19) заданими є  $U_{mn} = 150$  В,  $E = 20$  В,  $I_1 = 50$  мА,  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 2$  кОм. Знайти струм  $I$ .

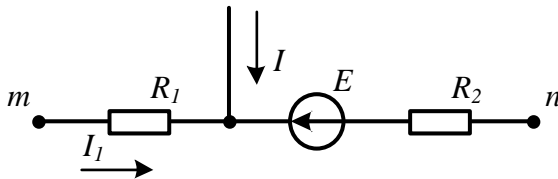


Рисунок 1.19

**Відповідь:**  $-10$  мА.

**1.17** Графік зміни в часі струму ідеального джерела струму (рис. 1.20, а) наведено на рис. 1.20, б. Побудувати часову діаграму напруги цього джерела, знайти її числове значення в момент  $t_1 = 1,2$  с та визначити кількість енергії, яку видає джерело за 5 с, починаючи з моменту  $t = 0$ , якщо  $R = 1$  Ом,  $L = 2$  Гн.

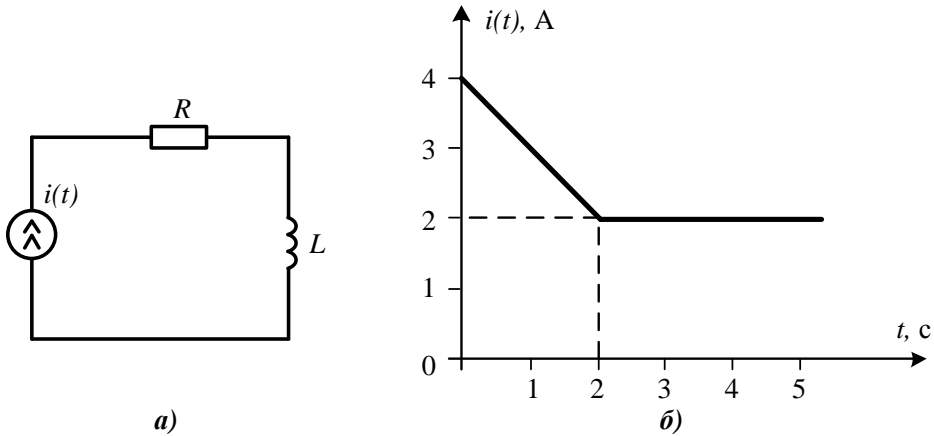


Рисунок 1.20

**Відповідь:**  $u = -t + 2$  на інтервалі  $0 < t < 2$ ;  $u = 2$ , якщо  $t > 2$ ;  $W = 18,67$  Дж;  $u(t_1) = 0,8$  В.

**1.18** У вітках частини електричного кола (рис. 1.21) протікають постійні струми, які потрібно розрахувати за відомими значеннями  $E_3 = 10$  В,  $E_2 = 25$  В,  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом,  $U_{ab} = -17$  В,  $U_{ca} = 24,9$  В.

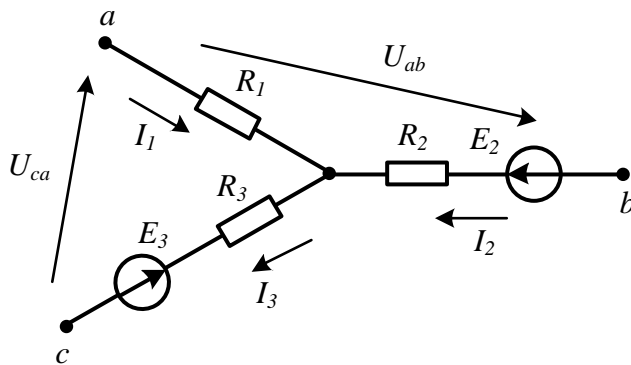


Рисунок 1.21

**Відповідь:**  $I_1 = -5$  А;  $I_2 = 1,7$  А;  $I_3 = -3,3$  А.

**1.19** Записати вираз для знаходження через параметри кола (див. рис. 1.8) напруги між вузлом 3 і точкою b (у дев'ятій вітці).

**1.20** Записати вираз для знаходження через параметри кола (див. рис. 1.8) напруги між вузлом 5 і точкою  $b$  (у дев'ятій вітці).

**1.21** Записати вираз для знаходження через параметри кола (див. рис. 1.8) напруги між точкою  $a$  та вузлом 4 (у першій вітці).

**1.22** В колі (рис. 1.21) знайти струми  $I_2$  та  $I_3$ , якщо відомі  $R_2 = 5$  Ом,  $R_3 = 2$  Ом,  $E_2 = 20$  В,  $E_3 = 8$  В,  $I_1 = 2$  А,  $U_{cb} = 29$  В.

**Відповідь:**  $I_2 = -3$  А;  $I_3 = -1$  А.

**1.23** В електричному колі постійного струму (рис. 1.22) з параметрами  $E_1 = 20$  В,  $E_2 = 40$  В,  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 15$  Ом знайти покази приладів (П), спочатку вольтметра, а потім амперметра, якщо увімкнути їх між точками  $a$  та  $b$ .

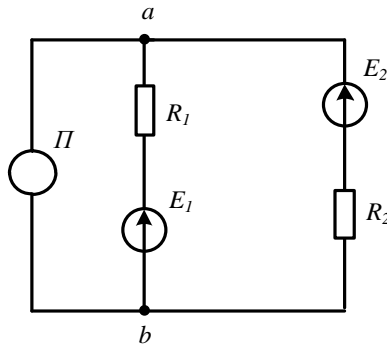


Рисунок 1.22

**Відповідь:**  $U = 25$  В;  $I = 6,67$  А.

**1.24** Для ділянки кола постійного струму (рис. 1.23):  $E_1 = 8$  В,  $E_2 = 20$  В,  $E_3 = 12$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_3 = 5$  Ом,  $U_{ac} = -10$  В,  $U_{bc} = 43$  В,  $I_2 = 5$  А. Знайти  $R_2$ .

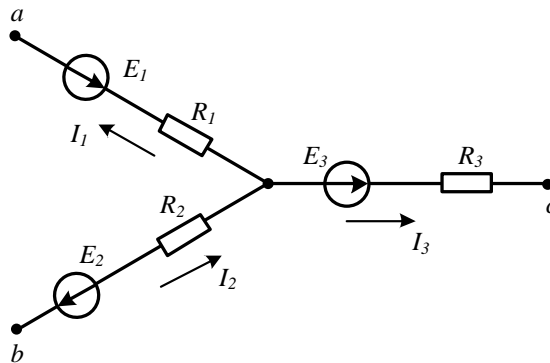


Рисунок 1.23

**Відповідь:**  $R_2 = 3$  Ом.

**1.25** Для схеми (рис. 1.24) виконати таке:

- 1) скласти орієнтований граф схеми та накреслити три різних його дерева;
- 2) визначити число незалежних контурів;
- 3) записати рівняння за першим та другим законами Кірхгофа;
- 4) скласти для одного з дерев головну контурну матрицю.

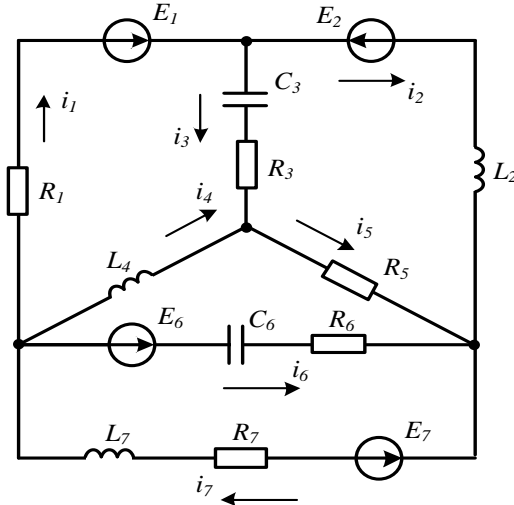


Рисунок 1.24

**1.26** Для схеми (рис. 1.25):

- 1) скласти орієнтований граф схеми та накреслити три різних його дерева;
- 2) визначити число незалежних контурів;
- 3) записати необхідні рівняння за першим законом Кірхгофа;
- 4) скласти для одного з дерев головну контурну матрицю.

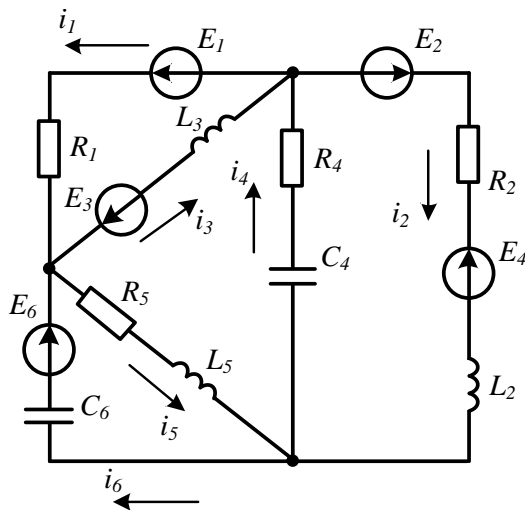


Рисунок 1.25

## Розділ 2

# ЛІНІЙНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

В цьому розділі розглядаються задачі розрахунку нескладних кіл синусоїдного струму, включаючи застосування символічного методу.

**2.1** Відомі діюче значення синусоїдного струму  $I = 8$  А, його початкова фаза  $\alpha = -60^\circ$  та період коливань  $T = 0,01$  с. Записати миттєве значення струму як функцію часу та побудувати його хвильову діаграму.

### Розв'язування

Миттєве значення синусоїдного струму записується у вигляді функції

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha),$$

де  $I_m$  – амплітудне значення струму, пов'язане з його діючим значенням співвідношенням  $I_m = I\sqrt{2}$ ;  $\omega = 2\pi f$  – кутова частота;  $f = \frac{1}{T}$  – частота коливань.

Використовуючи ці співвідношення, знаходимо амплітуду струму  $I_m = I\sqrt{2} = 8\sqrt{2} = 11,31$  А, частоту  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,01} = 100$  Гц, кутову частоту  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 = 6,28$  рад/с.

Тоді миттєве значення струму  $i = 11,31 \sin(628t - 60^\circ)$  А.

Якісний графік отриманої синусоїдної функції побудовано в системі координат  $i$  та  $\omega t$  (рис. 2.1). Цей графік називають *хвильовою діаграмою*.

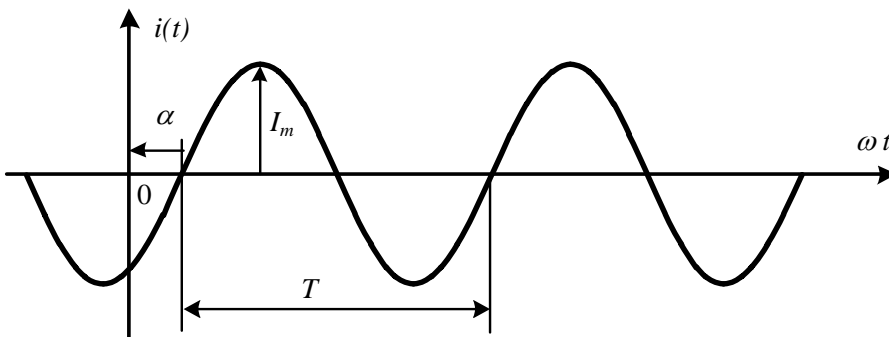


Рисунок 2.1

Для побудови хвильової діаграми необхідно вибрати масштаби струму  $i$  та повної фази  $\omega t + \alpha$  коливань. Більш зручно побудувати спочатку синусоїду, не показуючи осі ординат. Початкова фаза синусоїдної функції відраховується як найкоротша відстань від початку синусоїди до початку координат.

Початком синусоїди вважають момент переходу її від від'ємних до додатних значень. Період синусоїди містить  $2\pi$  радіан або  $360^\circ$ . Оскільки в нашому випадку початкова фаза від'ємна ( $\alpha = -60^\circ$ ), то від початку синусоїди відкладаємо  $60^\circ$  в бік від'ємних значень  $\omega t$  (ліворуч від початку синусоїди) і в цій точці проводимо вісь ординат (див. рис. 2.1).

**2.2** Хвильова діаграма напруги  $u$  показана на рис. 2.2. Її період коливань  $T = 20$  мс. Необхідно записати миттєве значення напруги в аналітичній формі.

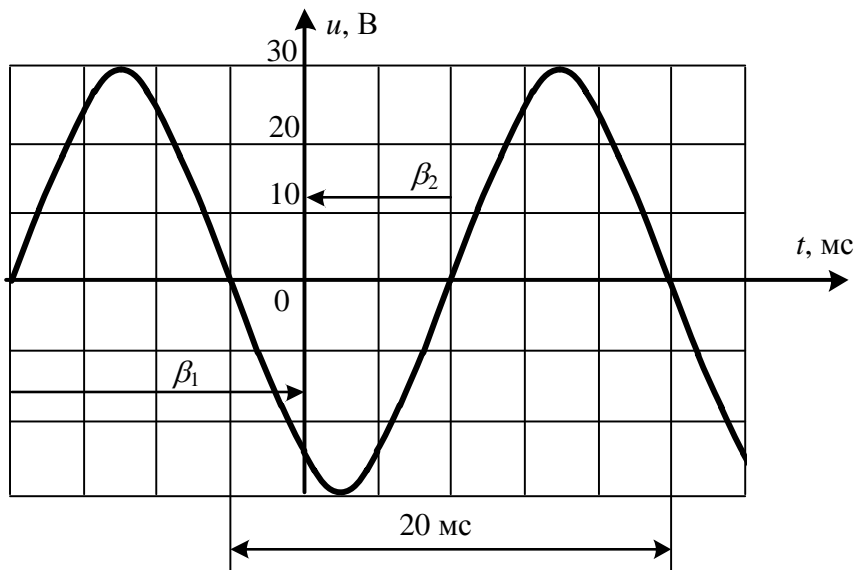


Рисунок 2.2

### Розв'язування

Щоб записати аналітичний вираз для миттєвого значення напруги, потрібно визначити її амплітуду, кутову частоту та початкову фазу. З хвильової діаграми видно, що амплітуда напруги  $U_m = 30$  В, частота  $f = \frac{1}{T} = 50$  Гц, кутова частота  $\omega = 2\pi f = 314$  рад/с, початкова фаза  $\beta_1$  додатна (направлена від початку синусоїди до початку координат у бік додатних значень  $t$ ) і становить  $2/3$  від періоду коливань, тобто  $240^\circ$ .

Таким чином,  $u = 30\sin(314t + 240^\circ)$  В.

Початкову фазу можна знайти, скориставшись відліком від іншого початку синусоїди (кут  $\beta_2$  на рис. 2.2). В цьому випадку вона від'ємна, становить  $1/3$  від періоду коливань  $\beta_2 = -120^\circ$ . Тоді миттєве значення напруги записується як  $u = 30\sin(314t - 120^\circ)$  В.

**2.3** До електричного кола (рис. 2.3) прикладена синусоїдна напруга  $u = 150\sin(628t - 40^\circ)$  В. Записати миттєве значення напруги на ємності та знайти його діюче значення, якщо  $R = 20$  Ом,  $C = 150$  мкФ.

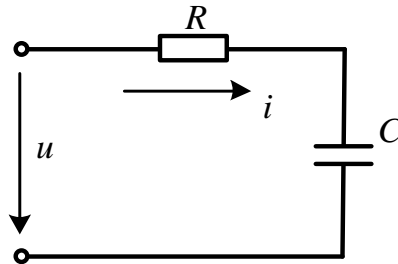


Рисунок 2.3

### Розв'язування

Щоб знайти напругу на ємності, необхідно знати струм, що протікає через ємність, та її опір. Оскільки активний опір і ємність з'єднані послідовно, то амплітуду струму можна знайти за законом Ома

$$I_m = \frac{U_m}{Z},$$

де  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  – повний опір кола;  $X = X_L - X_C$  – реактивний опір;  $X_L = \omega L$  – індуктивний опір;  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  – ємнісний опір.

В нашому випадку  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{628 \cdot 150 \cdot 10^{-6}} = 10,63$  Ом. Внаслідок відсутності індуктивності  $X_L = 0$ . Тоді реактивний опір кола

$$X = X_L - X_C = 0 - 10,63 = -10,63 \text{ Ом},$$

а його повний опір

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{20^2 + (-10,63)^2} = 22,65 \text{ Ом}.$$

Амплітуда струму

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{150}{22,65} = 6,62 \text{ А}.$$

Зсув фаз між струмом та напругою визначається як різниця між їх початко-

вими фазами, тобто  $\varphi = \beta - \alpha$ . Це значення можна розрахувати через параметри елементів заданого кола за формулою

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \operatorname{arctg} \frac{-10,63}{20} = -28^\circ.$$

Тоді миттєве значення струму  $i = I_m \sin(\omega t + \alpha) = 6,62 \sin(628t - 12^\circ)$  А, оскільки його початкова фаза  $\alpha = \beta - \varphi = -40^\circ - (-28^\circ) = -12^\circ$ .

Амплітуду напруги на ємності також знаходимо за законом Ома

$$U_{C_m} = I_m X_C = 6,62 \cdot 10,63 = 70,37 \text{ В.}$$

Напруга на ємності відстає за фазою від струму в ємності на кут  $90^\circ$ , тому початкова фаза напруги на ємності  $\beta_C = -90^\circ + \alpha = -90^\circ - 12^\circ = -102^\circ$ . Таким чином,  $u_C = U_{C_m} \sin(\omega t + \beta_C) = 70,37 \sin(628t - 102^\circ)$  В.

$$\text{Діюче значення напруги на ємності } U_C = \frac{U_{C_m}}{\sqrt{2}} = \frac{70,37}{\sqrt{2}} = 49,8 \text{ В.}$$

**2.4** Напруга  $u(t)$  змінюється в часі за законом, графік якого наведено на рис. 2.4. Визначити діюче значення напруги  $U$ , якщо  $U_m = 100\sqrt{3}$  В.

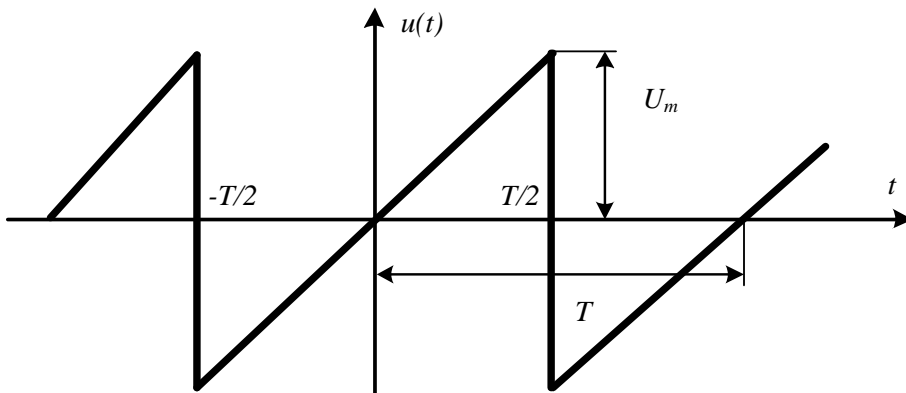


Рисунок 2.4

### Розв'язування

Відомо, що діюче значення будь-якої періодичної напруги  $u = u(t)$  визначається як

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}.$$

Для заданої форми напруги цей вираз є не зовсім зручним, оскільки інтеграл



потрібно розписати у вигляді суми двох інтегралів з відмінними підінтегральними функціями. Це пов'язано з тим, що аналітичні вирази, які описують зміну напруги  $u(t)$  на інтервалах часу  $0 < t < \frac{T}{2}$  та  $\frac{T}{2} < t < T$ , різні.

Відтак зручніше шукати діюче значення напруги не на інтервалі  $0 < t < T$ , а на інтервалі  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ , де закон зміни напруги у часі описується, як видно з графіка (див. рис. 2.4), єдиним виразом

$$u(t) = \frac{2U_m}{T} t.$$

Тоді діюче значення

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{4U_m^2}{T^2} t^2 dt} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}.$$

За умовою  $U_m = 100\sqrt{3}$  В, тому  $U_m = 100$  В.

**2.5** Активна потужність, що споживається колом (рис. 2.5),  $P = 100$  Вт. Знайти індуктивність  $L$ , якщо  $R = 4$  Ом,  $U = 40$  В,  $f = 50$  Гц.

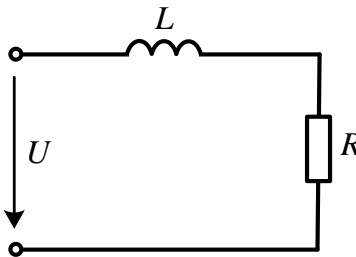


Рисунок 2.5

### Розв'язування

Розв'яжемо задачу у різний спосіб.

1. Розглядаємо почергово, які параметри необхідно знати і як їх визначити, щоб знайти невідому величину  $L$ .

Відомо, що  $L = \frac{X_L}{\omega}$ , а  $X_L = X + X_C$ .

У нашому колі ємність відсутня, тобто  $X_C = 0$ , тому  $X_L = X$ .

Повний опір кола  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ , звідки реактивний опір  $X = \sqrt{Z^2 - R^2}$ .

Повний опір  $Z$  можна пов'язати із струмом та напругою за допомогою зако-

ну Ома  $Z = \frac{U}{I}$ .

Відтак залишилося одне – виразити струм через задані в задачі величини.

Передусім для цього використаємо відоме значення активної потужності  $P$ , що споживається колом. Оскільки  $P = I^2 R$ , маємо  $I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$  А.

Тоді повний опір кола  $Z = \frac{U}{I} = \frac{40}{5} = 8$  Ом, а його реактивна складова  $X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93$  Ом.

Звідси  $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{6,93}{2\pi \cdot 50} = 22,1$  мГн.

2. Цю ж задачу розв'яжемо інакше.

Визначимо струм з виразу  $I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$  А.

Оскільки активна потужність джерела  $P = UI \cos \varphi$ , то коефіцієнт потужності  $\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{100}{40 \cdot 5} = 0,5$ . Отже, зсув фаз  $\varphi = \arccos 0,5 = 60^\circ$ .

Тоді реактивний опір знайдемо, скориставшись поняттям трикутника опорів:  $X = X_L = R \operatorname{tg} \varphi = 4 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 6,93$  Ом.

Відтак значення індуктивності  $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{6,93}{2\pi \cdot 50} = 22,1$  мГн.

**2.6** В електричному колі (рис. 2.6) амперметр показує те саме значення струму  $I = 3$  А і за замкнутого стану ключа  $K$ , і за розімкнутого. Визначити  $R$  і  $C$ , якщо  $U = 90$  В,  $X_L = 10$  Ом,  $f = 200$  Гц.

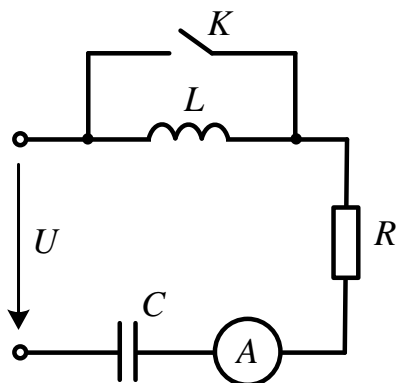


Рисунок 2.6

### Розв'язування

Оскільки амперметр за замкнутого та за розімкнутого станів ключа показує те саме значення, то це означає, що повний опір кола в обох випадках однаковий.

За замкнутого стану ключа  $K$  індуктивність закорочено, струм через неї не проходить і тому повний опір кола  $Z_1 = \sqrt{R^2 + X_1^2} = \frac{U}{I} = 30$  Ом, де  $X_1 = X_C$ .

За розімкнутого стану ключа  $Z_2 = \sqrt{R^2 + X_2^2} = \frac{U}{I} = 30$  Ом, а  $X_2 = X_L - X_C$ .

Оскільки за умовою задачі  $Z_1 = Z_2$ , то  $X_1 = X_2$ . Звідси випливає, що  $X_C = \frac{X_L}{2} = 5$  Ом. Тоді ємність

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 200 \cdot 20} = 159,2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 159,2 \text{ мкФ}.$$

Активний опір знаходимо із співвідношення для замкнутого стану ключа

$$R = \sqrt{Z_1^2 - X_1^2} = \sqrt{Z_1^2 - X_C^2} = \sqrt{30^2 - 5^2} = 29,58 \text{ Ом}.$$

**2.7** Реактивна потужність електричного кола (рис. 2.7)  $Q = -0,64$  кВар. Записати миттєві значення напруги  $u$  та  $i$  струму джерела, а також знайти повну потужність, споживану колом, якщо  $R = 20$  Ом,  $X_C = 10$  Ом.

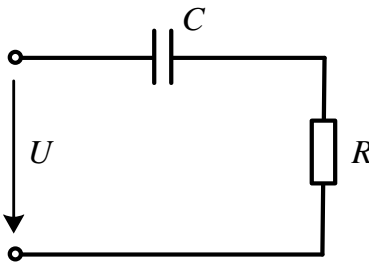


Рисунок 2.7

### Розв'язування

Оскільки реактивна потужність, яка споживається колом, і реактивний опір  $X = -X_C = -10$  Ом відомі, із співвідношення  $Q = I^2 X$  одразу знаходимо діюче

значення струму  $I = \sqrt{\frac{Q}{X}} = \sqrt{\frac{-640}{-10}} = 8$  А.

Повний опір кола розраховуємо із співвідношення  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 22,36$  Ом.

Тоді за законом Ома діюче значення напруги

$$U = IZ = 8 \cdot 22,36 = 178,9 \text{ В}.$$

Повна потужність

$$S = UI = 178,9 \cdot 8 = 1431 \text{ ВА}.$$

Щоб записати миттєві значення напруги та струму, знайдемо їх амплітудні значення:  $U_m = U\sqrt{2} = 253$  В та  $I_m = I\sqrt{2} = 11,31$  А, відповідно, та кут зсуву фаз між ними  $\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{-10}{20} = -26,56^\circ$ . Початкову фазу струму приймаємо рівною нулю  $\alpha = 0$ . Тоді початкова фаза напруги  $\beta = \varphi + \alpha = -26,56^\circ$ .

Таким чином, миттєва напруга, яка прикладена до вхідних затискачів кола, аналітично описується виразом

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta) = 253 \sin(\omega t - 26,56^\circ) \text{ В,}$$

а миттєвий струм –

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha) = 11,31 \sin \omega t \text{ А.}$$

**2.8** Визначити всі потужності джерела, якщо його миттєва напруга  $u(t) = 200 \sin(\omega t + 40^\circ)$  В, а струм  $i(t) = 8 \sin(\omega t - 20^\circ)$  А. Знайти повний, активний та реактивний опори приймача, який під'єднано до джерела.

### Розв'язування

Запишемо вирази для всіх потужностей джерела:

- миттєва потужність  $p = ui$ ;
- активна потужність  $P = UI \cos \varphi$ ;
- реактивна потужність  $Q = UI \sin \varphi$ ;
- повна потужність  $S = UI$ .

Тоді миттєва потужність  $p = 200 \sin(\omega t + 40^\circ) \cdot 8 \sin(\omega t - 20^\circ)$ , яка після простих перетворень набуває вигляду  $p = 800 [\cos 60^\circ - \cos(2\omega t + 20^\circ)]$  Вт.

Після знаходимо діючі значення напруги  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}} = 141,4$  В і струму

$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 5,66$  А, а також зсув фаз між ними  $\varphi = \beta - \alpha = 40^\circ - (-20^\circ) = 60^\circ$ .

Тоді:

- активна потужність  $P = 141,4 \cdot 5,66 \cdot \cos 60^\circ = 400$  Вт;
- реактивна потужність  $Q = 141,4 \cdot 5,66 \cdot \sin 60^\circ = 693$  ВАр;
- повна потужність  $S = 141,4 \cdot 5,66 = 800$  ВА.

Активну та реактивну складові опору приймача можна знайти двома способами.

1. За законом Ома повний опір  $Z = \frac{U}{I} = \frac{141,4}{5,66} = 25$  Ом.

Тоді з трикутника опорів

$$R = Z \cos \varphi = 25 \cdot \cos 60^\circ = 12,5 \text{ Ом};$$

$$X = Z \sin \varphi = 25 \cdot \sin 60^\circ = 21,65 \text{ Ом}.$$

2. Повний опір та його активну та реактивну складові можна визначити і через потужності – повну  $S = I^2 Z$ , активну  $P = I^2 R$  та реактивну  $Q = I^2 X$ , відповідно. Відтак з наведених виразів маємо:

$$- Z = \frac{S}{I^2} = \frac{800}{5,66^2} = 25 \text{ Ом};$$

$$- R = \frac{P}{I^2} = \frac{400}{5,66^2} = 12,5 \text{ Ом};$$

$$- X = \frac{Q}{I^2} = \frac{693}{5,66^2} = 21,65 \text{ Ом}.$$

**2.9** Відомо комплексне діюче значення струму  $\underline{I} = -6 + j8$  А. Потрібно:

- 1) зобразити струм у вигляді вектора на комплексній площині;
- 2) записати миттєве значення струму.

### Розв'язування

1. Комплексне число в загальному випадку можна записати в трьох формах, дві з яких – це:

- алгебраїчна форма  $\underline{A} = a_1 + ja_2$ , де  $a_1$  – дійсна частина комплексного числа, яка відкладається на комплексній площині (рис. 2.8, а) на осі абсцис (вісь дійсних чисел);  $a_2$  – уявна частина, яка відкладається на осі ординат (вісь уявних чисел);

- показникова форма  $\underline{A} = A e^{j\alpha}$ , де  $A$  – модуль комплексного числа, а  $\alpha$  – його аргумент.

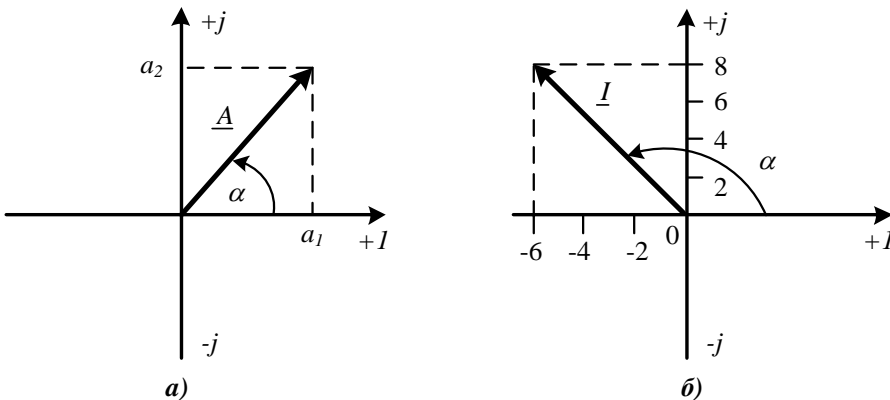


Рисунок 2.8

Перехід від однієї форми запису до іншої здійснюється за допомогою таких співвідношень:

$$- A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad \alpha = \begin{cases} \arctg \frac{a_2}{a_1}, & a_1 \geq 0; \\ \pm 180^\circ + \arctg \frac{a_2}{a_1}, & a_1 < 0; \end{cases}$$

$$- a_1 = A \cos \alpha; \quad a_2 = A \sin \alpha.$$

Отже, щоб зобразити задане комплексне число на комплексній площині, необхідно на осі абсцис відкласти мінус шість одиниць, а на осі ординат – плюс вісім уявних одиниць (рис. 2.8, б).

2. Запишемо комплексне діюче значення струму в показниковій формі

$$\underline{I} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} e^{j\left(180^\circ + \arctg \frac{8}{-6}\right)} = 10 e^{j126,9^\circ} \text{ А.}$$

Модуль цього комплексного числа є діючим значенням струму, а аргумент – його початковою фазою, тому миттєве значення струму:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 126,9^\circ) \text{ А.}$$

**2.10** Розв'язати задачу 2.3 символічним (комплексним) методом.

### Розв'язування

За законом Ома в комплексній формі комплексне діюче значення струму дорівнює  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ . Знаючи миттєве значення напруги, знаходимо її комплексне діюче значення  $\underline{U} = \frac{150}{\sqrt{2}} e^{-j40^\circ} = 106,1 e^{-j40^\circ} \text{ В.}$

Комплексний повний опір кола  $\underline{Z} = R + jX = 20 - j10,63 = 22,65 e^{-j28^\circ} \text{ Ом.}$

Таким чином, комплексне діюче значення струму

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{106,1 e^{-j40^\circ}}{22,65 e^{-j28^\circ}} = 4,68 e^{-j12^\circ} \text{ А.}$$

Комплексне діюче значення напруги на ємності

$$\begin{aligned} \underline{U}_C &= \underline{I}(-jX_C) = \\ &= 4,68 e^{-j12^\circ} \cdot (-j10,63) = 4,68 e^{-j12^\circ} \cdot 10,63 e^{-j90^\circ} = 49,8 e^{-j102^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Звідси діюче значення напруги на ємності  $U_C = 49,8 \text{ В,}$  а її миттєве значення

$$u_C = U_{mC} \sin(\omega t + \beta_C) = 49,8\sqrt{2} \sin(\omega t - 102^\circ) \text{ В.}$$

**2.11** Розв'язати задачу 2.8 символічним методом.

### Розв'язування

Насамперед, запишемо *комплексні амплітудні значення* напруги та струму:

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\beta} = 200e^{j40^\circ} \text{ В}; \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\alpha} = 8e^{-j20^\circ} \text{ А.}$$

Тоді комплексний повний опір

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{200e^{j40^\circ}}{8e^{-j20^\circ}} = 25e^{j60^\circ} = 12,5 + j21,65 \text{ Ом.}$$

Оскільки  $\underline{Z} = R + jX$ , то  $R = 12,5$  Ом,  $X = 21,65$  Ом.

Повна комплексна потужність

$$\underline{S} = \underline{U} \bar{I} = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j40^\circ} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} e^{-j(-20^\circ)} = 800e^{j60^\circ} = 400 + j693 \text{ ВА.}$$

Позаяк  $\underline{S} = P + jQ$ , то активна потужність становить  $P = 400$  Вт, а реактивна –  $Q = 693$  ВАр.

В наведеній формулі  $\bar{I}$  – це *спряжене* комплексне число, яке відрізняється від вихідного протилежним знаком біля уявної частини.

**2.12** Для частини електричного кола (рис. 2.9) потрібно виконати таке.

1) скласти рівняння за законами Кірхгофа:

- для миттєвих значень;
- в символічній формі.

2) записати вираз для знаходження напруги між вузлами 1 та 3 в символічній формі.

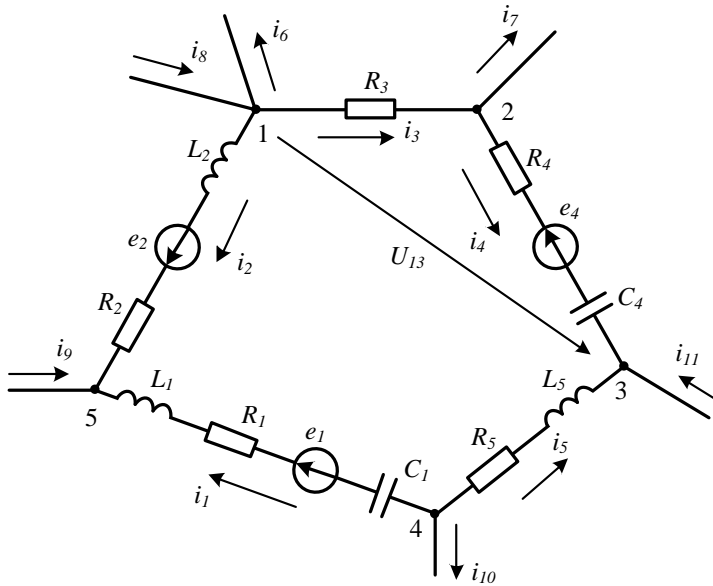


Рисунок 2.9

### Розв'язування

1. Розв'яжемо першу частину задачі.

а) Виберемо напрям обходу контуру за годинниковою стрілкою і запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень, скориставшись компонентними співвідношеннями

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - R_2 i_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_3 + R_4 i_4 + \frac{1}{C_4} \int i_4 dt - L_5 \frac{di_5}{dt} - R_5 i_5 = \\ = e_1 - e_2 - e_4. \end{aligned}$$

В колі п'ять вузлів, тому за першим законом Кірхгофа складаємо чотири незалежних рівняння:

$$\text{- для вузла 1: } i_2 + i_3 + i_6 - i_8 = 0;$$

$$\text{- для вузла 2: } -i_3 + i_4 + i_7 = 0;$$

$$\text{- для вузла 3: } -i_4 - i_5 - i_{11} = 0;$$

$$\text{- для вузла 4: } i_1 + i_5 + i_{10} = 0.$$

б) В рівняннях, складених за другим законом Кірхгофа в символічній формі, складові напруги зручніше записувати відразу на окремих *вітках*, а не на окремих пасивних *елементах*, що входять до складу цих віток.

Тоді для заданого контуру за тим же напрямом його обходу маємо

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 \left[ R_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] - \underline{I}_2 (R_2 + j\omega L_2) + \underline{I}_3 R_3 + \underline{I}_4 \left( R_4 - j \frac{1}{\omega C_4} \right) - \underline{I}_5 (R_5 + j\omega L_5) = \\ = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 - \underline{E}_4. \end{aligned}$$

Запис рівнянь в символічній формі за першим законом Кірхгофа відрізняється від запису для миттєвих струмів (див. пункт а) тільки тим, що замість миттєвих значень струмів використовуються їх комплексні діючі значення.

Наприклад, для вузла 1:

$$\underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_6 - \underline{I}_8 = 0.$$

2. Для зручності складання рівняння напругу  $U_{13}$  покажемо на схемі стрілкою і другий закон Кірхгофа запишемо для умовного контуру  $1 - U_{13} - 3 - 2 - 1$ , обходячи його за годинниковою стрілкою (див. рис. 2.9). Тоді

$$\underline{U}_{13} - \underline{I}_4 \left( R_4 - j \frac{1}{\omega C_4} \right) - \underline{I}_3 R_3 = \underline{E}_4.$$

Шукану напругу  $\underline{U}_{13}$  легко визначити з отриманого рівняння.

**2.13** На ділянці схеми (рис. 2.10) знайти електричну напругу між заданими точками, якщо параметри елементів кола такі:

$$\begin{aligned} R_1 = 5 \text{ Ом}, \quad X_{L_1} = 3 \text{ Ом}, \quad X_{C_2} = 5 \text{ Ом}, \quad R_2 = 3 \text{ Ом}, \quad X_{L_3} = 4 \text{ Ом}, \quad \underline{I}_2 = 8e^{j200^\circ} \text{ А}, \\ \underline{I}_3 = 4e^{-j60^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$



### Розв'язування

За умови розв'язування задач такого типу, коли потрібно знайти напругу між двома точками кола, зазвичай вибирається умовний контур, до якого входить шукана напруга, і записується рівняння за другим законом Кірхгофа з урахуванням її додатного напрямку.

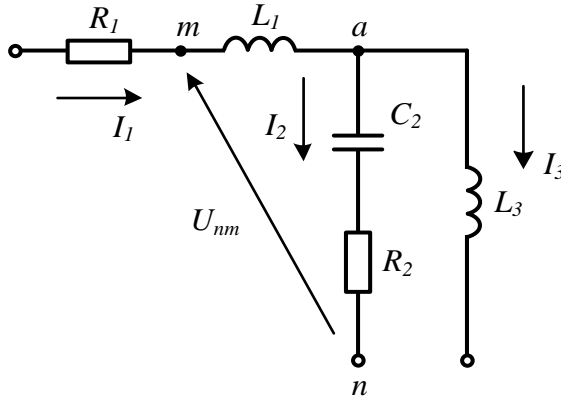


Рисунок 2.10

Розв'яжемо задачу *символічним методом*. Запишемо за другим законом Кірхгофа рівняння для контуру  $n-t-a-n$ , до якого входить напруга  $\underline{U}_{nm}$

$$\underline{U}_{nm} + \underline{I}_1 jX_{L_1} + \underline{I}_2 (R_2 - jX_{C_2}) = 0.$$

Значимо, що в цьому рівнянні, окрім невідомої напруги, невідомий ще і струм  $\underline{I}_1$ , який легко знаходиться з рівняння, складеного за першим законом Кірхгофа для вузла  $a$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3.$$

Тому

$$\begin{aligned} \underline{U}_{nm} &= -(\underline{I}_2 + \underline{I}_3) jX_{L_1} - \underline{I}_2 (R_2 - jX_{C_2}) = \\ &= -(8e^{j200^\circ} + 4e^{-j60^\circ}) \cdot j3 - 8e^{j200^\circ} \cdot (3 - j5) = 21,8e^{-j36^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

**2.14** На ділянках кола (рис. 2.11) вольтметри показують напруги  $U = 170 \text{ В}$ ,  $U_1 = 100 \text{ В}$ ,  $U_2 = 90 \text{ В}$ . Опір  $R_2 = 18 \text{ Ом}$ . Знайти  $R_1$  та  $X_L$ , а також скласти баланс активних потужностей.

### Розв'язування

*Баланс активних потужностей* полягає в тому, що в електричному колі сума активних потужностей приймачів завжди дорівнює сумі активних потужностей джерел енергії.

Всі елементи в заданому колі з'єднані послідовно, тому струм в них однаковий. В колі діє лише одне джерело живлення і його активна потужність обчислюється за формулою  $P_{дж} = UI \cos \varphi$ .

Активну потужність в колі споживають активні опори. Її значення можна знайти з виразу  $P_{np} = I^2 R_1 + I^2 R_2$ , де є дві невідомі нам величини – струм  $I$  та активний опір  $R_1$ .

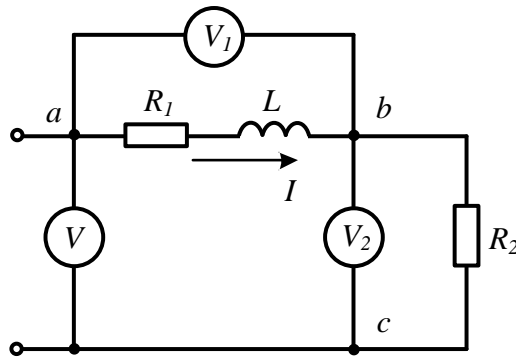


Рисунок 2.11

За умовою задачі опір  $R_2$  і напруга на ньому  $U_2$  є відомими, тому згідно з законом Ома знаходимо струм

$$I = \frac{U_2}{R_2} = \frac{90}{18} = 5 \text{ А.}$$

Це дозволяє розрахувати повний опір кола на ділянці  $ab$

$$Z_1 = \frac{U_1}{I} = \frac{100}{5} = 20 \text{ Ом}$$

та повний опір всього кола

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{170}{5} = 34 \text{ Ом.}$$

Оскільки

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + X_L^2},$$

а

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2},$$

то в сукупності отримуємо систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} (R_1 + 18)^2 + X_L^2 = 1156; \\ R_1^2 + X_L^2 = 400. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є  $R_1 = 12 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 16 \text{ Ом}$ .

Таким чином, активна потужність, яку споживають усі приймачі кола,

$$P_{np} = I^2 R_1 + I^2 R_2 = I^2 (R_1 + R_2) = 5^2 \cdot (12 + 18) = 750 \text{ Вт.}$$

Щоб знайти активну потужність джерела, необхідно знайти косинус кута зсуву фаз між струмом та прикладеною напругою. З трикутника опорів маємо

$$\cos \varphi = \frac{R_1 + R_2}{Z} = \frac{12 + 18}{34} = 0,882.$$

Тоді активна потужність джерела

$$P_{дж} = UI \cos \varphi = 170 \cdot 5 \cdot 0,882 = 750 \text{ Вт,}$$

що виявляє виконання балансу активних потужностей  $P_{дж} = P_{сн}$ .

**2.15** Якщо реальну котушку індуктивності, яка складається з індуктивного елемента  $L$  та активного опору  $R$  обмотки, увімкнути до джерела постійної напруги  $U_1 = 50 \text{ В}$ , то по ній потече струм  $I_1 = 10 \text{ А}$ .

За умови під'єднання цієї ж котушки до джерела синусоїдної напруги, діюче значення якої  $U_2 = 100 \text{ В}$ , струм  $I_2$  в ній буде рівний  $4 \text{ А}$ .

Знайти активний опір  $R$  та індуктивність котушки  $L$ , якщо частота  $f = 50 \text{ Гц}$ .

### Розв'язування

За умови протікання по котушці постійного струму ( $f_1 = 0$ ) опір індуктивності дорівнює нулю  $X_{L_1} = \omega_1 L = 2\pi f_1 = 0$ . Тому вимірювання на постійному струмі дозволяє знайти активний опір котушки

$$R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{50}{10} = 5 \text{ Ом.}$$

Відношення діючого значення прикладеної напруги до діючого значення струму за умови синусоїдної напруги та струму визначає повний опір котушки

$$Z = \frac{U_2}{I_2} = \frac{100}{4} = 25 \text{ Ом.}$$

Відтак знаходимо спочатку шуканий індуктивний опір

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{25^2 - 5^2} = 24,5 \text{ Ом,}$$

а потім і індуктивність  $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{24,5}{2\pi \cdot 50} = 0,078 \text{ Гн.}$

**2.16** Електричну лампочку з номінальною напругою  $U_1 = 120 \text{ В}$  і потужністю  $P = 60 \text{ Вт}$  необхідно увімкнути в мережу з напругою  $U_1 = 220 \text{ В}$  та частотою  $f = 50 \text{ Гц}$ . Яку ємність необхідно увімкнути послідовно з лампочкою, щоб вона працювала в номінальному режимі?

Принагідно варто зазначити, що для зниження напруги вмикається ємність, а не активний опір, щоб не було зайвих втрат енергії.

### Розв'язування

Вважаючи лампочку суто активним опором  $\cos \varphi = 1$ , неважко знайти необхідне значення струму, що проходить по ній в номінальному режимі роботи

$$I = \frac{P}{U_1} = \frac{60}{120} = 0,5 \text{ А.}$$

Тоді опір лампочки, відповідно до закону Ома, становитиме

$$R = \frac{U_1}{I} = \frac{120}{0,5} = 240 \text{ Ом.}$$

Для роботи лампочки в номінальному режимі під час увімкнення її разом з ємністю до джерела напругою 220 В по ній має проходити той самий за значенням струм, тобто 0,5 А, і спостерігатися спад напруги 120 В. Тому повний опір такого кола становить

$$Z = \frac{U_2}{I} = \frac{220}{0,5} = 440 \text{ Ом.}$$

Оскільки  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ , то реактивний опір кола

$$X = -\sqrt{Z^2 - R^2} = -\sqrt{440^2 - 240^2} = -368,8 \text{ Ом.}$$

Від'ємне значення (знак «мінус» перед коренем) враховує за умовою активно-ємнісний характер повного опору.

Отже, якщо ємнісний опір  $X_C = 368,8 \text{ Ом}$ , то значення власне ємності

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 368,8} = 8,63 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 8,63 \text{ мкФ.}$$

**2.17** В електричному колі, показаному на рис. 2.12, визначити покази приладів для двох випадків: в першому з яких до кола прикладено синусоїдну напругу з діючим значенням  $U_1 = 100 \text{ В}$ , а в другому – постійну напругу  $U_2 = 100 \text{ В}$ . Параметри елементів кола такі: активний опір  $R = 20 \text{ Ом}$ , ємність  $C = 80 \text{ мкФ}$ , а частота –  $f = 50 \text{ Гц}$ .

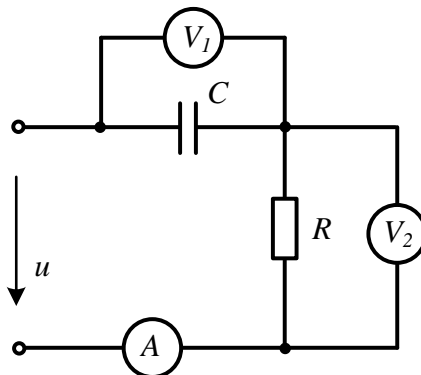


Рисунок 2.12

### Розв'язування

1. Якщо до кола прикладено синусоїдну напругу, то його повний опір

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2},$$

де реактивна складова

$$X = -X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi fC} = -\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = -40 \text{ Ом.}$$

Тоді, оскільки  $Z = 44,7$  Ом, діюче значення струму в колі

$$I = \frac{U_1}{Z} = \frac{100}{44,7} = 2,24 \text{ А.}$$

Діюче значення напруги на ємності

$$U_C = X_C I = 40 \cdot 2,24 = 89,6 \text{ В,}$$

а на активному опорі –

$$U_R = RI = 20 \cdot 2,24 = 44,8 \text{ В.}$$

Отже, в режимі синусоїдного струму амперметр покаже  $I = 2,24$  А, перший вольтметр –  $U_C = 89,6$  В, а другий вольтметр –  $U_R = 44,8$  В.

2. За умови постійної напруги  $f = 0$  опір ємності рівний нескінченності, тому струм в колі буде відсутній, отже, буде відсутньою і напруга на активному опорі. Тоді, відповідно до другого закону Кірхгофа, напруга на ємності буде рівна прикладеній до кола постійній напрузі.

Покази приладів: амперметра  $I = 0$ , першого вольтметра  $U_C = 100$  В, другого вольтметра  $U_R = 0$ .

### Задачі для самостійного розв'язування

**2.18** Миттєве значення напруги  $u = 200 \sin(\omega t - 75^\circ)$  В. Записати комплексне діюче значення цієї напруги в алгебраїчній та показниковій формах і зобразити його у вигляді вектора на комплексній площині.

**Відповідь:**  $\underline{U} = 36,6 - j136,6 = 141,4 e^{-j75^\circ}$  В.

**2.19** Діюче значення струму  $I = 10$  А, його початкова фаза  $\alpha = -250^\circ$ . Побудувати хвильову діаграму і записати комплексне амплітудне значення цього струму.

**Відповідь:**  $\underline{I} = 14,14 e^{-j250^\circ}$  А.

**2.20** До електричного кола (рис. 2.13) прикладена синусоїдна напруга  $u = 150 \sin(628t - 40^\circ)$  В. Записати миттєве значення напруги на активному опорі

та знайти його діюче значення, якщо  $R = 20 \text{ Ом}$ ,  $L = 40 \text{ мГ}$ .

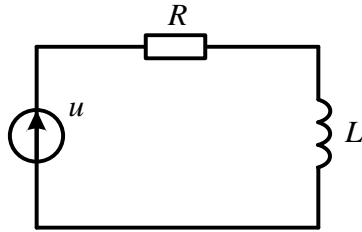


Рисунок 2.13

**Відповідь:**  $U = 66 \text{ В}$ .

**2.21** Струм  $i(t)$  змінюється в часі за законом, графік якого зображено на рис. 2.14. Визначити діюче значення струму  $I$ , якщо  $I_m = 10 \text{ А}$ .

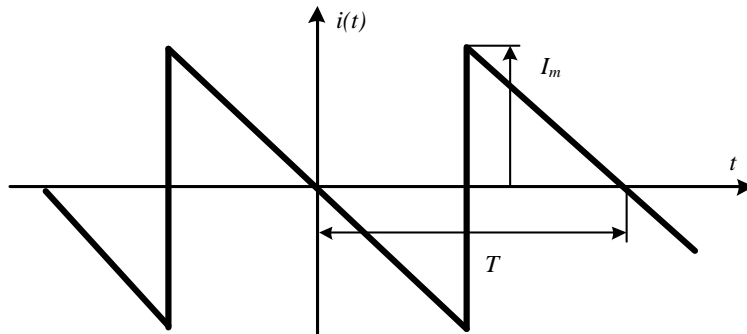


Рисунок 2.14

**Відповідь:**  $I = \frac{I_m}{\sqrt{3}} = 5,77 \text{ А}$ .

**2.22** Напряга  $u(t)$  змінюється в часі за законом, графік якого наведено на рис. 2.15. Визначити діюче значення напруги  $U$ , якщо  $U_m = 200 \text{ В}$ .

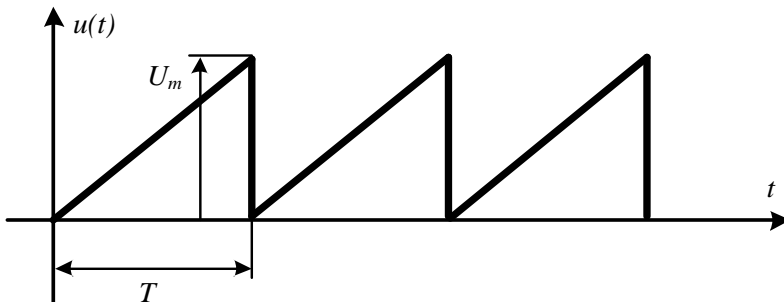


Рисунок 2.15

**Відповідь:**  $U = 115,5 \text{ В}$ .

**2.23** Повна споживана потужність кола (рис. 2.16)  $S = 0,49$  кВА. Знайти напругу джерела  $U$ , якщо  $R = 6$  Ом,  $L = 4,25$  мГн,  $f = 300$  Гц.

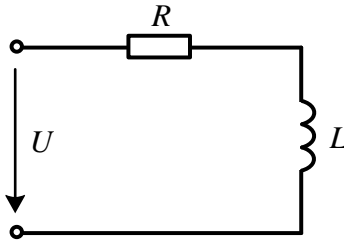


Рисунок 2.16

**Відповідь:**  $U = 70$  В.

**2.24** Активна потужність, що споживається колом (рис. 2.17)  $P = 0,36$  кВт. Знайти напругу джерела  $U$ , якщо  $R = 10$  Ом,  $C = 10$  мкФ,  $f = 500$  Гц.

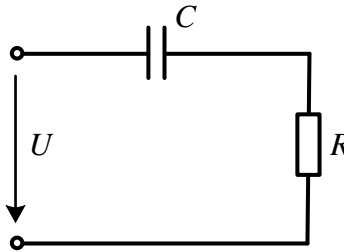


Рисунок 2.17

**Відповідь:**  $U = 200$  В.

**2.25** Реактивна потужність, що споживається електричним колом (рис. 2.18),  $Q = -6,4$  кВАр. Знайти опір  $R$ , якщо  $U = 400$  В,  $C = 1,4$  мкФ,  $f = 7,1$  кГц.

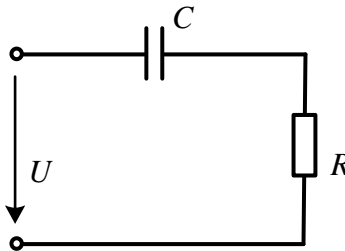


Рисунок 2.18

**Відповідь:**  $R = 12$  Ом.

**2.26** Визначити всі потужності джерела живлення, враховуючи і миттєву,

якщо його напруга та струм задані у вигляді комплексних амплітудних значень:  $\underline{U}_m = -j120$  В та  $\underline{I}_m = -4 - j8$  А. Знайти повний, активний та реактивний опори приймача, увімкнутого до цього джерела енергії.

**Відповідь:**  $R = 12$  Ом;  $X = 6$  Ом;  $P = 480$  Вт;  $Q = 240$  ВАр;  $S = 536,6$  ВА.

**2.27** Скласти рівняння за законами Кірхгофа відносно електричного кола (рис. 2.19):

а) для миттєвих значень;

б) у символічній формі.

Записати вираз для знаходження напруги між точками  $A$  і  $B$ .

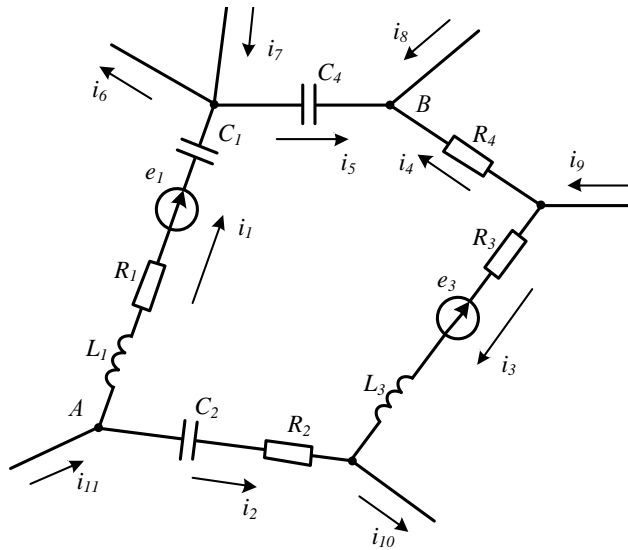


Рисунок 2.19

**2.28** Потрібно:

1) записати комплексні числа:

а)  $\underline{A} = 5 - j2$  в показниковій формі;

б)  $\underline{B} = 5e^{-j90^\circ}$  в алгебраїчній формі;

2) виконати дії над комплексними числами  $\underline{A} + \underline{B}$ ;  $\underline{A} \cdot \underline{B}$ ;  $\sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{A}}}$ .

**Відповідь:**  $\sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{A}}} = 0,964e^{-j34,1^\circ}$ .

**2.29** Виконати такі дії:

1) записати комплексні числа:

а)  $\underline{A} = -22 - j28$  в показниковій формі;



б)  $\underline{B} = 25e^{j240^\circ}$  в алгебраїчній формі;

2) знайти  $\underline{A} + \underline{B}$ ;  $\underline{A} \cdot \underline{B}$ ;  $\sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{A}}}$ .

**Відповідь:**  $\sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{A}}} = 0,838e^{j4,08^\circ}$ .

**2.30** Задано струм  $\underline{I} = -3 - j4$  А. Потрібно:

- 1) зобразити струм у вигляді вектора на комплексній площині;
- 2) записати миттєве значення струму.

**2.31** До електричного кола (рис. 2.20) прикладено напругу  $u = 20\sin \omega t$  В. Струм, який проходить колом,  $i = 4\sin(\omega t + 60^\circ)$  А. Визначити миттєве значення напруги на ємності  $u_C$ .

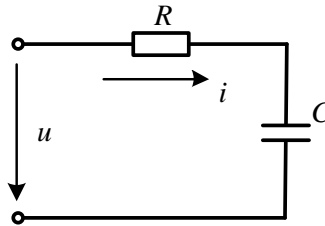


Рисунок 2.20

**Відповідь:**  $u_C = 17,32\sin(\omega t - 30^\circ)$  В.

**2.32** На схемі частини електричного кола (рис. 2.21) визначити напругу між вказаними точками 1 і 2, якщо  $X_{C_1} = 2$  Ом,  $X_{L_1} = 3$  Ом,  $X_{C_2} = 1$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $R_3 = 5$  Ом,  $X_{L_3} = 2$  Ом,  $\underline{I}_1 = 4e^{j90^\circ}$  А,  $\underline{I}_3 = 5e^{-j20^\circ}$  А.

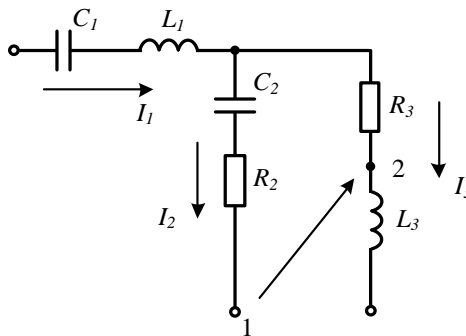


Рисунок 2.21

**Відповідь:**  $\underline{U}_{12} = 44e^{-j43,6^\circ}$  В.

**2.33** На ділянці кола (рис. 2.22) знайти напругу між вказаними точками 1 і 2, якщо  $X_{C_1} = 4$  Ом,  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 5$  Ом,  $X_{C_2} = 1$  Ом,  $X_{L_3} = 3$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом,  $I_1 = 3e^{j20^\circ}$  А,  $I_3 = 4e^{-j90^\circ}$  А.

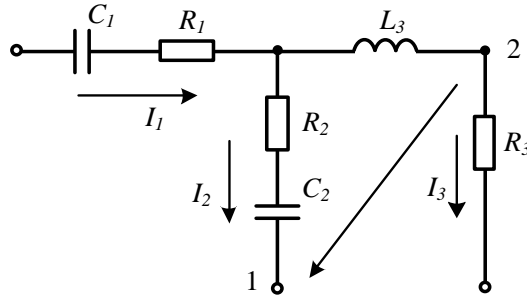


Рисунок 2.22

**Відповідь:**  $\underline{U}_{21} = 23,4e^{j72,3^\circ}$  В.

**2.34** В електричному колі (рис. 2.23) на частоті  $f_1 = 1$  кГц відомі діючі значення: синусоїдної е.р.с.  $E = 220$  В та струмів  $I_L = 5$  А і  $I_R = 10$  А. За якої частоти ці струми будуть однаковими?

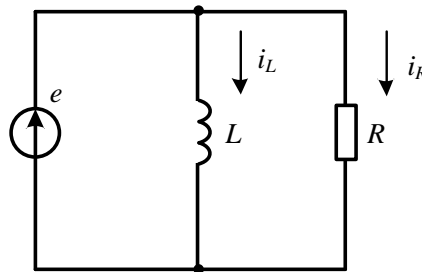


Рисунок 2.23

**Відповідь:**  $f_2 = 500$  Гц.

**2.35** До кола, що складається з послідовно з'єднаних активного опору  $R_1 = 10$  Ом та котушки індуктивності, активний опір якої  $R_2 = 5$  Ом, прикладено напругу  $U = 220$  В. Струм в колі на частоті  $f = 50$  Гц рівний  $I = 11$  А. Знайти індуктивність котушки.

**Відповідь:** 42 мГн.

**2.36** Індуктивний опір котушки в три рази більший за її активний опір. У випадку вмикання цієї котушки до джерела синусоїдної напруги 220 В вона споживає активну потужність 2 кВт. Знайти струм і параметри котушки.

**Відповідь:**  $I = 28,75$  А;  $R = 2,42$  Ом;  $X_L = 7,26$  Ом.

## Розділ 3

# ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Розглядаються задачі, для розв'язання яких застосовуються еквівалентні перетворення послідовно і паралельно з'єднаних резистивних, реактивних та повних опорів, а також взаємне перетворення пасивних віток, з'єднаних у вигляді трикутника або зірки в колах постійного і синусоїдного струмів.

**3.1** Знайти вхідний еквівалентний опір електричного кола, показаного на рис. 3.1, а, якщо  $R_1 = 7$  Ом,  $R_2 = 12$  Ом,  $R_3 = 8$  Ом,  $R_4 = 1,2$  Ом.

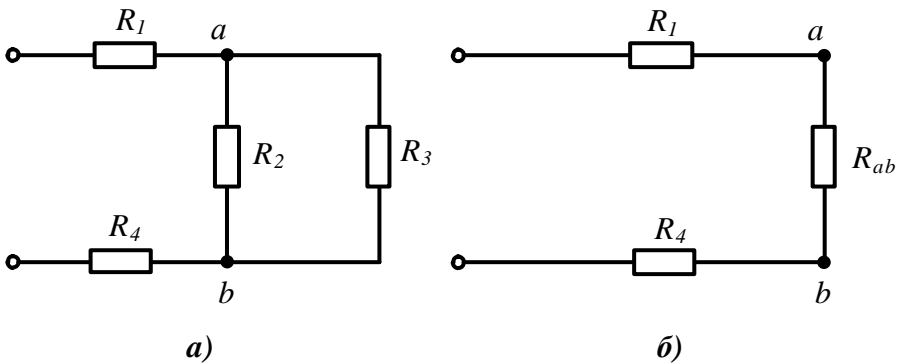


Рисунок 3.1

### Розв'язування

У випадках розв'язування задач такого типу необхідно відразу спробувати визначити спосіб з'єднання окремих елементів, тобто які елементи з'єднані послідовно, а які паралельно. Нагадаємо, що при послідовному з'єднанні елементів по них протікає той самий струм і вони розташовані в одній вітці. Еквівалентний опір такої вітки дорівнює сумі опорів окремих елементів. Паралельно з'єднані вітки підімкнуті до однієї пари вузлів і до них прикладена одна й та ж напруга, а еквівалентна провідність такої групи віток дорівнює сумі провідностей окремих віток.

Провідність в колах постійного струму позначається літерою  $g$ , а повна комплексна провідність в колах синусоїдного струму літерою  $\underline{Y}$ .

В даній задачі опори  $R_2$  та  $R_3$  приєднані до однієї пари вузлів  $a$  і  $b$ , тому ці два паралельно з'єднані опори можна замінити одним еквівалентним (рис. 3.1, б)

$$R_{ab} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{12 \cdot 8}{12 + 8} = 4,8 \text{ Ом.}$$

Після такої заміни всі три опори будуть з'єднані послідовно, тому вхідний еквівалентний опір

$$R_{\text{ex}} = R_1 + R_{ab} + R_4 = 7 + 4,8 + 1,2 = 13 \text{ Ом.}$$

**3.2** Чотири однакових опори  $R$  з'єднані трьома різними способами (рис. 3.2). Для всіх схем, наведених на рисунку, визначити еквівалентні вхідні опори.

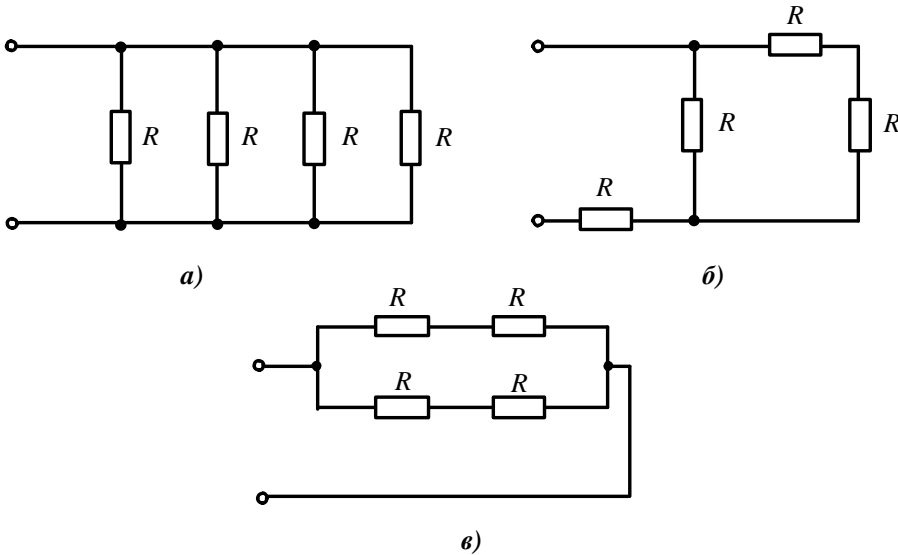


Рисунок 3.2

### Розв'язування

1. В схемі на рис. 3.2, *a* усі чотири опори з'єднані паралельно. За паралельного з'єднання еквівалентна вхідна провідність дорівнює сумі провідностей окремих опорів. Відтак

$$\frac{1}{R_{\text{ex}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{4}{R}. \text{ Звідки } R_{\text{ex}} = \frac{R}{4}.$$

2. В схемі рис. 3.2, *в* дві паралельні вітки, в кожній з яких два послідовно з'єднаних опори, тому  $R_{\text{ex}} = \frac{(R+R)(R+R)}{(R+R)+(R+R)} = R.$

3. Вхідний опір в схемі рис. 3.2, *б* знайти самостійно.

**3.3** Визначити вхідний опір електричного кола, наведеного на рис. 3.3, *a*, відносно вітки з е.р.с.  $E$ , якщо  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 18 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 6 \text{ Ом}$ .

### Розв'язування

В заданій схемі немає ні послідовно, ані паралельно з'єднаних опорів, тому потрібно скористатися перетворенням трикутника в еквівалентну зірку або зворотним перетворенням.

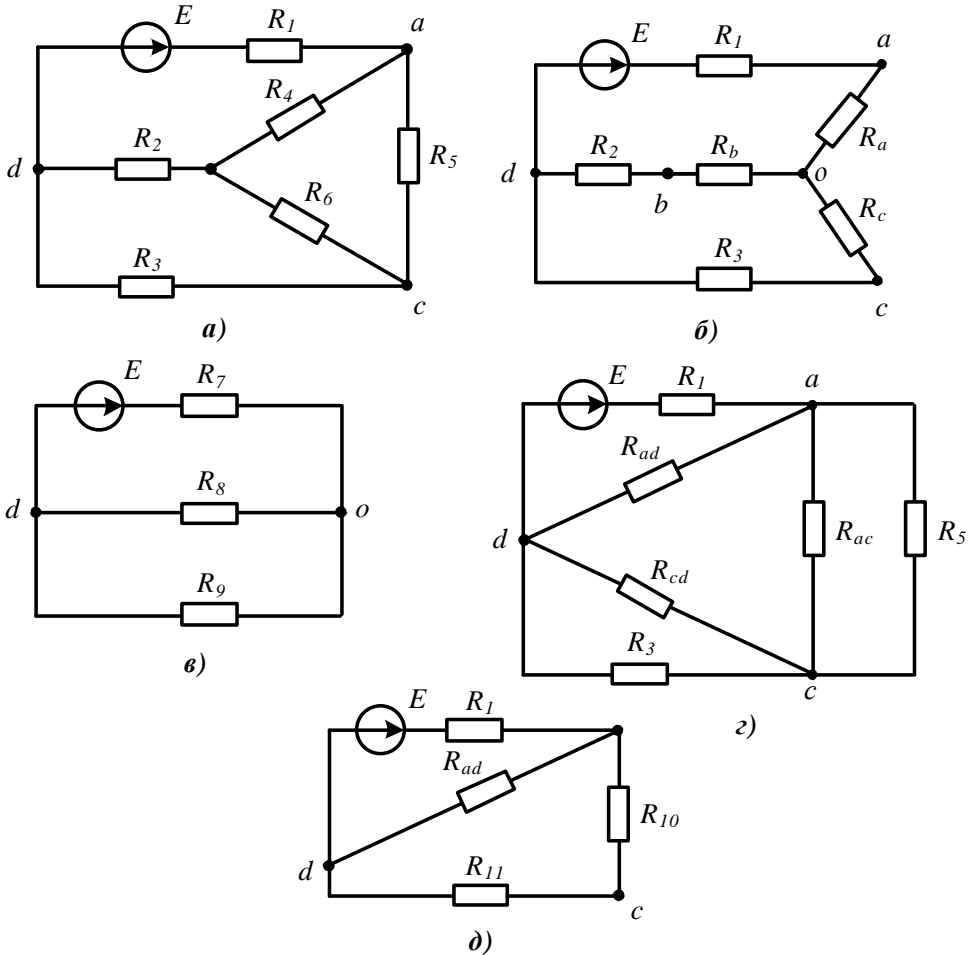


Рисунок 3.3

В даному випадку є кілька варіантів, наприклад, можна перетворити на зірку трикутники, що складаються з опорів  $R_2, R_3, R_6$  або з  $R_4, R_5, R_6$ . З іншого боку можна перетворити на трикутники зірки, що складаються з опорів  $R_2, R_4, R_6$  або з  $R_3, R_5, R_6$ .

1. Перетворимо трикутник, що складається з опорів  $R_4, R_5, R_6$ , в еквівалентну зірку (рис. 3.1, б). Опори променів отриманої зірки знаходимо за формулами:

$$R_a = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = 6 \text{ Ом},$$

$$R_b = \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 3 \text{ Ом},$$

$$R_c = \frac{R_5 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 2 \text{ Ом}.$$

З рис. 3.3, б видно, що тепер еквівалентне коло складається з послідовно з'єднаних опорів  $R_1$  і  $R_a$ ,  $R_2$  і  $R_b$ ,  $R_3$  і  $R_c$ . Об'єднавши їх, одержимо схему, показану на рис. 3.3, в, де  $R_7 = R_1 + R_a = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_8 = R_2 + R_b = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_9 = R_3 + R_c = 10 \text{ Ом}$ . Опори  $R_8$  і  $R_9$  з'єднані паралельно, а з  $R_7$  послідовно. Отже, вхідний опір відносно вівтки з е.р.с. буде дорівнювати

$$R_{\text{ex}} = R_7 + \frac{R_8 R_9}{R_8 + R_9} = 15 \text{ Ом}.$$

2. За другим варіантом перетворимо зірку, що складається з опорів  $R_2$ ,  $R_4$ ,  $R_6$  (див. рис. 3.3, а) в трикутник опорів  $R_{ab}$ ,  $R_{ac}$ ,  $R_{cd}$  (рис. 3.3, з):

$$R_{ad} = R_2 + R_4 + \frac{R_2 R_4}{R_6} = 46 \text{ Ом},$$

$$R_{cd} = R_2 + R_6 + \frac{R_2 R_6}{R_4} = 15,33 \text{ Ом},$$

$$R_{ac} = R_4 + R_6 + \frac{R_4 R_6}{R_2} = 39,43 \text{ Ом}.$$

Опори  $R_{ac}$  та  $R_5$ , а також опори  $R_{cd}$  та  $R_3$  з'єднані паралельно (рис. 3.3, з), тому

$$R_{10} = \frac{R_5 R_{ac}}{R_5 + R_{ac}} = 9,2 \text{ Ом},$$

$$R_{11} = \frac{R_3 R_{cd}}{R_3 + R_{cd}} = 5,26 \text{ Ом}.$$

Зі схеми на рис. 3.3, д видно, що вхідний опір

$$R_{\text{ex}} = R_1 + \frac{R_{ad} (R_{10} + R_{11})}{R_{ad} + R_{10} + R_{11}} = 15 \text{ Ом},$$

що збігається з попереднім результатом.

**3.4** В електричному колі постійного струму (рис. 3.4) задано:  $E_2 = 40 \text{ В}$ ,  $E_4 = 20 \text{ В}$ ,  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = R_4 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 8 \text{ Ом}$ ,  $I_5 = 5 \text{ А}$ .

Потрібно:

- 1) визначити числове значення е.р.с.  $E_1$ ;
- 2) скласти баланс потужностей;
- 3) побудувати потенціальну діаграму для контуру 1–2–а–3–b–1;
- 4) перетворити схему до одноконтурної.

### Розв'язування

1. Для знаходження е.р.с.  $E_1$  скористаємося законами Ома та Кірхгофа. Через

струм  $I_5$  за законом Ома знайдемо напругу між точками 2 і 3

$$U_{23} = I_5 R_5 = 40 \text{ В.}$$

Цю ж напругу можна виразити через параметри четвертої вітки

$$U_{23} = E_4 - I_4 R_4.$$

Звідси легко знаходимо струм  $I_4 = \frac{E_4 - U_{23}}{R_4} = -2 \text{ А.}$

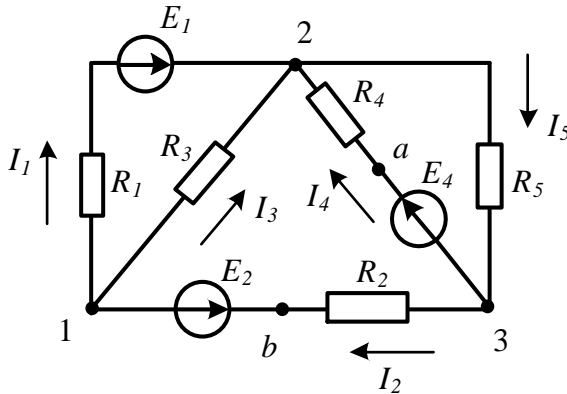


Рисунок 3.4

За першим законом Кірхгофа для вузла 3:  $I_5 = I_2 + I_4$ , тому струм

$$I_2 = I_5 - I_4 = 5 - (-2) = 7 \text{ А.}$$

Напруга  $U_{31} = E_2 + I_2 R_2 = 75 \text{ В.}$

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для замкнутого контуру, який складається з віток 2, 3 і 4:  $U_{23} + U_{31} + U_{12} = 0$ .

З нього отримаємо  $U_{12} = -115 \text{ В}$  і за законом Ома розраховуємо струм

$$I_3 = \frac{U_{12}}{R_3} = -11,5 \text{ А.}$$

За першим законом Кірхгофа для вузла 1 знаходимо струм

$$I_1 = I_2 - I_3 = 18,5 \text{ А.}$$

Через струм  $I_1$  та напругу  $U_{12}$  визначаємо невідому величину

$$E_1 = I_1 R_1 - U_{12} = 189 \text{ В.}$$

Отримані від'ємні значення окремих струмів вказують на те, що насправді вони протікають в протилежних напрямках, аніж це зображено на схемі.

2. Для складання балансу потужностей відомі всі величини. Знайдемо спочатку потужність усіх джерел, враховуючи, що коли напрями е.р.с. та струму в ній протилежні, то таке джерело працює в режимі споживача і потужність такого джерела треба брати зі знаком мінус.

Таким чином, сума потужностей джерел

$$\sum P_{\text{джер}} = P_1 + P_2 + P_4 = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_4 I_4 = 189 \cdot 18,5 - 40 \cdot 7 + 20 \cdot (-2) = 3176,5 \text{ Вт.}$$

Сума потужностей приймачів

$$\begin{aligned} \sum P_{np} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = \\ &= 18,5^2 \cdot 4 + 7^2 \cdot 5 + (-11,5)^2 \cdot 10 + (-2)^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 8 = 3176,5 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Отже, баланс виконується.

3. *Потенціальна діаграма* – це графік розподілу потенціалів точок вздовж окремих ділянок кола або контуру залежно від значення опору. Побудову такого графіка можна починати з будь-якої точки контуру, наприклад, з точки 1 (див. рис. 3.4), попередньо прийнявши потенціал цієї точки рівним нулю ( $\varphi_1 = 0$ ).

Будемо обходити зазначений в умові задачі контур за годинниковою стрілкою. Потенціал точки 2 нижче за потенціал точки 1 на величину напруги на опорі  $R_3$ , тому що струм тече від точки з більш високим потенціалом

$$\varphi_2 = \varphi_1 - I_3 R_3 = 0 - (-11,5) \cdot 10 = 115 \text{ В.}$$

Потенціал точки  $a$  вище за потенціал точки 2 і тому

$$\varphi_a = \varphi_2 + I_4 R_4 = 115 + (-2) \cdot 10 = 95 \text{ В.}$$

Потенціал точки 3 нижче за потенціал точки  $a$  на значення е.р.с.  $E_4$ , оскільки е.р.с. направлена до точки  $a$  і підвищує її потенціал відносно точки 3, тобто

$$\varphi_3 = \varphi_a - E_4 = 95 - 20 = 75 \text{ В.}$$

Аналогічно визначаємо потенціал точки  $b$ :  $\varphi_b = \varphi_3 - I_2 R_2 = 75 - 7 \cdot 5 = 40 \text{ В.}$

Щоб переконатися в правильності розрахунків, знайдемо потенціал точки 1 відносно точки  $b$ :  $\varphi_1 = \varphi_b - E_4 = 40 - 40 = 0$ .

Для побудови потенціальної діаграми на осі ординат відкладаємо потенціали точок, а на осі абсцис в послідовності, що відповідає напрямку обходу контуру, відкладаємо опори його віток (рис. 3.5).

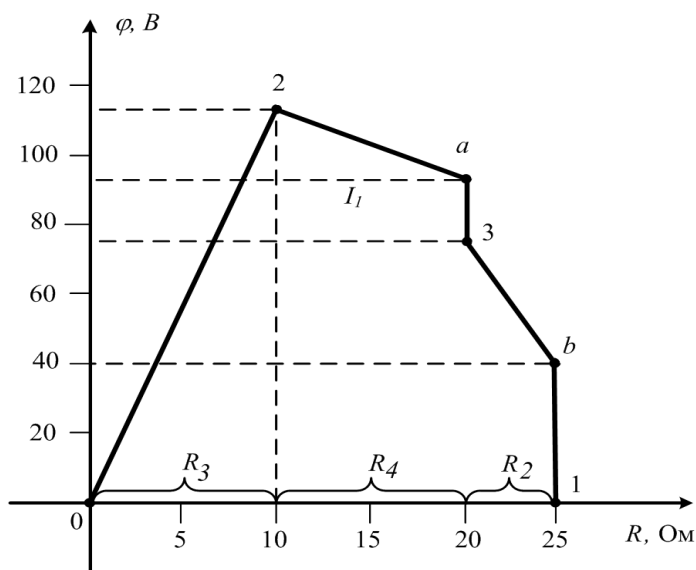


Рисунок 3.5



4. Щоб перетворити схему на одноконтурну (рис. 3.6), слід замінити паралельно з'єднані вітки 1 і 3, а також 4 і 5 еквівалентними вітками. Вітки 1 та 4 – активні, тобто містять джерела, тому перетворені вітки мають еквівалентні е.р.с.  $E_{1екв}$  і  $E_{2екв}$  та опори  $R_{1екв}$  і  $R_{2екв}$ , які визначаються за формулами:

$$E_{1екв} = \frac{E_1 g_1}{g_1 + g_3} = 135 \text{ В}; \quad E_{2екв} = \frac{E_4 g_4}{g_4 + g_5} = 8,889 \text{ В};$$

$$R_{1екв} = \frac{1}{g_1 + g_3} = 2,857 \text{ Ом}; \quad R_{2екв} = \frac{1}{g_4 + g_5} = 4,444 \text{ Ом}.$$

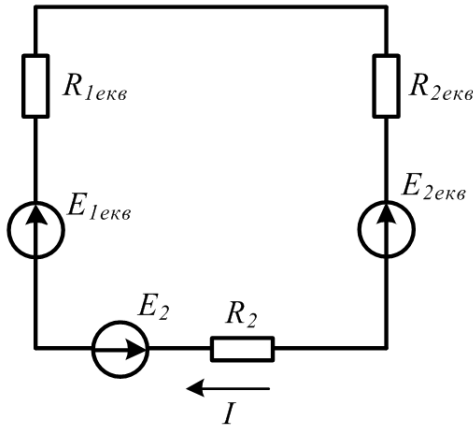


Рисунок 3.6

Перевіримо правильність розрахунку. До вітки 2 ніякі перетворення не застосовувались, тому струм в перетвореному контурі повинен таким залишатись, як і у вітці 2. Отже,

$$I_2 = \frac{E_{1екв} - E_{2екв} - E_2}{R_{1екв} + R_{2екв} + R_2} = \frac{135 - 8,888 - 40}{2,857 + 4,444 + 5} = 7 \text{ А}.$$

Під час розв'язування задач завжди бажано в той чи інший спосіб перевіряти результати виконаних обчислень. Найбільш поширеною є перевірка балансом потужностей.

**3.5** В електричному колі синусоїдного струму (рис. 3.7) знайти струми в усіх вітках методом перетворень і побудувати векторну діаграму струмів і напруг. Дано:  $U = 200 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 25 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C_3 = 150 \text{ мкФ}$ .

### Розв'язування

Застосовувати метод перетворень до розрахунку кіл синусоїдного струму можна так само, як і для кіл постійно струму, тільки опори віток слід записувати в комплексній формі.

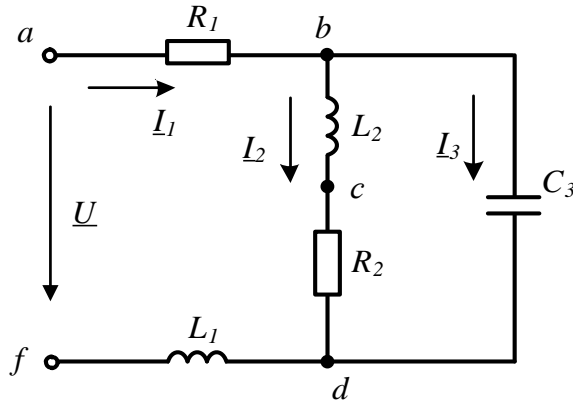


Рисунок 3.7

Знайдемо спочатку кутову частоту  $\omega = 2\pi = 314$  рад/с і реактивні опори віток

$$X_1 = X_{L_1} = \omega L_1 = 7,85 \text{ Ом}; \quad X_2 = X_{L_2} = \omega L_2 = 31,4 \text{ Ом};$$

$$X_3 = -X_{C_3} = -\frac{1}{\omega C_3} = -21,23 \text{ Ом}.$$

Знаходимо тепер повні комплексні опори цих віток

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 10 + j7,85 = 12,71e^{j38,13^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 15 + j31,4 = 34,8e^{j64,47^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = -j21,23 = 21,23e^{-j90^\circ} \text{ Ом}.$$

Опори  $\underline{Z}_2$  і  $\underline{Z}_3$  з'єднані паралельно. Замінімо їх одним еквівалентним опором

$$\underline{Z}_{bd} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 40,77e^{-j59,67^\circ} \text{ Ом}.$$

Отриманий еквівалентний опір  $\underline{Z}_{bd}$  з'єднаний з  $\underline{Z}_1$  послідовно, тому вхідний опір усього кола в комплексній формі

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{bd} = 10 + 40,77e^{-j59,67^\circ} = 41,03e^{-j41,79^\circ} \text{ Ом}.$$

За законом Ома комплексне діюче значення вхідного струму

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{200e^{j0^\circ}}{41,03e^{-j41,79^\circ}} = 4,874e^{j41,79^\circ} \text{ А}.$$

Початкова фаза напруги прийнята рівною нулю. Тому миттєве значення вхідного струму

$$i_1 = 4,874\sqrt{2} \sin(\omega t + 41,79^\circ) \text{ А}.$$

Щоб знайти струми  $I_2$  і  $I_3$ , слід визначити комплексну напругу між точками  $b$  і  $d$ , що дорівнює добутку струму  $\underline{I}_1$  на еквівалентний опір між цими точками, тоб-

то  $\underline{U}_{bd} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{bd} = 198,7 e^{-j17,88^\circ}$  В.

Тоді  $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{bd}}{\underline{Z}_2} = 5,71 e^{j82,35^\circ}$  А, а  $\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{bd}}{\underline{Z}_3} = 9,36 e^{j82,12^\circ}$  А.

Перевіримо правильність розрахунку, склавши баланс активних і реактивних потужностей.

Активна потужність джерела (в схемі одне джерело)

$$P_{дж} = UI_1 \cos \varphi = 200 \cdot 4,874 \cdot \cos(-41,79^\circ) = 726,6 \text{ Вт},$$

а його реактивна потужність

$$Q_{дж} = UI_1 \sin \varphi = 200 \cdot 4,874 \cdot \sin(-41,79^\circ) = -649,6 \text{ ВАр}.$$

Активна потужність споживачів

$$P_{cn} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 4,874^2 \cdot 10 + 5,71^2 \cdot 15 = 726,7 \text{ Вт},$$

їх реактивна потужність

$$\begin{aligned} Q_{cn} &= I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 + I_3^2 X_3 = \\ &= 4,874^2 \cdot 7,85 + 5,71^2 \cdot 31,4 - 9,36^2 \cdot 21,23 = -649,7 \text{ ВАр}. \end{aligned}$$

Тобто баланс активних та реактивних потужностей виконується, а це означає, що струми розраховані правильно.

Побудуємо суміщену векторну діаграму, коли вектори струмів і напруг знаходяться на одному рисунку і мають єдину точку відліку (рис. 3.8). Діаграму напруг будемо будувати топографічну, а струмів – променевою. В таких нескладних схемах побудову діаграми зручно починати зі струму паралельної, більш складнішої пасивної вітки. Вектори струмів і напруг слід відкладати в заздалегідь окремо обраному масштабі.

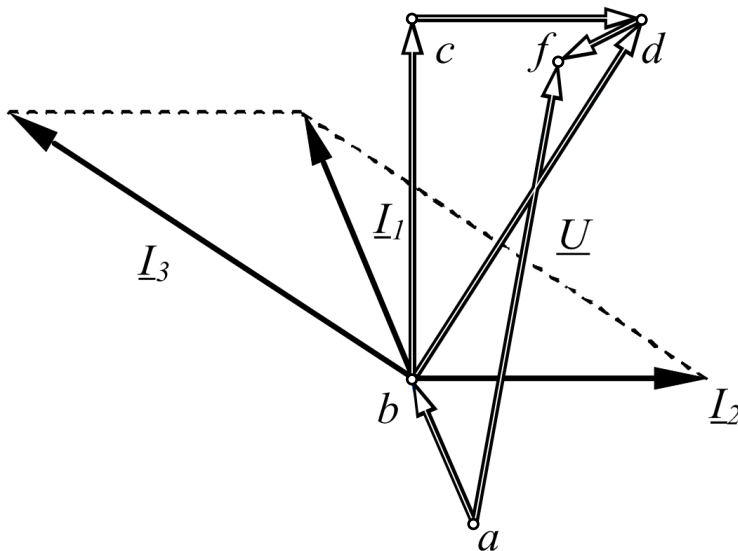


Рисунок 3.8

Відкладаємо (див. рис. 3.8) горизонтально вектор струму  $I_2$  і потім будуємо всі вектори напруг на елементах цієї вітки, починаючи з точки  $b$ . На ділянці  $bc$  знаходиться індуктивність, тому напруга на ній випереджає струм  $I_2$  на  $90^\circ$ . Відкладаючи в масштабі цю напругу ( $U_{bc} = I_2 X_{L2}$ ), отримуємо точку  $c$ . На ділянці  $cd$  напруга на активному опорі збігається за фазою зі струмом  $I_2$ . З'єднавши точки  $b$  і  $d$ , отримуємо напругу другої вітки. Оскільки друга і третя вітка з'єднані паралельно, то ця напруга є напругою й третьої вітки.

В складі третьої вітки тільки одна ємність, тому струм в ній випереджає напругу  $U_{bd}$  на  $90^\circ$ . Знаючи струми  $I_2$  і  $I_3$ , за першим законом Кірхгофа знаходимо струм  $I_1$  як суму струмів  $I_2$  і  $I_3$  (на діаграмі ця сума знаходиться за правилом паралелограма, тобто як сума векторів).

Будуємо тепер напруги першої вітки. На ділянці  $df$  розташована індуктивність, тому напругу на цій ділянці відкладаємо з точки  $d$  під кутом  $90^\circ$  до струму  $I_1$  (див. рис. 3.8). Складнішою є побудова вектора напруги на ділянці  $ab$ . Справа в тому, що цей вектор необхідно відкладати від точки  $a$ , яка поки що на діаграмі відсутня. Проте відомо, що вектор  $U_{ab}$  збігається за напрямком зі струмом  $I_1$  (на цій ділянці знаходиться активний опір) і спрямований в точку  $b$ . Знаючи ці умови, не важко провести в обраному масштабі цей вектор (див. рис. 3.8).

**3.6** В колі синусоїдного струму (рис. 3.9) з параметрами  $X_{C_1} = 10$  Ом,  $R_2 = R_3 = R_5 = 10$  Ом,  $X_{L_3} = 10$  Ом,  $X_{L_4} = 5$  Ом,  $X_{C_5} = 12$  Ом друга вітка споживає активну потужність  $P_2 = 160$  Вт.

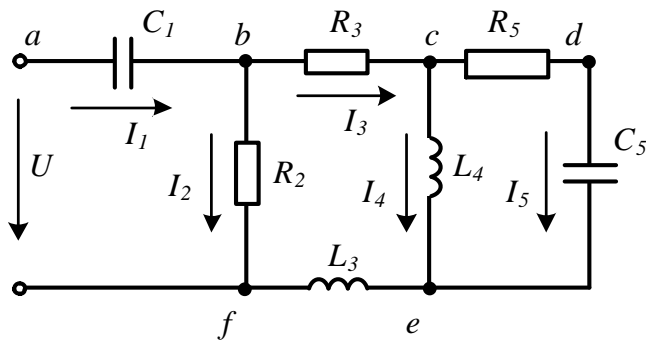


Рисунок 3.9

Знайти всі струми в колі, прикладену напругу та побудувати суміщену векторну діаграму струмів і напруг.

### Розв'язування

Для визначення вхідної напруги потрібно визначити вхідний опір кола, який знаходимо, виконуючи послідовно еквівалентні перетворення. (Обчислення комплексних опорів віток в цьому прикладі не наводяться, а також опущено проміжні числові розрахунки).

Опір між точками  $c$  і  $e$

$$\underline{Z}_{ce} = \frac{\underline{Z}_4 \underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \frac{jX_{L_4} (R_5 - jX_{C_5})}{jX_{L_4} + (R_5 - jX_{C_5})} = 6,4 e^{j74,8^\circ} = 1,68 + j6,18 \text{ Ом.}$$

Тоді в третій вітці будуть три послідовно з'єднані опори, тому

$$\underline{Z}_3 = R_3 + \underline{Z}_{ce} + jX_{L_3} = 11,68 + j16,18 = 19,96 e^{j54,17^\circ} \text{ Ом.}$$

Опір між точками  $b$  і  $f$

$$\underline{Z}_{bf} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{10 \cdot 19,96 e^{j54,17^\circ}}{10 + 11,68 + j16,18} = 7,37 e^{j17,44^\circ} = 7,04 + j2,21 \text{ Ом.}$$

Вхідний опір кола

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{bf} = 7,04 - j7,79 = 10,5 e^{-j47,9^\circ} \text{ Ом.}$$

Відома активна потужність другої вітки дозволяє знайти діюче значення струму цієї вітки

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = 4 \text{ А.}$$

Якщо прийняти початкову фазу струму  $I_2$  рівною нулю, то легко знайти комплексне діюче значення напруги між точками  $b$  і  $f$

$$\underline{U}_{bf} = I_2 \underline{Z}_2 = 40 \text{ В.}$$

Після цього послідовно знаходимо

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{bf}}{\underline{Z}_3} = 2,5 e^{-j54,17^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{U}_{ce} = \underline{I}_3 \underline{Z}_{ce} = 12,8 e^{j20,43^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{ce}}{\underline{Z}_4} = 2,56 e^{-j69,57^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_{ce}}{\underline{Z}_5} = 0,82 e^{j70,63^\circ} \text{ А.}$$

Тоді вхідний струм

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 5,17 - j1,62 = 5,42 e^{-j17,4^\circ} \text{ А,}$$

а прикладена напруга

$$\underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{ex} = 56,9 e^{-j65,3^\circ} \text{ В.}$$

Побудову векторної діаграми, як і в попередній задачі, зручно почати зі струму  $\underline{I}_5$  як струму паралельної більш складної та найбільш віддаленої від джерела вітки.

Потім, відклавши вектори напруг всіх елементів п'ятої вітки (точки  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ), будемо струм  $\underline{I}_4$ , який відстає від напруги  $\underline{U}_{ce}$  на  $90^\circ$ , тому що четверта вітка складається з однієї індуктивності.

Маючи на діаграмі струми  $I_5$  та  $I_4$  та застосовуючи перший закон Кірхгофа, будемо струм  $I_3$  та напруги  $U_{bc}$  і  $U_{ef}$ .

Вектор напруги на другій вітці  $U_{bf}$  знаходимо як суму напруг

$$U_{bf} = U_{bc} + U_{ce} + U_{ef}.$$

За відомою напругою  $U_{bf}$  відкладаємо струм  $I_2$ , який паралельний вектору  $U_{bf}$ .

Струм  $I_1$  знаходимо як суму струмів  $I_2$  та  $I_3$ .

Отримавши вектор струму  $I_1$ , будемо вектор напруги на ділянці  $ab$ , який визначає положення точки  $a$ .

Прикладена напруга  $U$  будеться як вектор між точками  $a$  та  $f$ .

Суміщені векторні діаграми струмів та напруг наведені на рис. 3.10.

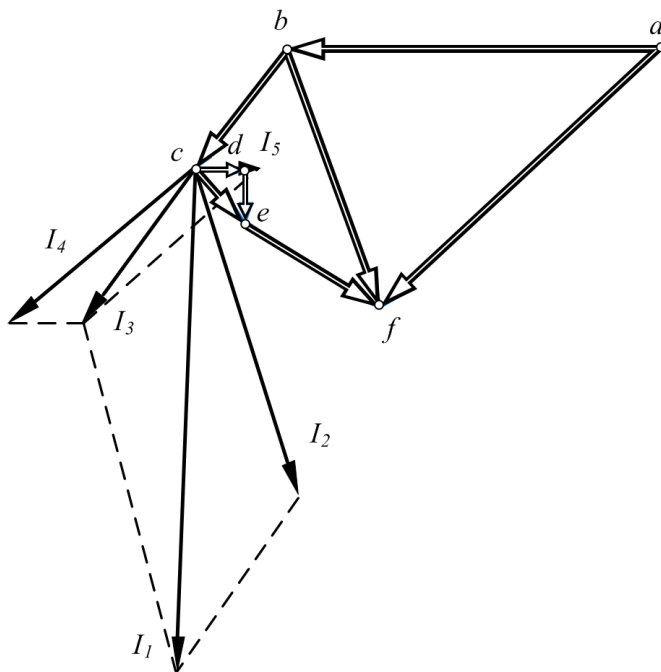


Рисунок 3.10

### Задачі для самостійного розв'язування

**3.7** До електричного кола постійного струму, в якому є два споживачі, прикладено напругу 300 В. Якими мають бути опори споживачів, якщо за умови їх послідовного з'єднання вхідний струм дорівнює 15 А, а за паралельного – 80 А?

**Відповідь:**  $R_1 = 15$  Ом;  $R_2 = 5$  Ом.

**3.8** Знайти потужність, яку видає джерело за замкнутого  $P_1$  і розімкнутого  $P_2$  ключа  $K$  (рис. 3.11), якщо параметри елементів кола такі:  $E = 60$  В,  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 12$  Ом,  $R_3 = 8$  Ом,  $R_4 = 15$  Ом,  $R_5 = 5$  Ом.

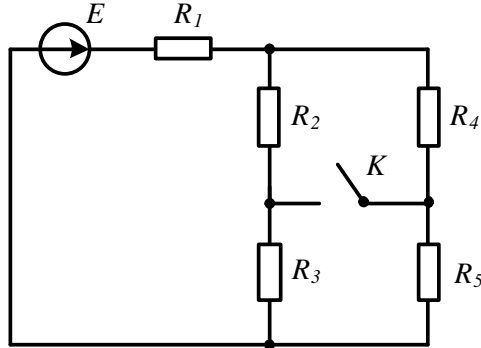


Рисунок 3.11

**Відповідь:**  $P_1 = 244,2$  Вт;  $P_2 = 240$  Вт.

**3.9** В електричному колі (рис. 3.12) діючі значення струмів  $I_1$  та  $I_2$  дорівнюють один одному, а струм  $I = \sqrt{3}I_1$ . Опір  $R_1 = 10$  Ом. Знайти опори  $R_2$  та  $X_C$ .

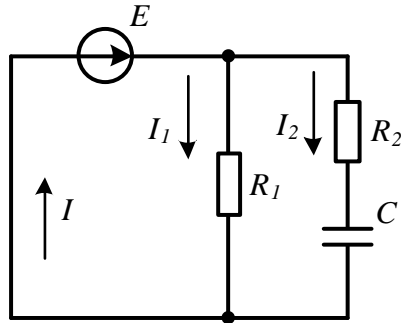


Рисунок 3.12

*Підказка.* Задачу зручніше розв'язувати, попередньо побудувавши векторну діаграму та застосувавши відповідні геометричні співвідношення між векторами струмів і напруг.

**Відповідь:**  $R_2 = 5$  Ом;  $X_C = 8,66$  Ом.

**3.10** Знайти еквівалентний опір електричного кола (рис. 3.13) між точками  $a$  і  $b$ , якщо параметри його елементів такі:  $R_1 = 1,2$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 2$  Ом,  $R_4 = 1,2$  Ом,  $R_5 = 3$  Ом,  $R_6 = 5$  Ом.

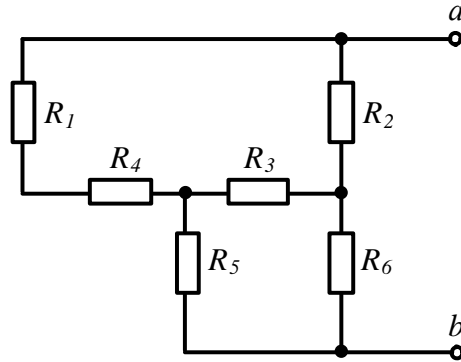


Рисунок 3.13

**Відповідь:**  $R_{ab} = 3 \text{ Ом}$ .

**3.11** В електричному колі (рис. 3.14) знайти вхідний опір та якісно побудувати суміщену векторну діаграму струмів та напруг, якщо  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 10 \text{ Ом}$ .

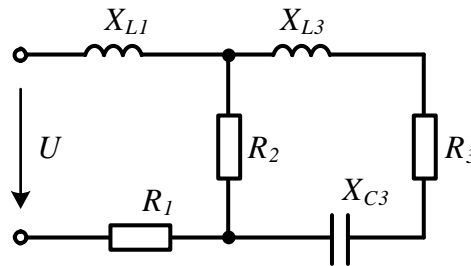


Рисунок 3.14

**Відповідь:**  $Z_{\text{вх}} = 9,59 e^{j16,4^\circ} \text{ Ом}$ .

**3.12** В електричному колі, що на рис. 3.15, е.р.с.  $e_1 = 200 \sin(\omega t - 75^\circ) \text{ В}$ ,  $e_3 = 120 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В}$ .

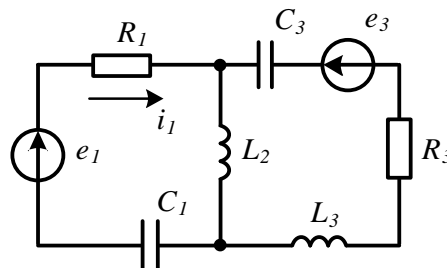


Рисунок 3.15



Параметри інших елементів кола:  $R_1 = 12 \text{ Ом}$ ,  $C_1 = 150 \text{ мкФ}$ ,  $L_2 = 50 \text{ мГн}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $C_3 = 80 \text{ мкФ}$ ,  $L_3 = 80 \text{ мГн}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ . Знайти струм  $i_1$  методом перетворень.

*Підказка.* Потрібно скористатися еквівалентним перетворенням активних паралельних віток.

**Відповідь:**  $i_1 = 10 \sin(\omega t - 58,3^\circ) \text{ А}$ .

**3.13** Параметри елементів кола синусоїдного струму, показано на рис. 3.16, такі:  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_1} = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_2} = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C_3} = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ . Яку напругу слід подати на вхід кола, щоб напруга між точками  $a$  і  $b$   $U_{ab}$  дорівнювала  $100 \text{ В}$ ?

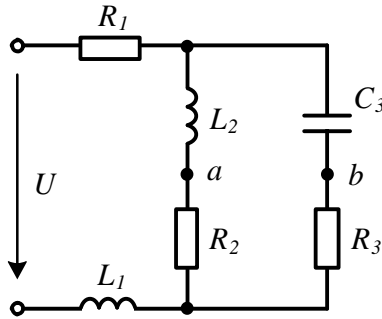


Рисунок 3.16

*Підказка.* Скласти рівняння за другим законом Кірхгофа для двох умовних контурів, що включають напругу  $U_{ab}$ . За допомогою цих рівнянь знайти струми в паралельних вітках, а потім вже і прикладену напругу.

**Відповідь:**  $158,9 \text{ В}$ .

**3.14** Знайти для кола (рис. 3.17) еквівалентні опори між точками  $a$  і  $b$ ,  $c$  і  $d$ , якщо  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = R_6 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 10 \text{ Ом}$ .

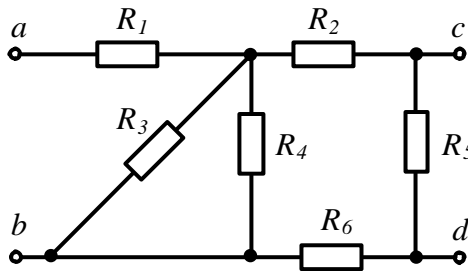


Рисунок 3.17

**Відповідь:**  $R_{ab} = 26 \text{ Ом}$ ;  $R_{cd} = 7,33 \text{ Ом}$ .

**3.15** В колі синусоїдного струму (рис. 3.18):  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_1} = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_2} = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_{C_3} = 3 \text{ Ом}$ . Активна потужність, споживана колом, 950 Вт. Знайти прикладену напругу і побудувати в масштабі суміщену векторну діаграму струмів та напруг.

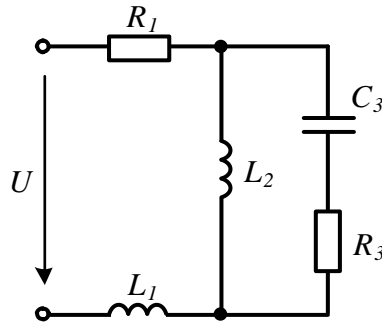


Рисунок 3.18

**Відповідь:**  $U = 110 \text{ В}$ .

**3.16** Електричне коло складається з послідовно з'єднаних ідеального конденсатора, опір якого на частоті  $f = 50 \text{ Гц}$  дорівнює  $100 \text{ Ом}$ , і реальної котушки, активний опір якої  $100 \text{ Ом}$ , а індуктивний  $200 \text{ Ом}$ . Ідеальний вольтметр (його внутрішній опір вважається нескінченним) під'єднаний до котушки і показує  $200 \text{ В}$ . Визначити покази реального вольтметра, якщо його внутрішній опір  $2000 \text{ Ом}$ .

**Відповідь:**  $194,6 \text{ В}$ .

**3.17** Знайти значення опору  $R_3$ , за якого струм  $I_2$  буде відставати від прикладеної напруги  $U$  на  $90^\circ$ , якщо  $X_{L_1} = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_2} = 11 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$  (рис. 3.19).

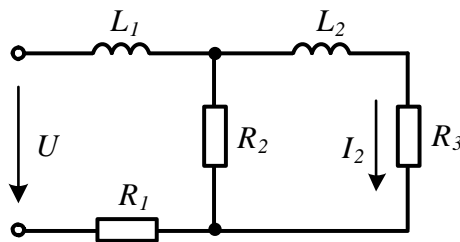


Рисунок 3.19

**Відповідь:**  $5 \text{ Ом}$ .

**3.18** В електричному колі, наведеному на рис. 3.20, потрібно визначити покази ватметра, якщо параметри елементів кола такі:  $R_1 = R_2 = R_3 = 5 \text{ Ом}$ ,

$X_{C_1} = 10 \text{ Ом}, X_{L_2} = 12 \text{ Ом}, X_{C_3} = 8 \text{ Ом}, U = 150 \text{ В}.$

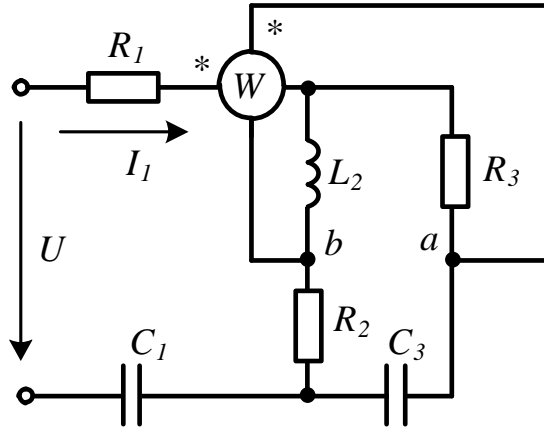


Рисунок 3.20

*Підказка.* Нагадаємо, що ватметр в цій схемі показує величину  $U_{ab} I_1 \cos \varphi$ , де  $\varphi$  – зсув фаз між  $U_{ab}$  та  $I_1$ .

**Відповідь:**  $R_{ab} = 26 \text{ Ом}; R_{cd} = 7,33 \text{ Ом}.$

**3.19** В електричному колі (рис. 3.21) в положенні  $b$  повзунка реостата вольтметр показав мінімальне значення напруги між точками  $a$  і  $b$ , що дорівнює  $30 \text{ В}$ . Визначити параметри котушки ( $R, L$ ), якщо  $R_1 = 5 \text{ Ом}, R_2 = 15 \text{ Ом}, R_3 = 6,5 \text{ Ом}, U = 200 \text{ В}, f = 50 \text{ Гц}.$

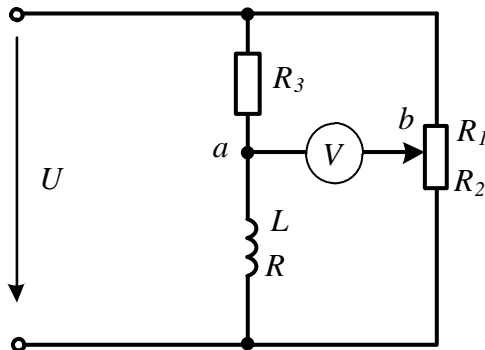


Рисунок 3.21

*Підказка.* Розв'язати задачу допоможе ретельно побудована векторна діаграма та прості геометричні співвідношення.

**Відповідь:**  $R = 12,62 \text{ Ом}; L = 36,5 \text{ мГн}.$

**3.20** В електричному колі (рис. 3.22) з параметрами  $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 8$  Ом,  $X_{L_1} = 5$  Ом,  $X_{L_2} = 6$  Ом,  $X_{L_3} = 20$  Ом,  $X_{C_2} = 40$  Ом,  $U_1 = 200$  В знайти відношення напруги  $U_2$  до напруги  $U_1$  і зсув фаз між ними. Побудувати в масштабі векторну діаграму і переконатися в правильності розрахунку.

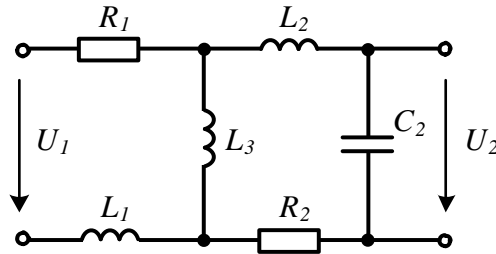


Рисунок 3.22

**Відповідь:**  $\frac{U_2}{U_1} = 1,006$ ;  $U_2$  відстає від  $U_1$  на кут  $10^\circ$ .

**3.21** В електричному колі синусоїдного струму (рис. 3.23) відомими є параметри елементів  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 12$  Ом,  $X_{L_1} = 6$  Ом,  $X_{C_2} = 15$  Ом,  $X_{L_3} = 5$  Ом, а також  $e_1 = 95 \sin(\omega t + 120^\circ)$  В,  $e_2 = 80 \sin(\omega t + 30^\circ)$  В,  $I_2 = 2 e^{j45^\circ}$  А. Знайти  $R_3$  і  $C_3$ . Скласти баланс потужностей.

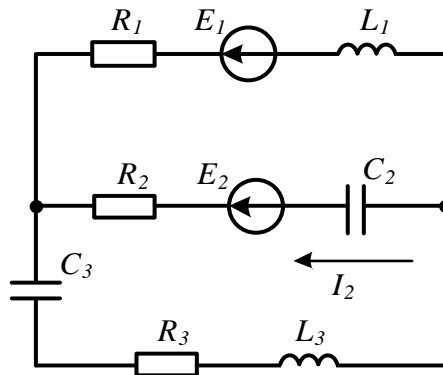


Рисунок 3.23

**Відповідь:**  $R_3 = 5,8$  Ом;  $X_{C_3} = 7,85$  Ом.

**3.22** Знайти струми в електричному колі, показаному на рис. 3.24, а також скласти баланс потужностей та побудувати суміщену векторну діаграму, якщо

параметри елементів цього кола такі:  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 12 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 20 \text{ Ом}$ ,  
 $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 15 \text{ Ом}$ ,  $U = 200 \text{ В}$ .

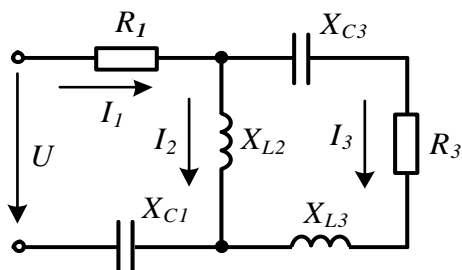


Рисунок 3.24

**Відповідь:**  $I_1 = 16,3e^{j28^\circ} \text{ А}$ ;  $I_2 = 17,5e^{-j15,3^\circ} \text{ А}$ ;  $I_3 = 12,5e^{j101,3^\circ} \text{ А}$ ;  
 $P = 2878 \text{ Вт}$ ;  $Q = -1530 \text{ ВАр}$ .

## Розділ 4

### МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

В даному розділі докладно розглянуто приклади розв'язування задач із застосуванням методів контурних струмів, вузлових потенціалів, еквівалентного генератора як для кіл постійного, так і синусоїдного струмів.

**4.1** В електричному колі постійного струму (рис. 4.1) з параметрами:  $E_1 = 20$  В,  $E_3 = 40$  В,  $E_4 = 10$  В,  $E_7 = 30$  В,  $R_1 = 12$  Ом,  $R_2 = 5$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом,  $R_4 = 20$  Ом,  $R_5 = 10$  Ом,  $R_6 = R_7 = R_9 = 10$  Ом,  $R_8 = 8$  Ом потрібно методом вузлових потенціалів знайти всі струми у вітках. Склавши баланс потужностей, перевірити правильність проведеного розрахунку.

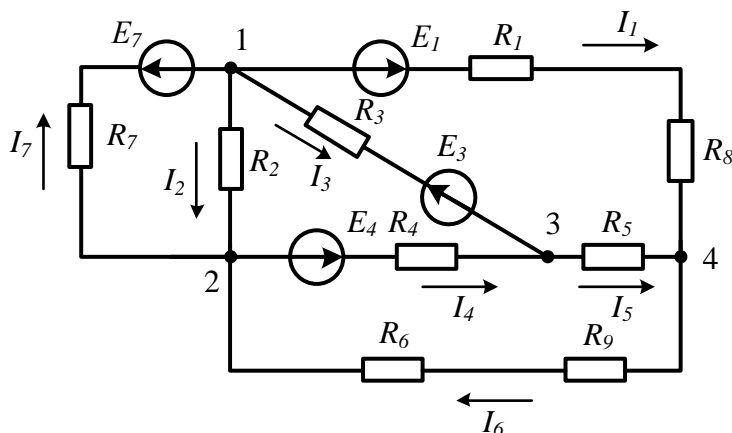


Рисунок 4.1

#### Розв'язування

Перш ніж скласти рівняння за методом вузлових потенціалів, слід переконатися, що в схемі відсутні ідеальні джерела е.р.с., які увімкнені між двома вузлами, та ідеальні джерела струму. Якщо такі елементи в схемі присутні, то порядок формування рівнянь буде дещо іншим. Його особливості будуть розглянуті в подальшому під час аналізу подібних прикладів.

В схемі чотири вузли, тому слід скласти систему з трьох рівнянь, оскільки потенціал одного вузла (будь-якого) можна прийняти рівним нулю. Цьому вузлу зручно присвоїти останній номер (в нашій схемі – це вузол 4). Отже,  $\varphi_4 = 0$ .

Система з *трьох* рівнянь для *будь-якої* схеми, що містить чотири вузли, незалежно від кількості і типу елементів, що входять до неї, завжди матиме вигляд:

$$\begin{cases} g_{11}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2 - g_{13}\varphi_3 = I_{11}, \\ -g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 - g_{23}\varphi_3 = I_{22}, \\ -g_{31}\varphi_1 - g_{32}\varphi_2 + g_{33}\varphi_3 = I_{33}. \end{cases}$$

Оскільки розглядається коло постійного струму, то в рівняння входить активна провідність  $g$ . В колах синусоїдного струму в такій системі використовується повна комплексна провідність  $\underline{Y}$ .

В даному випадку введено такі позначення:

$\varphi_k$  – потенціали вузлів;

$g_{kk}$  – власна провідність вузла, яка знаходиться як сума провідностей віток, приєднаних до даного вузла;

$g_{jk}$  – спільна провідність між вузлами  $j$  та  $k$ , рівна сумі провідностей віток, що з'єднують безпосередньо між собою вузли  $j$  та  $k$ . Зауважимо, що в лінійних колах виконується рівність  $g_{jk} = g_{kj}$ ;

$I_{kk}$  – вузловий струм вузла  $k$ . За умови відсутності джерел струму він знаходиться як алгебраїчна сума добутоків значень е.р.с. на провідність тих віток, в яких знаходяться ці е.р.с. і які під'єднані до вузла  $k$ .

Розглянемо докладно визначення коефіцієнтів першого рівняння. До вузла 1 приєднано чотири вітки, тому власна провідність першого вузла складається з чотирьох доданків  $g_{11} = g_1 + g_2 + g_3 + g_7$ .

Доданок  $g_k$  – це провідність  $k$ -ї вітки, яка є оберненою величиною до опору всієї вітки. В першій вітці два послідовно з'єднаних опори  $R_1$  та  $R_8$ , тому опір першої вітки  $R_1 + R_8$ , тоді її провідність  $g_1 = \frac{1}{R_1 + R_8}$ . Таким чином,

$$g_{11} = \frac{1}{R_1 + R_8} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_7} = 0,4 \text{ См.}$$

Вузли 1 та 2 безпосередньо з'єднують дві вітки – другу і сьому, тому спільна провідність між вузлами 1 і 2

$$g_{12} = g_2 + g_7 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7} = 0,3 \text{ См.}$$

Вузли 1 та 3 безпосередньо з'єднує лише одна – третя вітка. Тоді

$$g_{13} = g_3 = \frac{1}{R_3} = 0,05 \text{ См.}$$

В дійсності у вузловому струмі  $I_{11}$  має бути чотири складові, оскільки до вузла 1 приєднано чотири вітки, але в другій вітці відсутня е.р.с., тобто  $E_2 = 0$ , тому

$$I_{11} = -E_1g_1 + E_3g_3 - E_7g_7 = -2 \text{ А.}$$

Знаки доданків залежать від напрямку е.р.с. відносно вузла. Якщо е.р.с. направлена до вузла, то доданок входить в рівняння зі знаком «плюс», в протилежному випадку – зі знаком «мінус». Міркуючи аналогічним чином, знаходимо всі інші коефіцієнти та отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0,4\varphi_1 - 0,3\varphi_2 - 0,05\varphi_3 = -2; \\ -0,3\varphi_1 + 0,4\varphi_2 - 0,05\varphi_3 = 2,5; \\ -0,05\varphi_1 - 0,05\varphi_2 + 0,2\varphi_3 = -1,5. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримуємо:

$$\varphi_1 = -4,88 \text{ В}; \quad \varphi_2 = 1,548 \text{ В}; \quad \varphi_3 = -8,33 \text{ В}.$$

За відомими потенціалами вузлів можна знайти усі струми, довільно обравши їх напрямки (рис. 4.1). Якби в першій вітці була б відсутня е.р.с., то струм у ній визначався б за законом Ома, тобто як відношення різниці потенціалів вузлів 1 та 4 до опору вітки. За умови наявності в вітці е.р.с., що збігається за напрямком зі струмом, значення цієї е.р.с. додається до різниці потенціалів (закон Ома для активної вітки кола).

Таким чином,

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4 + E_1}{R_1 + R_8} = (\varphi_1 - \varphi_4 + E_1)g_1 = 0,756 \text{ А}.$$

Аналогічно знаходимо інші струми.

$$I_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)g_2 = -1,286 \text{ А}.$$

$$I_3 = (\varphi_1 - \varphi_3 - E_3)g_3 = -1,827 \text{ А}.$$

Е.р.с.  $E_3$  береться зі знаком мінус, тому що вона спрямована назустріч струму.

$$I_4 = (\varphi_2 - \varphi_3 + E_4)g_4 = 0,994 \text{ А}.$$

$$I_5 = (\varphi_3 - \varphi_4)g_5 = -0,833 \text{ А}.$$

$$I_6 = (\varphi_4 - \varphi_2)g_6 = -0,0774 \text{ А}.$$

$$I_7 = (\varphi_2 - \varphi_1 - E_7)g_7 = -2,36 \text{ А}.$$

Від'ємні значення струмів означають, що дійсний напрям струмів протилежний заданому.

Складемо баланс потужностей. Сума потужностей джерел

$$\begin{aligned} P_{дж} &= E_1 I_1 - E_3 I_3 + E_4 I_4 - E_7 I_7 = \\ &= 20 \cdot 0,756 - 40 \cdot (-1,827) + 10 \cdot 0,994 - 30 \cdot (-2,36) = 168,9 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Звертаємо увагу на те, що в третій та сьомій вітках струми течуть назустріч е.р.с., тому потужності цих джерел входять в рівняння зі знаком «мінус».

Сума потужностей споживачів

$$P_{сн} = I_1^2 (R_1 + R_8) + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 (R_6 + R_9) + I_7^2 R_7 = 168,8 \text{ Вт}.$$

Тобто розрахунок струмів виконано правильно.

**4.2** В колі постійного струму (рис. 4.2) з параметрами:  $E_7 = 20 \text{ В}$ ,  $E_2 = 40 \text{ В}$ ,  $E_5 = 50 \text{ В}$ ,  $J_3 = 4 \text{ А}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = R_6 = 20 \text{ Ом}$  знайти струми віток методом вузлових потенціалів.



## Розв'язування

Уважно вивчивши умову задачі, помічаємо, що в схемі в третій вітці діє ідеальне джерело струму, а між вузлами 4 та 3 – ідеальне джерело е.р.с. Ця обставина вносить істотні корективи в методику складання рівнянь.

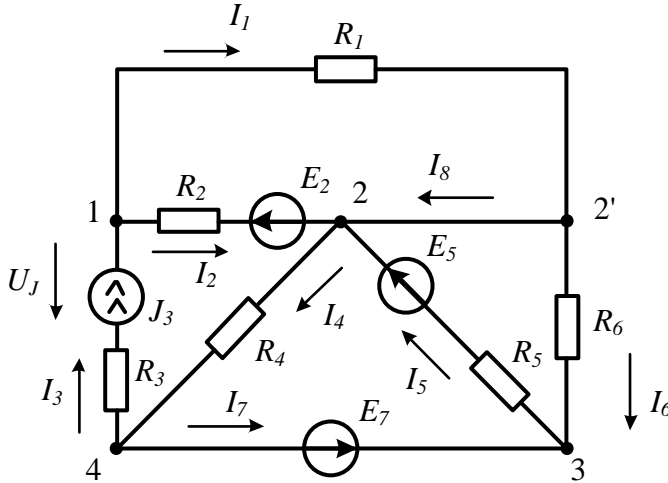


Рисунок 4.2

*По-перше*, внутрішній опір ідеального джерела струму нескінченний, тому провідність цієї вітки дорівнює нулю.

*По-друге*, струм в третій вітці дорівнює струму джерела струму і наразі відомий  $I_3 = J_3 = 4$  А.

*По-третьє*, внутрішній опір ідеальної е.р.с. дорівнює нулю, тому потенціал точки 3 вище потенціалу точки 4 на значення цієї е.р.с., тобто  $\varphi_3 = \varphi_4 + E_7$ . Якщо прийняти потенціал точки 4 рівним нулю, що цілком можливо, то потенціал вузла 3 стає заздалегідь відомим, а саме  $\varphi_3 = E_7$ .

Якщо в колі два будь-яких вузли з'єднані віткою, утвореною ідеальним джерелом е.р.с., то набагато зручніше складати рівняння, присвоївши цим вузлам останні номери.

Відзначимо ще одну особливість цієї схеми. Якщо бути точним, то в ній не чотири, а п'ять вузлів. Але вузли 2 і 2' мають однаковий потенціал (у вітці між ними відсутній опір), тому їх можна вважати одним вузлом 2. (Вузол 2' називають *усувним* вузлом).

Отже, встановлено, що в даній схемі  $\varphi_4 = 0$ ,  $\varphi_3 = E_7 = 20$  В. Тому залишаються невідомими потенціали двох вузлів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , для визначення яких потрібно скласти два рівняння. В загальному вигляді вони записуються таким чином:

$$\begin{cases} g_{11}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2 - g_{13}\varphi_3 = I_{11}, \\ -g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 - g_{23}\varphi_3 = I_{22}. \end{cases}$$

Знайдемо числові значення коефіцієнтів за правилами, розглянутими в попередньому прикладі.

$$g_{11} = g_1 + g_2 = 0,15 \text{ См.}$$

Цей коефіцієнт містить два доданки, хоча до вузла 1 приєднані три вітки, але у вітці 3 знаходиться ідеальне джерело струму і тому провідність цієї вітки дорівнює нулю.

$$g_{12} = g_1 + g_2 = 0,15 \text{ См,}$$

вузли 1 і 2 безпосередньо з'єднуються першою та другою вітками (нагадуємо, що вузли 2 і 2' об'єднали в один).

$$g_{13} = 0,$$

оскільки жодна вітка безпосередньо не з'єднує вузли 1 та 3.

$$I_{11} = E_2 g_2 + J_3 = 8 \text{ А,}$$

тобто за умови наявності в будь-якій вітці ідеального джерела струму до вузлового струму відповідного вузла додається струм джерела струму, з урахуванням його напрямку відносно цього вузла.

Аналогічно для другого рівняння:

$$g_{21} = g_{12} = 0,15 \text{ См;}$$

$$g_{22} = g_1 + g_2 + g_4 + g_5 + g_6 = 0,45 \text{ См;}$$

$$g_{23} = g_5 + g_6 = 0,1 \text{ См;}$$

$$I_{22} = -E_2 g_2 + E_5 g_5 = -1,5 \text{ А.}$$

Таким чином, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0,15\varphi_1 - 0,15\varphi_2 - 0 \cdot 20 = 8, \\ -0,15\varphi_1 + 0,45\varphi_2 - 0,1 \cdot 20 = -1,5. \end{cases}$$

Розв'язуємо її і знаходимо числові значення потенціалів вузлів

$$\varphi_1 = 81,67 \text{ В; } \varphi_2 = 28,33 \text{ В.}$$

Після розрахуємо струми у вітках

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) g_1 = 2,67 \text{ А;}$$

$$I_2 = (\varphi_1 - \varphi_2 - E_2) g_2 = 1,334 \text{ А;}$$

$$I_3 = J_3 = 4 \text{ А;}$$

$$I_4 = (\varphi_2 - \varphi_4) g_4 = 5,67 \text{ А;}$$

$$I_5 = (\varphi_3 - \varphi_2 + E_5) g_5 = 2,083 \text{ А;}$$

$$I_6 = (\varphi_2 - \varphi_3) g_6 = 0,42 \text{ А;}$$

Струми  $I_7$  і  $I_8$  можна знайти, лише скориставшись першим законом Кірхгофа

$$I_7 = I_5 - I_6 = 1,67 \text{ А;}$$

$$I_8 = I_1 - I_6 = 2,25 \text{ А.}$$

Складемо баланс потужностей. В колі чотири джерела, враховуючи джерело струму, тому сума потужностей джерел.

$$\sum P_{\text{дж}} = E_7 I_7 - E_2 I_2 + U_J J_3 + E_5 I_5.$$

В цій формулі  $U_J$  – напруга джерела струму, значення якої допоки невідома.

Знайти її можна, застосувавши другий закон Кірхгофа для контуру, в який входить ця напруга, наприклад, для контуру, що складається з другої, третьої та четвертої віток. Якщо обійти цей контур проти годинникової стрілки, отримаємо

$$U_J - I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_2 R_2 = E_2.$$

Звідки

$$U_J = E_2 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = 141,7 \text{ В.}$$

Таким чином,  $\sum P_{дж} = 651 \text{ Вт.}$

Сума потужностей приймачів  $\sum P_{пр} = \sum I_k^2 R_k = 651,4 \text{ Вт.}$

Отже, розрахунок струмів виконано правильно.

**4.3** Застосуємо метод вузлових потенціалів для розрахунку кіл синусоїдного струму. Основна особливість в цьому випадку тільки в тому, що всі параметри та обчислення необхідно здійснювати в *символічній (комплексній)* формі. Отож розглянемо задачу.

В електричному колі синусоїдного струму (рис. 4.3) потрібно знайти струми методом вузлових потенціалів. Параметри схеми такі:  $e_1 = 200 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ В}$ ,  $e_2 = 120 \sin \omega t \text{ В}$ ,  $e_3 = 150 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ В}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 18 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{C_1} = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{C_5} = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{C_6} = 19 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_3} = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_4} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_6} = 20 \text{ Ом}$ .

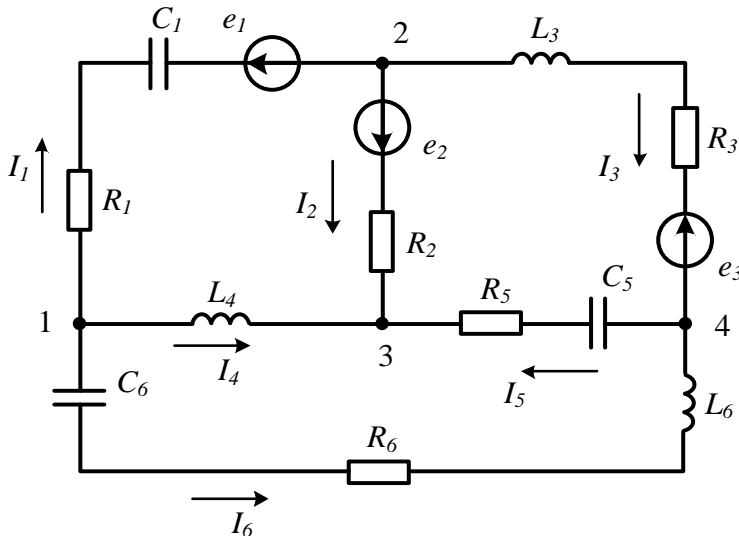


Рисунок 4.3

### Розв'язування

В схемі немає особливостей, пов'язаних з ідеальними джерелами, тому скла-

даємо систему трьох рівнянь в стандартній формі, приймаючи потенціал вузла 4 рівним нулю, тобто  $\varphi_4 = 0$ :

$$\begin{cases} \underline{Y}_{11}\varphi_1 - \underline{Y}_{12}\varphi_2 - \underline{Y}_{13}\varphi_3 = \underline{I}_{11}, \\ -\underline{Y}_{21}\varphi_1 + \underline{Y}_{22}\varphi_2 - \underline{Y}_{23}\varphi_3 = \underline{I}_{22}, \\ -\underline{Y}_{31}\varphi_1 - \underline{Y}_{32}\varphi_2 + \underline{Y}_{33}\varphi_3 = \underline{I}_{33}. \end{cases}$$

Знайдемо спочатку повні комплексні опори всіх віток:

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C_1} = 20 - j10 = 22,36e^{-j25,56^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 = 12 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_{L_3} = 8 + j15 = 17e^{j61,93^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_4 = jX_{L_4} = j8 = 8e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_5 = R_5 - jX_{C_5} = 18 - j10 = 20,59e^{-j29,05^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_6 = R_6 + j(X_{L_6} - X_{C_6}) = 10 + j1 = 10,05e^{j5,71^\circ} \text{ Ом},$$

а потім всі провідності та вузлові струми також в комплексній формі:

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6 = 0,181e^{-j39,4^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = \underline{Y}_1 = 0,0447e^{j26,56^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{13} = \underline{Y}_{31} = \underline{Y}_4 = 0,125e^{-j90^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0,154e^{-j11,93^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32} = \underline{Y}_2 = 0,0833 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{33} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 = 0,1615e^{-j38,9^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{I}_{11} = \underline{E}_1\underline{Y}_1 = 6,324e^{-j18,44^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{22} = -\underline{E}_1\underline{Y}_1 - \underline{E}_2\underline{Y}_2 + \underline{E}_3\underline{Y}_3 = 12,19e^{j143,27^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{33} = \underline{E}_2\underline{Y}_2 = 7,071 \text{ А}.$$

В умові задачі дано миттєві значення е.р.с. Для розрахунку вузлових струмів ці е.р.с. можна знайти або у вигляді комплексних діючих значень і тоді модулем цього комплексного числа стає амплітуда, поділена на  $\sqrt{2}$ , а його аргументом – початкова фаза, або у вигляді комплексних амплітудних значень.

І ще одне. Миттєве значення е.р.с.  $e_3$  записане через косинус, а перехід до комплексного зображення прийнято здійснювати, коли маємо синусоїдну функцію, тому необхідно виконати відповідне перетворення:

$$e_3 = 150\cos(\omega t + 30^\circ) = 150\sin(\omega t + 30^\circ + 90^\circ) \text{ В}.$$

Підставляючи числові коефіцієнти в систему рівнянь і розв'язуючи її, отри-

маємо комплексні діючі значення потенціалів

$$\underline{\varphi}_1 = 26e^{j7,09^\circ} \text{ В}; \quad \underline{\varphi}_2 = 78,04e^{j144,42^\circ} \text{ В}; \quad \underline{\varphi}_3 = 13,95e^{j53,61^\circ} \text{ В}.$$

Струми у вітках знаходимо через наразі відомі потенціали вузлів:

$$\underline{I}_1 = (\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_2 - \underline{E}_1) \underline{Y}_1 = 2,63e^{j127,3^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = (\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_3 + \underline{E}_2) \underline{Y}_2 = 3,05e^{j69^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = (\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_4 - \underline{E}_3) \underline{Y}_3 = 2,802e^{-j164,53^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_4 = (\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_3) \underline{Y}_4 = 2,384e^{-j114,8^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_5 = (\underline{\varphi}_4 - \underline{\varphi}_3) \underline{Y}_5 = 0,688e^{-j97,34^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_6 = (\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_4) \underline{Y}_6 = 2,59e^{j1,6^\circ} \text{ А}.$$

**4.4** Знайти струми у вітках методом контурних струмів, якщо задано параметри кола постійного струму (рис. 4.4):  $E_1 = 120 \text{ В}$ ,  $E_2 = 80 \text{ В}$ ,  $E_3 = 100 \text{ В}$ ,  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = R_7 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = R_5 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 12 \text{ Ом}$ .

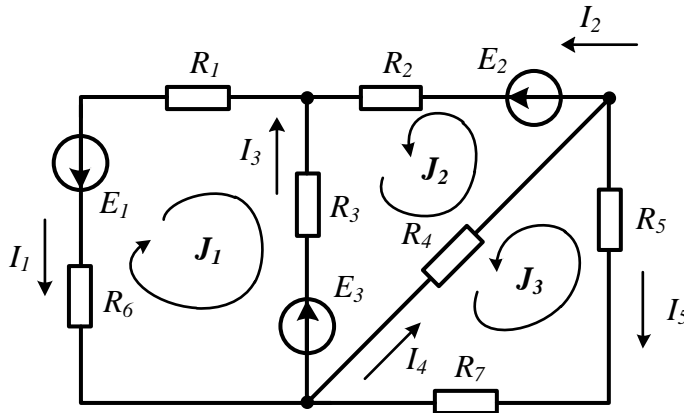


Рисунок 4.4

### Розв'язування

Зі схеми видно, що вона має *три незалежних* контури і в ній відсутні ідеальні джерела струму, наявність яких вносить певні особливості в складання рівнянь.

В заданій схемі *довільно* вибираємо три незалежні контури і *довільно* задаємо в них напрям контурних струмів (рис. 4.4). Після цього складаємо в загальному вигляді стандартну систему з трьох рівнянь за кількістю невідомих контурних струмів:

$$\begin{cases} R_{11}J_1 + R_{12}J_2 + R_{13}J_3 = E_{11}, \\ R_{21}J_1 + R_{22}J_2 + R_{23}J_3 = E_{22}, \\ R_{31}J_1 + R_{32}J_2 + R_{33}J_3 = E_{33}. \end{cases}$$

Пояснимо значення кожного коефіцієнта та способи їх знаходження.

$R_{kk}$  – власний опір контуру  $k$ , який дорівнює сумі всіх опорів, що входять в цей контур.

$R_{jk}$  – спільний опір контурів  $j$  та  $k$ , що дорівнює сумі опорів віток, що входять одночасно в ці контури. Ці опори можуть бути різних знаків залежно від напрямку контурних струмів в них. Якщо контурні струми в спільному опорі спрямовані однаково, то цей спільний опір додатний, в іншому випадку він від'ємний.

$E_{kk}$  – контурна е.р.с. контуру  $k$ , яка знаходиться як алгебраїчна сума е.р.с., що входять до контуру  $k$ . Якщо е.р.с. збігається за напрямом з контурним струмом, вона записується зі знаком плюс.

Аналогічно з методом вузлових потенціалів в лінійних колах виконується рівність  $R_{jk} = R_{kj}$ .

Якщо розв'язується задача для кіл синусоїдного струму, то всі величини повинні записуватися в *комплексній формі*.

Розглянемо детально визначення коефіцієнтів першого рівняння.

В першому контурі є три опори. Тому

$$R_{11} = R_1 + R_3 + R_6 = 30 \text{ Ом.}$$

Третя вітка належить одночасно першому та другому контурам, тому опори цієї вітки будуть спільними для цих контурів. Контурні струми  $J_1$  і  $J_2$  в цій вітці збігаються за напрямом, тому опір  $R_{12}$  позитивний. Таким чином,

$$R_{12} = R_{21} = R_3 = 10 \text{ Ом.}$$

Контури 1 та 3 не мають спільних віток, тому  $R_{13} = R_{31} = 0$ .

В першому контурі діють дві е.р.с., причому обидві вони не збігаються за напрямом з контурним струмом, тому

$$E_{11} = -E_1 - E_3 = -220 \text{ В.}$$

Міркуючи подібним чином, знаходимо інші коефіцієнти системи рівнянь:

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 = 40 \text{ Ом;}$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_4 = -20 \text{ Ом;}$$

$$R_{33} = R_4 + R_5 + R_7 = 50 \text{ Ом;}$$

$$E_{22} = E_2 - E_3 = -20 \text{ В;}$$

$$E_{33} = 0.$$

Відтак отримуємо систему з числовими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} 30J_1 + 10J_2 = -220, \\ 10J_1 + 40J_2 - 20J_3 = -20, \\ -20J_2 + 50J_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є

$$J_1 = -7,95 \text{ А; } J_2 = 1,86 \text{ А; } J_3 = 0,744 \text{ А.}$$

Розрахувавши контурні струми, знаходимо струми у вітках, враховуючи, що ці струми є алгебраїчною сумою контурних струмів, що протікають у відповідній вітці.

В першій вітці протікає тільки один контурний струм  $J_1$ , протилежно спря-

мований до струму вітки  $I_1$ , тому

$$I_1 = -J_1 = 7,95 \text{ A.}$$

В другій вітці також тільки один контурний струм, який збігається за напрямком зі струмом вітки, тому

$$I_2 = J_2 = 1,86 \text{ A.}$$

В третій вітці два контурних струми  $J_1$  і  $J_2$ , причому обидва протилежні за напрямком до струму вітки, тому

$$I_3 = -J_1 - J_2 = 6,09 \text{ A.}$$

Подібним чином знаходимо струм

$$I_4 = J_2 - J_3 = 1,116 \text{ A}$$

і струм

$$I_5 = -J_3 = -0,744 \text{ A.}$$

**4.5** Скласти систему рівнянь за методом контурних струмів для кола, зображеного на рис. 4.5.

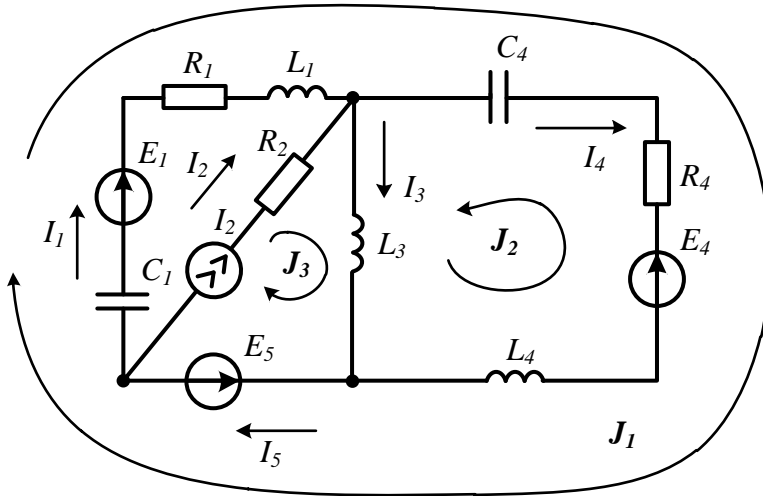


Рисунок 4.5

### Розв'язування

В даному колі синусоїдного струму є ідеальне джерело напруги, що сполучає два вузли, та ідеальне джерело струму в одній з віток. Контурні струми обчислювати не будемо, а лише складемо рівняння за методом контурних струмів і вкажемо на особливості, які пов'язані з наявністю ідеальних джерел та способом їх вмикання.

Струм в другій вітці дорівнює струму джерела струму, тому незалежні контури, а, отже, і контурні струми зручно вибирати так, щоб в другій вітці проходить тільки один контурний струм, направлений так само, як і струм джерела струму. Іншими словами, ця вітка повинна входити тільки до одного контуру, струм якого зручніше позначати останнім номером (див. рис. 4.5). В такий спосіб контурний струм  $J_3$  стає відомим і рівним струму джерела струму, тому залишається визна-

чити лише два невідомих контурних струми. Для цього складаємо два рівняння за аналогією з попередньою задачею:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}J_1 + \underline{Z}_{12}J_2 + \underline{Z}_{13}J_3 = \underline{E}_{11}, \\ \underline{Z}_{21}J_1 + \underline{Z}_{22}J_2 + \underline{Z}_{23}J_3 = \underline{E}_{22}. \end{cases}$$

Знайдемо числові коефіцієнти системи рівнянь.

Власний опір першого контуру знаходимо як суму всіх *комплексних* опорів цього контуру

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_4} + R_4 + j\omega L_4 - j\frac{1}{\omega C_1}.$$

Контури 1 та 2 мають одну спільну вітку – четверту, тому взаємним опором цих контурів є опір четвертої вітки. Контурні струми в цій вітці  $J_1$  і  $J_2$  протилежні, тому це опір додатний

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\left(-j\frac{1}{\omega C_4} + R_4 + j\omega L_4\right).$$

Контури 1 та 3 мають одну спільну вітку – п'яту, в якій відсутні опори, тому

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = 0.$$

В першому контурі діють три е.р.с., тому, враховуючи їх напрямки, контурна е.р.с.

$$\underline{E}_{11} = \underline{E}_1 - \underline{E}_4 - \underline{E}_5,$$

а в другому тільки одна, тому  $\underline{E}_{22} = \underline{E}_4$ .

Решта коефіцієнтів:

$$\underline{Z}_{22} = R_4 + j\omega L_4 - j\frac{1}{\omega C_4} + j\omega L_3;$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = j\omega L_3.$$

Спільний опір контурів 2 та 3 додатний, тому що контурні струми в третій вітці збігаються за напрямом.

Після того як будуть знайдені контурні струми, знаходяться струми у вітках:

$$\underline{I}_1 = \underline{J}_1;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{J}_2 = \underline{J}_3;$$

$$\underline{I}_3 = \underline{J}_2 + \underline{J}_3;$$

$$\underline{I}_4 = \underline{J}_1 - \underline{J}_2;$$

$$\underline{I}_5 = \underline{J}_1 + \underline{J}_3.$$

Як видно з розглянутого прикладу, ідеальне джерело е.р.с., що сполучає два вузли, не впливає на процедуру складання рівнянь, а наявність ідеального джерела струму у вітці скорочує на одиницю число рівнянь і потребує більш уважного підходу до вибору та нумерації незалежних контурів.

**4.6** Знайти струм  $I_7$  в задачі 4.2 методом еквівалентного генератора.

### Розв'язування

Метод еквівалентного генератора застосовується найчастіше тоді, коли необхідно знайти струм тільки однієї вітки. В цьому випадку все коло відносно віт-



ки  $k$ , в якій протікає струм  $I_k$ , замінюється генератором з е.р.с.  $E_{екв}$  і внутрішнім опором  $R_{екв}$  (для кола синусоїдного струму  $Z_{екв}$ ) і тоді струм  $I_k$  знаходиться за виразом

$$I_k = \frac{E_{екв}}{R_{екв} + R_k},$$

де  $R_k$  – опір вітки  $k$ , а опір  $R_{екв}$  визначається як вхідний опір пасивного двополюсника з боку вітки  $k$ .

Для знаходження  $R_{екв}$  зручно скористатися схемою *пасивного* двополюсника, яку отримуємо, видаляючи з вихідної схеми джерела енергії. Видалені джерела замінюються їх внутрішніми опорами. При цьому слід пам'ятати, що внутрішній опір ідеального джерела напруги дорівнює нулю, а ідеального джерела струму – нескінченності (рис. 4.6, а). Після видалення джерела струму третя вітка виявляється розімкнутою, тому через неї струм протікати не буде і опір  $R_3$  не впливає на значення вхідного опору. З цієї ж причини опори  $R_1$  і  $R_2$  будуть з'єднані послідовно і замкнуті накоротко віткою, що з'єднує вузли 2 і 2'. Таким чином, струм через ці опори не протікає і вхідний опір пасивного двополюсника від них не залежить.

В результаті одержимо  $R_{екв} = R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = 15$  Ом.

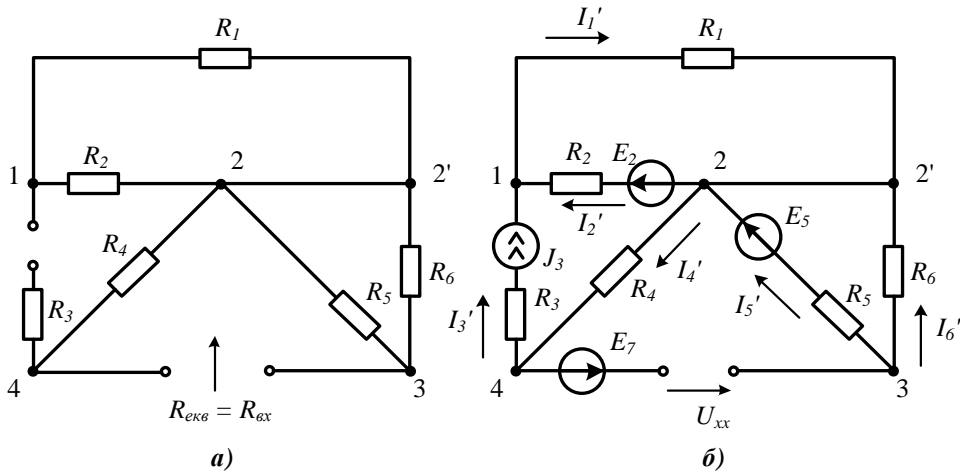


Рисунок 4.6

Е.р.с. еквівалентного генератора дорівнює напрузі холостого ходу  $U_{xx}$ , яка з'являється у вихідній схемі між затискачами вітки, в якій протікає шуканий струм за умови розмикання цієї вітки (див. рис. 4.6, б). Зауважимо, що напруга холостого ходу повинна мати той самий напрямок, що і шуканий струм  $I_7$ . Знайти цю напругу можна, склавши рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, що містить четверту, п'яту та сьому вітки:

$$U_{xx} + I_4' R_4 + I_5' R_5 = E_7 + E_5.$$

Звідси маємо

$$U_{xx} = E_7 + E_5 - I_4' R_4 - I_5' R_5.$$

Знайдемо струми  $I'_4$  та  $I'_5$ .

Після розриву сьомої вітки опори  $R_3, R_4$  і джерело струму  $J_3$  виявилися з'єднаними послідовно, тому струм в цих елементах один і той самий та дорівнює струму джерела струму, тобто  $I'_4 = J_3 = 4$  А.

З цієї ж причини елементи  $R_5, R_6$  і е.р.с.  $E_5$  також виявилися з'єднаними послідовно з тим самим струмом в них. Якщо для контуру 3 – 2 – 2' скласти рівняння за другим законом Кірхгофа

$$I'_5 R_5 - I'_6 R_6 = E_5$$

і врахувати, що  $I'_5 = -I'_6$ , то отримаємо

$$I'_5 = \frac{E_5}{R_5 + R_6} = 1,25 \text{ А.}$$

Підставляючи отримані значення струмів у вираз для напруги холостого ходу, яка дорівнює значенню е.р.с. еквівалентного генератора, маємо:

$$U_{xx} = E_{екв} = 25 \text{ В.}$$

Оскільки  $R_7 = 0$ , то  $I_7 = \frac{E_{екв}}{R_{екв}} = 1,67 \text{ А.}$

**4.7** Знайти струм  $I_8$  в задачі 4.2 методом еквівалентного генератора.

### Розв'язування

Шуканий струм визначаємо за виразом  $I_8 = \frac{E_{екв}}{R_{екв} + R_8}$ .

Щоб знайти  $R_{екв}$ , визначимо вхідний опір пасивного двополюсника відносно восьмої вітки (рис. 4.7, а).

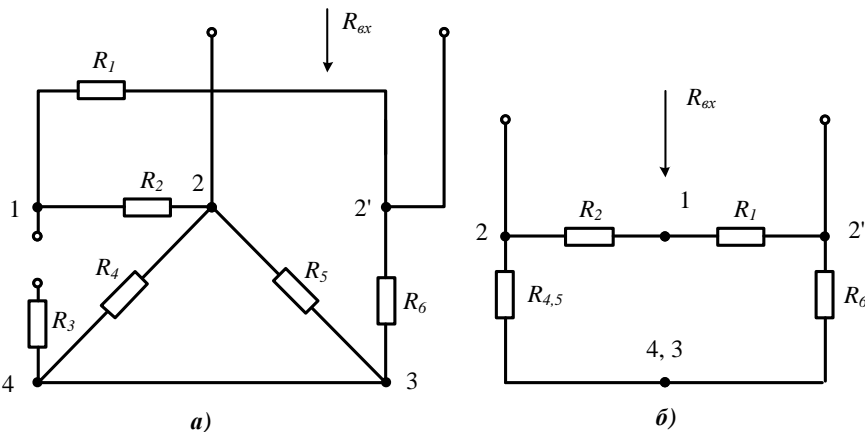


Рисунок 4.7

З рисунка видно, що після видалення джерела струму третя вітка розмикається, опори  $R_4$  і  $R_5$  з'єднуються паралельно, а опори  $R_1$  і  $R_2$  – послідовно.

Після незначних перетворень схема набуває вигляду, показаного на

рис. 4.7, б. З схеми видно, що

$$R_{\text{ex}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_{45} + R_6)}{(R_1 + R_2) + (R_{45} + R_6)},$$

де  $R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 4 \text{ Ом.}$

Тоді  $R_{\text{ex}} = 13,3 \text{ Ом.}$

Для визначення  $E_{\text{екв}}$  знайдемо  $U_{xx}$  в місці розриву восьмої вітки (рис. 4.8). Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру 2 –  $U_{xx}$  – 2' – 3 – 2

$$-U_{xx} + I'_6 R_6 + I'_5 R_5 = E_5.$$

Звідси  $U_{xx} = -E_5 + I'_5 R_5 + I'_6 R_6.$

Для знаходження струмів  $I'_5$  та  $I'_6$  скористаємося методом вузлових потенціалів, попередньо зазначивши, що після розриву восьмої вітки опори  $R_1$  і  $R_6$  з'єднані послідовно і виконується рівність  $I'_6 = I'_1.$

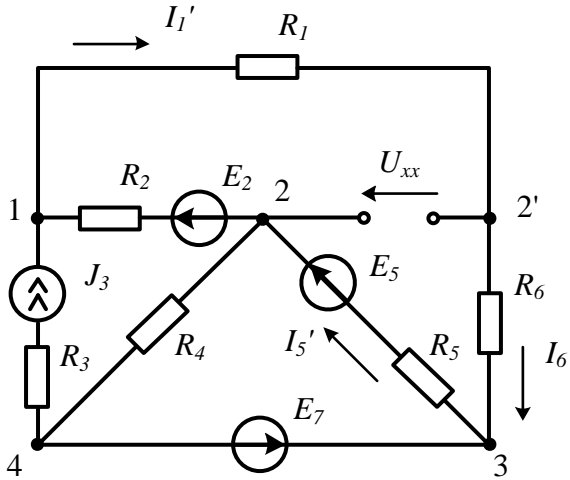


Рисунок 4.8

В схемі чотири вузли, діє ідеальне джерело струму та ідеальне джерело е.р.с. увімкнене між вузлами 4 і 3. Якщо прийняти потенціал точки 4 рівним нулю  $\varphi_4 = 0$ , то потенціал точки 3 буде рівний е.р.с.  $E_7$ :  $\varphi_3 = E_7$ . Тоді в схемі невідомими залишаються потенціали двох вузлів  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$ .

Складемо відповідну систему рівнянь

$$\begin{cases} g_{11}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2 - g_{13}\varphi_3 = I_{11}, \\ -g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 - g_{23}\varphi_3 = I_{22}, \end{cases}$$

і знайдемо її коефіцієнти:

$$g_{11} = \frac{1}{R_1 + R_6} + \frac{1}{R_2} = 0,125 \text{ См};$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{1}{R_2} = 0,1 \text{ См}; \quad g_{13} = g_{31} = \frac{1}{R_1 + R_6} = 0,025 \text{ См};$$

$$g_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = 0,35 \text{ См}; \quad g_{23} = g_{32} = \frac{1}{R_5} = 0,05 \text{ См};$$

$$I_{11} = \frac{E_2}{R_2} + J_3 = 8 \text{ А}; \quad I_{22} = -\frac{E_2}{R_2} + \frac{E_5}{R_5} = -1,5 \text{ А}.$$

Розв'язуємо отриману систему

$$\begin{cases} 0,125\varphi_1 - 0,1\varphi_2 - 0,025 \cdot 20 = 8, \\ -0,1\varphi_1 + 0,35\varphi_2 - 0,05 \cdot 20 = -1,5 \end{cases}$$

і знаходимо шукані потенціали обох вузлів

$$\varphi_1 = 86,67 \text{ В}; \quad \varphi_2 = 23,33 \text{ В}.$$

Тоді струми у вітках кола

$$I'_6 = I'_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_1 + R_6} = 1,667 \text{ А};$$

$$I'_5 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_5}{R_5} = 2,333 \text{ А}.$$

Після цього знаходимо напругу холостого ходу, а отже і е.р.с. еквівалентного генератора  $E_{екв} = U_{xx} = 30 \text{ В}$ , та струм  $I_8 = \frac{E_{екв}}{R_{екв}} = 2,25 \text{ А}$ .

В знаменнику останнього виразу тільки опір  $R_{екв}$ , оскільки  $R_8 = 0$ .

### Задачі для самостійного розв'язування

**4.8** Записати в загальному вигляді рівняння за методом контурних струмів, отримати вирази для визначення струмів у вітках та скласти рівняння балансу потужностей для кола, показаного на рис. 4.9. Всі е.р.с. і струми у вітках синусоїдні.

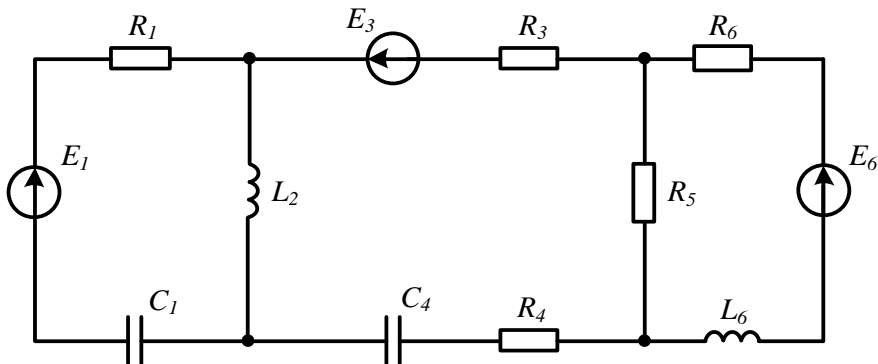


Рисунок 4.9

**4.9** Визначити струм  $I$  методом вузлових потенціалів (рис. 4.10), якщо  $E = 20$  В,  $E_2 = 28$  В,  $J_5 = 0,6$  А,  $R_1 = R_5 = 10$  Ом,  $R_4 = 20$  Ом,  $R_2 = 40$  Ом,  $R_3 = 25$  Ом.

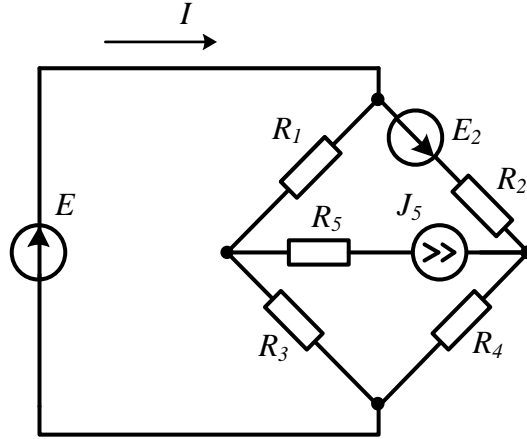


Рисунок 4.10

**Відповідь:**  $I = 1,6$  А.

**4.10** Знайти струм  $I$  в задачі 4.9 методом контурних струмів.

**4.11** В електричному колі, наведеному на рис. 4.11, знайти методом вузлових потенціалів струм  $I$ , що протікає через е.р.с.  $E$ . Відомо, що  $E = 80$  В,  $R_1 = 15$  Ом,  $R_2 = R_5 = 10$  Ом,  $E_1 = 40$  В,  $J_7 = 3,3$  А,  $R_3 = 10$  Ом,  $R_4 = R_6 = 5$  Ом,  $R_7 = 1$  Ом.

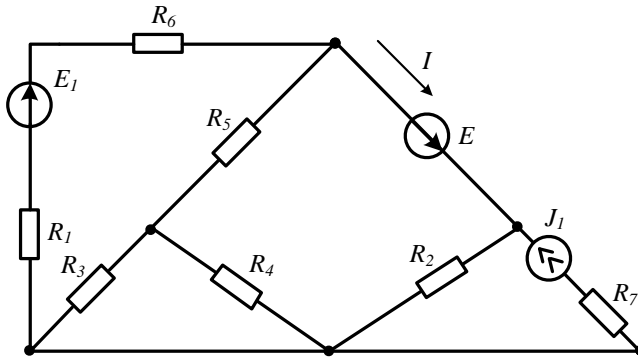


Рисунок 4.11

**Відповідь:**  $I = 3,5$  А.

**4.12** Скласти в загальному вигляді систему рівнянь за методом контурних струмів, записати вирази для визначення струмів у вітках та скласти рівняння балансу потужностей в колі (рис. 4.12).

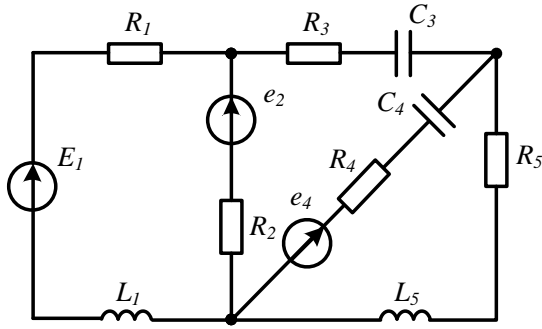


Рисунок 4.12

**4.13** Знайти струм  $I_3$  (рис. 4.13) методом еквівалентного генератора, якщо  $E_3 = 19,6$  В,  $J_2 = 2$  А,  $R_1 = 8$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 5,2$  Ом,  $R_4 = 12$  Ом.

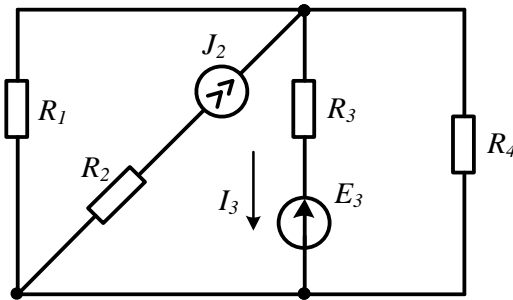


Рисунок 4.13

*Відповідь:*  $I_3 = -1$  А.

**4.14** Знайти струм  $I_2$  (рис. 4.14) методом еквівалентного генератора, якщо  $E_2 = 6$  В,  $J_1 = 2,5$  А,  $R_1 = R_5 = 10$  Ом,  $R_2 = 12$  Ом,  $R_3 = R_4 = 20$  Ом.

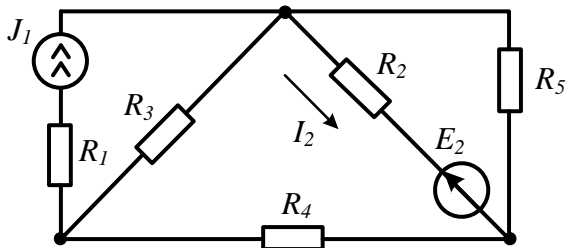


Рисунок 4.14

*Відповідь:*  $I_2 = 0,2$  А.

**4.15** Знайти струм  $I_2$  в задачі 4.13 методом контурних струмів.

**4.16** В електричному колі постійного струму (рис. 4.15), де опори  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ , за замкнутого ключа  $K$  струм  $I_1 = 2 \text{ А}$ , струм  $I_2 = 3 \text{ А}$ . Якщо розімкнути ключ  $K$ , то напруга  $U_{ab} = 19,2 \text{ В}$ . Яким буде струм  $I_2$  за умови замкнутого ключа  $K$ , якщо змінити полярність е.р.с.  $E_1$ ?

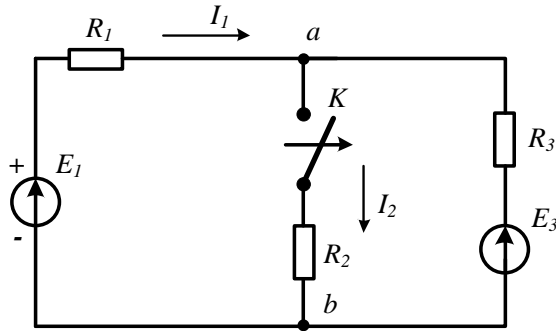


Рисунок 4.15

**Відповідь:**  $I_2 = -0,75 \text{ А}$ .

**4.17** Яким має бути в електричному колі опір навантаження  $Z_H$  у разі споживання ним максимальної активної потужності, якщо  $X_C = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 20 \text{ Ом}$ ,  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $e_1 = 120 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В}$ ,  $e_2 = 90 \sin \omega t \text{ В}$  (рис. 4.16). Знайти зазначену потужність.

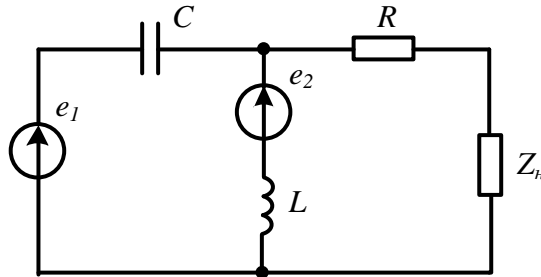


Рисунок 4.16

*Підказка.* Замінити коло відносно опору навантаження еквівалентним генератором та скористатись умовою максимальної передачі активної потужності, а саме:  $Z_H = Z_{екв}$ .

**Відповідь:**  $Z_H = 10 + j20 \text{ Ом}$ ;  $P_{\max} = 551 \text{ Вт}$ .

**4.18** В колі (рис. 4.17) постійного струму вітка з опорами і ключами підключена до активного двополюсника. За розімкнутих ключів  $K_1$  і  $K_2$  струм в цій вітці  $I = 1,2 \text{ А}$ . За замкнутого ключа  $K_1$  і розімкнутого  $K_2$  струм в зазначеній вітці  $I = 1,4 \text{ А}$ . Визначити, яким буде значення цього струму, коли ключ  $K_1$  буде розімкнутий, а ключ  $K_2$  замкнутий? Розв'язати задачу для випадку, коли  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ , а  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ .

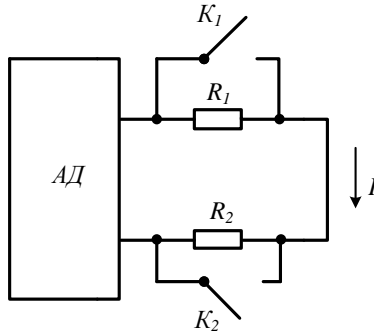


Рисунок 4.17

**Відповідь:**  $I = 2,1 \text{ A}$ .

**4.19** Яким повинен бути опір навантаження  $Z_H$ , щоб в нього надходила максимальна активна потужність, якщо  $X_C = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 20 \text{ Ом}$ ,  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $e_1 = 80 \sin \omega t \text{ В}$ ,  $e_2 = 60 \sin(\omega t + 40^\circ) \text{ В}$  (рис. 4.18). Знайти цю потужність.

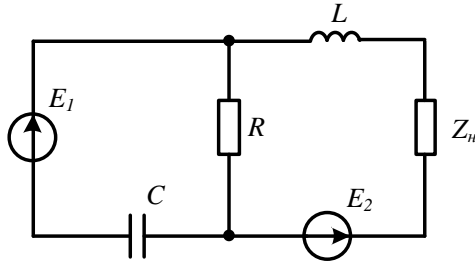


Рисунок 4.18

**Відповідь:**  $Z_H = 8 - j16 \text{ Ом}$ ;  $P_{\max} = 103 \text{ Вт}$ .

**4.20** В електричному колі (рис. 4.19) знайти опір  $R_3$ , за яким струм  $I_2$  відстає від е.р.с.  $E$  на  $90^\circ$ , якщо  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_2 = 15 \text{ Ом}$ .

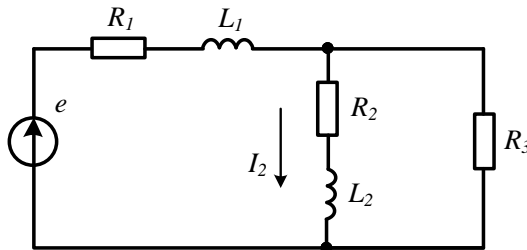


Рисунок 4.19

*Підказки.* Потрібно застосувати будь-який метод розрахунку та записати струм у вигляді  $I_2 = \frac{E}{Z_0} = \frac{E}{R_0 + jX_0}$ , де  $R_0$  і  $X_0$  виражаються через параметри кола. Опір  $R_3$  визначити з умови:  $R_0 = 0$ .

**Відповідь:**  $R_3 = 7,5 \text{ Ом}$ .



## Розділ 5

### РЕЗОНАНСНІ ЯВИЩА

Під час розв'язування задач на цю тему слід обов'язково використовувати основну особливість роботи схеми в резонансному режимі – вхідний опір кола за умови резонансу суто активний, отже, прикладені напруга і вхідний струм збігаються за фазою. В багатьох випадках розв'язанню таких задач допомагає попередня якісна побудова векторних діаграм.

**5.1** Коло знаходиться в стані резонансу (рис. 5.1). Знайти параметри кола ( $R$ ,  $X_L$ ,  $X_C$ ), якщо  $I_1 = 4$  А,  $I_2 = 5$  А. Активна потужність, яку віддає джерело в коло  $P = 120$  Вт.

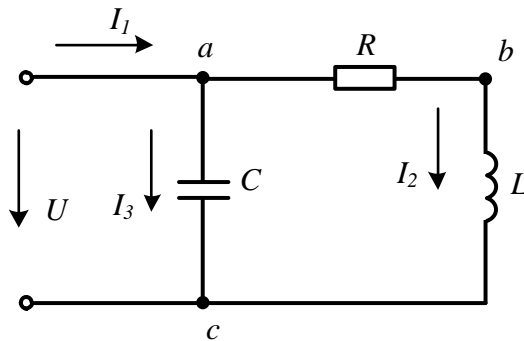


Рисунок 5.1

#### Розв'язування

1. Визначимо спочатку двома способами параметри другої вітки.

а) Оскільки коло працює в резонансному режимі, то прикладені напруга  $U$  і струм  $I_1$  збігаються за фазою ( $\varphi_1 = 0$ ), тому, знаючи активну потужність, знаходимо відразу прикладену напругу  $U = \frac{P}{I_1} = 30$  В.

В колі активна потужність витрачається на активному опорі  $R$  і тому  $R = \frac{P}{I_2^2} = 4,8$  Ом. Друга і третя вітки з'єднані паралельно і підімкнуті безпосередньо до вхідної напруги  $U$ , тому повний опір другої вітки можна знайти за законом Ома  $Z_2 = \frac{U}{I_2} = 6$  Ом. Звідси легко знаходимо, що  $X_L = \sqrt{Z_2^2 - R^2} = 3,6$  Ом.

б) В зв'язку з тим, що джерело віддає активну потужність тільки в другу вітку, то з виразу  $P = UI_2 \cos \varphi_2$  знаходимо зсув фаз між прикладеною напругою  $U$  і струмом  $I_2$ :

$$\varphi_2 = \arccos \frac{P}{UI_2} = 36,87^\circ.$$

Цей кут є аргументом повного комплексного опору  $\underline{Z}_2$ , модуль якого дорівнює 6 Ом, тому

$$\underline{Z}_2 = 6e^{j36,87^\circ} = 4,8 + j3,6 \text{ Ом}.$$

Дійсна частина цього комплексного числа є активним опором, а уявна – реактивним, тобто  $R = 4,8$  Ом,  $X_L = 3,6$  Ом.

2. Опір ємності також можна знайти у різний спосіб.

а) Вхідний опір кола суто *активний* (режим резонансу) і складається з паралельно з'єднаних опорів другої і третьої віток, тому

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = R_{\text{ex}} = \frac{(R + jX_L)(-jX_C)}{R + jX_L - jX_C} = \frac{X_L X_C - jRX_C}{R + jX_L - jX_C}.$$

Перепишемо цю рівність у вигляді

$$R_{\text{ex}} R + jR_{\text{ex}}(X_L - X_C) = X_L X_C - jRX_C.$$

Комплексні числа рівні між собою, коли одночасно рівні їх дійсні та уявні частини, тому  $R_{\text{ex}} R = X_L X_C$ , звідси  $X_C = \frac{R_{\text{ex}} R}{X_L}$ .

Відомо, що  $R_{\text{ex}} = Z_{\text{ex}} = \frac{U}{I_1} = 7,5$  Ом, тому  $X_C = 10$  Ом.

б) Якщо прийняти, що початкова фаза прикладеної напруги дорівнює нулю, то нулю дорівнюватиме і початкова фаза струму  $I_1$ , а початкова фаза струму  $I_2$  буде  $\alpha_2 = -36,87^\circ$ , оскільки  $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2$ .

За першим законом Кірхгофа у символічній формі можна знайти струм  $\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 4 - 5e^{-j36,87^\circ} = j3$  А. Звідки опір ємності  $X_C = \frac{U}{I_3} = 10$  Ом.

3. Знайдемо струм  $I_3$ , використовуючи векторну діаграму (рис. 5.2).

Діаграму будуюмо якісно, тобто не дотримуючись масштабу, оскільки не відомо струм  $I_3$ , але враховуємо, що струм  $I_1$  і прикладена напруга збігаються за фазою. Оскільки струм  $I_3$  випереджає прикладену напругу на кут  $90^\circ$ , а отже, і струм  $I_1$ , то трикутник  $adk$  прямокутний (див. рис. 5.2). Гіпотенуза  $dk$  в обраному масштабі дорівнює струму  $I_2$ . Отже,  $I_3 = \sqrt{I_2^2 - I_1^2} = 3$  А. Тоді  $X_C = \frac{U}{I_3} = 10$  Ом.

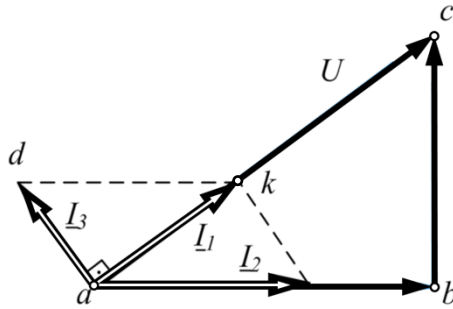


Рисунок 5.2

4. За умови резонансу джерело не передає реактивну потужність в коло, тому реактивна потужність ємності дорівнює реактивній потужності індуктивності, тобто  $I_2^2 X_L = I_3^2 X_C$ . В зв'язку з тим, що  $I_3 = \frac{U}{X_C}$ , то  $X_C = \frac{U^2}{I_2^2 X_L} = 10 \text{ Ом}$ .

**5.2** Визначити значення індуктивності  $L$ , за яким в колі (рис. 5.3) матиме місце резонанс на частоті  $\omega_0 = 1000 \text{ рад/с}$ , якщо  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $C = 125 \text{ мкФ}$ .

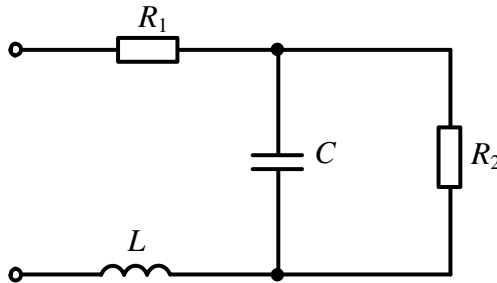


Рисунок 5.3

### Розв'язування

Такого роду задачі розв'язуються, використовуючи властивість кола в резонансному режимі – реактивна складова вхідного опору дорівнює нулю.

Запишемо в комплексній формі вхідний опір заданого кола

$$\underline{Z}_{ex} = R_1 + jX_L + \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C}$$

і перетворимо отриманий вираз так, щоб розділити його окремо на уявну і дійсну частини. Спочатку позбудемося уявності в знаменнику дробу, помноживши чисельник і знаменник на комплексне число  $(R_2 + jX_C)$ , спряжене до знаменника.

Тоді

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = R_1 + jX_L + \frac{R_2(-jX_C)(R_2 + jX_C)}{R_2^2 + X_C^2} = R_1 + \frac{R_2 X_C^2}{R_2^2 + X_C^2} + j \left( X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2} \right)$$

Прирівнявши уявну частину до нуля, отримуємо рівняння для знаходження шуканої величини

$$X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2} = 0$$

або після підстановки числових значень

$$X_L = \frac{6^2 \cdot \frac{1}{1000 \cdot 125 \cdot 10^{-6}}}{6^2 + \left( \frac{1}{1000 \cdot 125 \cdot 10^{-6}} \right)^2} = 2,88 \text{ Ом,}$$

звідси  $L = \frac{X_L}{\omega} = 2,88 \text{ мГн.}$

**5.3** Якими мають бути параметри кола  $R, L, C$  (рис. 5.4), аби на резонансній частоті  $\omega_0 = 10^6$  рад/с, при напрузі на вході  $U = 10$  В і споживаній потужності  $P = 1$  Вт отримати на ємності напругу  $U_{C_0} = 1000$  В?

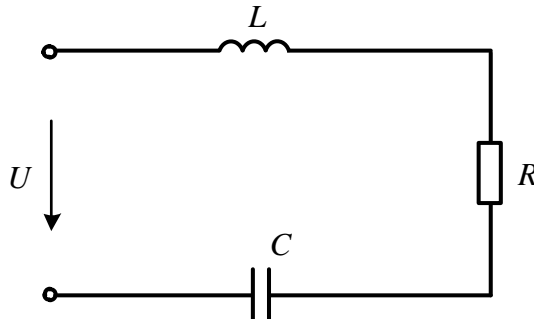


Рисунок 5.4

### Розв'язування

В режимі резонансу струм в послідовному контурі набуває максимального значення і дорівнює  $I_0 = \frac{U}{R}$ , напруги на реактивних елементах рівні між собою і

перевищують прикладену в  $Q$  разів, де  $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{U_{C_0}}{U}$  – добротність контуру.

Потужність, що витрачається в активному опорі контуру  $P = I^2 R$  або  $P = \frac{U^2}{R}$ , звідки  $R = \frac{U^2}{P} = 100$  Ом, а струм в контурі  $I_0 = \sqrt{\frac{P}{R}} = 0,1$  А.

Опір ємності  $X_C = \frac{U_{C_0}}{I_0} = 10 \text{ кОм}$ , а власне ємність  $C = \frac{1}{\omega X_C} = 10^{-10} \text{ Ф}$  або

$C = 100 \text{ пФ}$ .

Опір індуктивності та ємності в послідовному контурі при резонансі рівні поміж собою  $X_L = X_C = 10 \text{ кОм}$ .

Тоді індуктивність контуру  $L = \frac{X_L}{\omega} = 10^{-2} \text{ Гн} = 10 \text{ мГн}$ .

**5.4** За якого опору ємності в колі (рис. 5.5) спостерігатиметься резонанс і які при цьому будуть струми у вітках, якщо  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 40 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_3} = 30 \text{ Ом}$ ,  $U = 120 \text{ В}$ ?

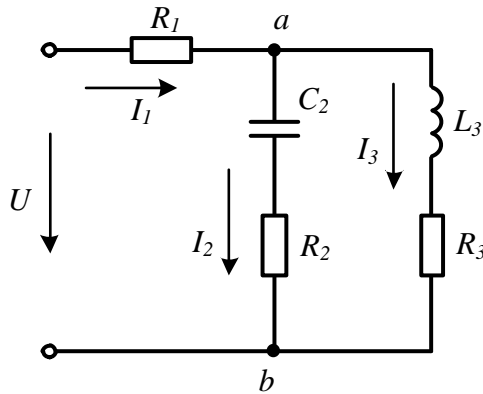


Рисунок 5.5

### Розв'язування

Умовою резонансу, як відомо, є рівність нулю уявної частини повного комплексного значення вхідного опору або вхідної провідності. Коли вітки з ємністю та індуктивністю з'єднані паралельно, то зручніше використовувати умову резонансу для провідності, тим більше що опір  $R_1$  не впливає на значення уявної складової вхідної провідності. Повні комплексні провідності паралельних віток

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2 - jX_{C_2}} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_{C_2}^2} + j \frac{X_{C_2}}{R_2^2 + X_{C_2}^2},$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{R_3 + jX_{L_3}} = \frac{R_3}{R_3^2 + X_{L_3}^2} - j \frac{X_{L_3}}{R_3^2 + X_{L_3}^2}.$$

Уявна складова повної комплексної провідності всього кола, яка дорівнює сумі уявних складових провідностей обох віток, при резонансі повинна бути рівна нулю, тому

$$\frac{X_{C_2}}{R_2^2 + X_{C_2}^2} - \frac{X_{L_3}}{R_3^2 + X_{L_3}^2} = 0.$$

Звідси отримуємо квадратне рівняння для знаходження  $X_{C_2}$ :

$$X_{L_3} X_{C_2}^2 - (R_3^2 + X_{L_3}^2) X_{C_2} + R_2^2 X_{L_3} = 0.$$

Підставивши числові значення і розв'язавши це рівняння, отримаємо два значення шуканого опору ємності:

1)  $X_{C_2} = 30 \text{ Ом};$

2)  $X_{C_2} = 53,3 \text{ Ом}.$

Тепер для обох значень знайдемо струми у вітках.

1. В першому випадку вхідний опір кола

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = R_1 + \frac{(R_2 - jX_{C_2})(R_3 + jX_{L_3})}{R_2 - jX_{C_2} + R_3 + jX_{L_3}} = 39,25 \text{ Ом}.$$

Струм  $\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}_{\text{ex}}} = 3,06 \text{ А}$ . Напряга  $\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{ab} = 95,63 \text{ В}$ . Тоді струми у вітках

$$\underline{I}_2 = 1,91 e^{j36,87^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_3 = 1,91 e^{-j36,87^\circ} \text{ А}.$$

2. Аналогічно для другого варіанта маємо

$$\underline{I}_1 = 2,5 \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = 1,5 e^{j53,11^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_3 = 2 e^{-j36,87^\circ} \text{ А}.$$

**5.5** Коло (рис. 5.6) працює в режимі резонансу. Струм  $I_2 = 5 \text{ А}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $U = 100 \text{ В}$ . Визначити значення решти струмів та параметрів елементів кола.

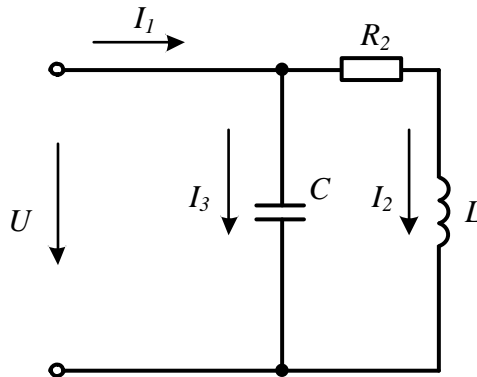


Рисунок 5.6

### Розв'язування

В колі один активний опір  $R_2$ , тому саме на ньому витрачається вся активна потужність, яку легко знайти, якщо відомі  $R_2$  та  $I_2$ ,

$$P = I_2^2 R_2 = 100 \text{ Вт.}$$

З іншого боку, потужність, яку віддає джерело, визначається за виразом  $P = UI_1 \cos \varphi$ . В нашому випадку  $\varphi = 0$ , оскільки коло працює в режимі резонансу. Отож за цієї умови знаходимо струм

$$I_1 = \frac{P}{U} = 1 \text{ А.}$$

Повний опір другої вітки

$$Z_2 = \frac{U}{I_2} = 20 \text{ Ом.}$$

Опір індуктивності

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = 19,6 \text{ Ом.}$$

В резонансному режимі роботи реактивна потужність джерела дорівнює нулю, тому відповідно до балансу реактивної потужності має виконуватися рівність

$$-I_3^2 X_C + I_2^2 X_L = 0.$$

Якщо виразити струм  $I_3$  через вхідну напругу  $I_3 = \frac{U}{X_C}$ , то можна знайти

спочатку опір ємності  $X_C = \frac{U^2}{I_2^2 X_L} = 20,4 \text{ Ом}$ , а потім і струм  $I_3 = \frac{U}{X_C} = 4,9 \text{ А}$ .

**5.6** В колі (рис. 5.7) на частоті  $f_1 = 50 \text{ Гц}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 20 \text{ Ом}$ , активна потужність, яку віддає джерело в режимі резонансу  $P = 100 \text{ Вт}$ .

Визначити:

- 1) значення опору  $R_2$ ;
- 2) діапазон частот, в якому за будь-яких значень  $R_2$  неможливий резонансний режим роботи;
- 3) прикладену напругу  $U$ .

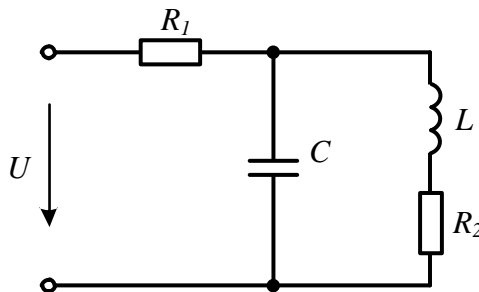


Рисунок 5.7

### Розв'язування

1. Запишемо вхідний опір кола в комплексній формі

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R_1 + \frac{(R_2 + jX_L)(-jX_C)}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

і виділимо дійсну та уявну частини

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R_1 + \frac{R_2 X_C^2}{R_2^2 + (X_L - X_C)^2} + j \frac{X_L X_C (X_C - X_L) - R_2^2 X_C}{R_2^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Прирівнюючи до нуля уявну частину вхідного опору (умова резонансу)

$$X_L X_C (X_C - X_L) - R_2^2 X_C = 0,$$

отримуємо рівняння для знаходження  $R_2$ :

$$R_2 = \sqrt{X_L (X_C - X_L)} = \sqrt{10(20 - 10)} = 10 \text{ Ом.}$$

З цього ж виразу видно, що опір  $R_2$  може бути дійсним числом тільки тоді, коли виконується співвідношення

$$X_C \geq X_L$$

або

$$f \leq f_1 \sqrt{\frac{X_C}{X_L}} = 50 \sqrt{\frac{20}{10}} = 70,7 \text{ Гц.}$$

Звідси знаходимо відповідь на друге завдання.

2. Отже, в колі резонанс буде відсутнім за будь-яких значень  $R_2$ , якщо тільки  $f \geq 70,7 \text{ Гц}$ .

3. В момент резонансу вхідний опір кола суто активний і дорівнює

$$R_{\text{вх}} = R_1 + \frac{R_2 X_C^2}{R_2^2 + (X_L - X_C)^2} = 5 + \frac{10 \cdot 20^2}{10^2 + (10 - 20)^2} = 25 \text{ Ом.}$$

Тоді вхідний струм

$$I = \sqrt{\frac{P}{R_{\text{вх}}}} = 2 \text{ А,}$$

а прикладена напруга

$$U = IR_{\text{вх}} = 50 \text{ В.}$$

**5.7** Для електричного кола, наведеного на рис. 5.8, необхідно визначити, за якого опору  $R$  буде мати місце «байдужий» резонанс, тобто резонанс за будь-якої частоти, якщо  $L = 20 \text{ мГн}$ ,  $C = 50 \text{ мкФ}$ ?



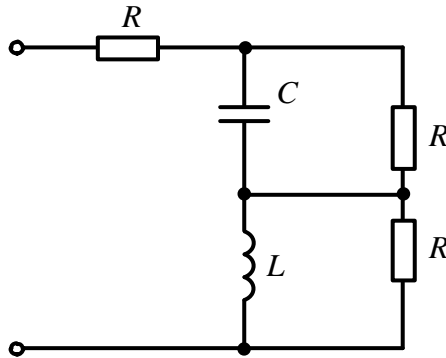


Рисунок 5.8

### Розв'язування

Запишемо вхідний комплексний опір кола

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = R + \frac{R jX_L}{R + jX_L} + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}$$

і перетворимо його так, щоб розділити дійсну та уявну частини

$$\underline{Z}_{\text{ex}} = R + \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} + \frac{RX_C^2}{R^2 + X_C^2} + j \left( \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2} - \frac{R^2 X_C}{R^2 + X_C^2} \right).$$

Для знаходження значення опору  $R$  за умовою завдання прирівняємо уявну частину до нуля

$$\frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2} - \frac{R^2 X_C}{R^2 + X_C^2} = 0.$$

Ця рівність виконується, якщо опір рівний  $R = \sqrt{X_L X_C}$  або, що теж саме,

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} = 20 \text{ Ом.}$$

Знайдене значення  $R$  не залежить від частоти, а це означає, що при такому значенні опору в колі має місце резонанс за будь-якої частоти.

**5.8** В послідовному резонансному контурі (див. рис. 5.4) на резонансній частоті  $f_0 = 4$  МГц, добротність контуру  $Q = 80$ . Визначити ширину смуги пропускання, граничні частоти смуги пропускання і напругу на ємності, якщо прикладена напруга  $U = 6$  В.

### Розв'язування

Смуга пропускання резонансного контуру визначається за виразом

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = 50 \text{ кГц,}$$

перша гранична частота для високих добротностей контуру (за значень  $Q \geq 20$ )

$$f_1 = f_0 - \frac{f_0}{2Q} = 3,975 \text{ МГц},$$

друга гранична частота

$$f_2 = f_0 + \frac{f_0}{2Q} = 4,025 \text{ МГц}.$$

Напруга на реактивних елементах в момент резонансу в  $Q$  раз більша за прикладену, тому

$$U_C = QU = 480 \text{ В}.$$

**5.9** Коло (рис. 5.9) працює в резонансному режимі. Дано:  $I = 8 \text{ А}$ ,  $I_1 = 5 \text{ А}$ ,  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2X_L$ . Визначити значення опорів  $R_2$ ,  $X_L$ ,  $X_C$  та струми в інших вітках цього кола.

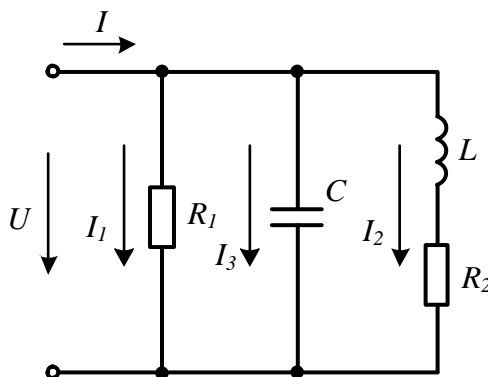


Рисунок 5.9

### Розв'язування

Всі три вітки схеми паралельні і до них прикладена та сама напруга  $U$ , яка легко визначається як

$$U = I_1 R_1 = 20 \text{ В}.$$

За умови резонансу прикладена напруга і вхідний струм збігаються за фазою ( $\varphi = 0$ ), тому реактивна потужність, яку джерело віддає в коло ( $Q = UI \sin \varphi$ ), дорівнює нулю, а активна потужність

$$P = UI \cos \varphi = 20 \cdot 8 \cdot 1 = 160 \text{ Вт}.$$

Ця потужність в колі витрачається в двох активних опорах. В першому опорі  $R_1$  вона дорівнює

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 100 \text{ Вт},$$

а в другому  $R_2$  її знаходимо за виразом

$$P_2 = P - P_1 = 60 \text{ Вт}.$$

Активну потужність другої вітки запишемо у вигляді

$$P_2 = UI_2 \cos \varphi_2,$$

де

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{X_L}{R_2} = \operatorname{arctg} \frac{X_L}{2X_L} = 26,57^\circ.$$

Після цього можемо розрахувати струм  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{P}{U \cos \varphi_2} = 3,354 \text{ А.}$$

Використовуючи вираз для потужності у вигляді  $P_2 = I_2^2 R_2$ , знаходимо опір

$$R_2 = \frac{P_2}{I_2^2} = 5,334 \text{ Ом.}$$

Звідси  $X_L = \frac{R_2}{2} = 2,667 \text{ Ом.}$

Реактивні потужності індуктивності та ємності за умови резонансу рівні між собою, тому

$$I_2^2 X_L = I_3^2 X_C,$$

але в зв'язку з тим, що струм  $I_3 = \frac{U}{X_C}$ , то  $X_C = \frac{U^2}{I_2^2 X_L} = 13,33 \text{ Ом.}$

Тоді  $I_3 = 1,5 \text{ А.}$

**5.10** Вхідний опір електричного кола (рис. 5.10), що працює в резонансному режимі, дорівнює 4 Ом. Цей же опір у випадку підключення кола до джерела постійної напруги ( $f = 0$ ) дорівнює 8 Ом. Знайти  $R$ ,  $X_{L_0}$ ,  $X_{C_0}$  в режимі резонансу.

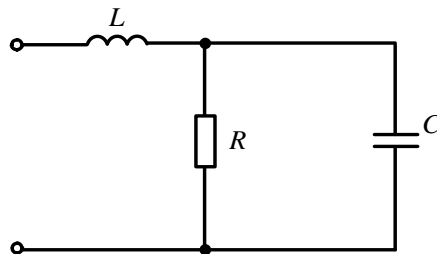


Рисунок 5.10

### Розв'язування

Запишемо повний вхідний комплексний опір кола і розділимо його на дійсну та уявну частини

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = \frac{RX_C^2}{R^2 + X_C^2} + j \left( X_L - \frac{R^2 X_C}{R^2 + X_C^2} \right).$$

За умови постійної прикладеної напруги ( $f = 0$ ) опір індуктивності дорівнює нулю, а опір ємності – нескінченності. Тому  $Z_{\text{вх}}(0) = R = 8 \text{ Ом.}$  В режимі резонансу вхідний опір суто активний, тобто дорівнює дійсній частині  $\underline{Z}_{\text{вх}}$ , і тому  $X_{C_0}$

знаходимо з рівняння  $Z_{\text{вх}0} = \frac{R X_{C_0}^2}{R^2 + X_{C_0}^2}$ , або  $4 = \frac{8 X_{C_0}^2}{8^2 + X_{C_0}^2}$ , звідки  $X_{C_0} = 8$  Ом.

Опір  $X_{L_0}$  знаходимо з умови, що уявна частина комплексного вхідного опору за умови резонансу рівна нулю  $X_{L_0} - \frac{R^2 X_{C_0}}{R^2 + X_{C_0}^2} = 0$ .

$$\text{Відтак } X_{L_0} = \frac{R^2 X_{C_0}}{R^2 + X_{C_0}^2} = \frac{8^2 \cdot 8}{8^2 + 8^2} = 4 \text{ Ом.}$$

### Задачі для самостійного розв'язування

**5.11** Контур, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора і котушки (див. рис. 5.4), працює в резонансному режимі на частоті  $f_0$ . Косинус кута зсуву фаз між прикладеною напругою і струмом має те саме значення на частотах  $f_1 = 500$  Гц та  $f_2 = 2000$  Гц. Знайти резонансну частоту.

*Відповідь:* 1000 Гц.

**5.12** Повний опір котушки на частоті 50 Гц дорівнює 25 Ом, а для постійного струму 7 Ом. Яку ємність слід увімкнути послідовно з котушкою, щоб резонанс настав на частоті 200 Гц.

*Відповідь:* 8,29 мкФ.

**5.13** На резонансній частоті вхідний опір кола (рис. 5.11) дорівнює 9 Ом, а  $R = 10$  Ом. Знайти  $X_{C_0}$  і  $X_{L_0}$  за умови резонансу.

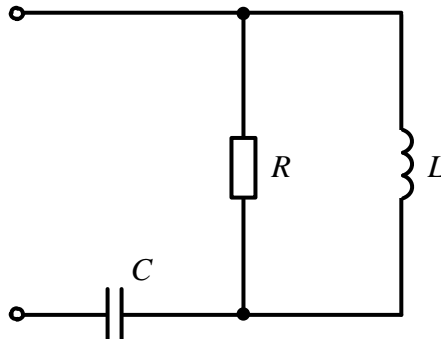


Рисунок 5.11

*Відповідь:*  $X_{L_0} = 30$  Ом;  $X_{C_0} = 3$  Ом.

**5.14** Знайти опір  $R_2$ , з яким коло (рис. 5.12) працюватиме в режимі резонансу, якщо  $f = 1$  кГц,  $L = 5$  мГн,  $C = 10,6$  мкФ,  $R_1 = 5$  Ом.

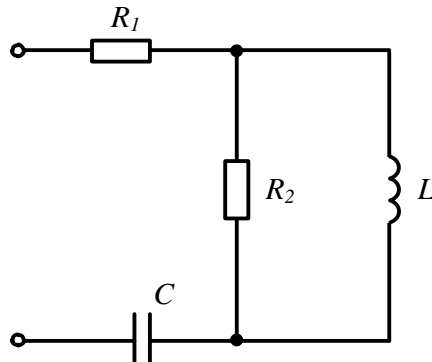


Рисунок 5.12

**Відповідь:**  $R_2 = 30$  Ом.

**5.15** Електричне коло, наведене на рис. 5.13, працює в резонансному режимі. Відомо, що прикладена напруга  $U = 20$  В, напруга на ємності  $U_C = 30$  В, активна потужність, споживана колом,  $P = 400$  Вт, частота  $f = 50$  Гц. Знайти параметри кола  $R, L, C$ .

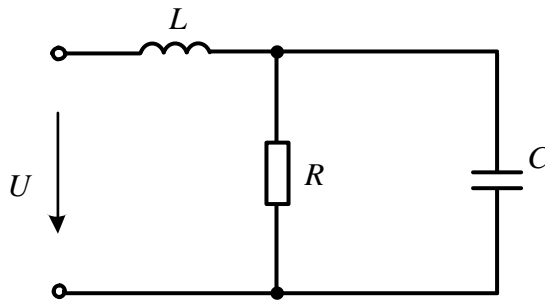


Рисунок 5.13

*Підказка.* Для розв'язання задачі доцільно побудувати векторну діаграму і врахувати, що за резонансу вхідні струм і напруга збігаються за фазою.

**Відповідь:**  $R = 2,25$  Ом;  $L = 3,57$  мГн;  $C = 1584$  мкФ.

**5.16** Котушка індуктивності, яка підімкнута до джерела синусоїдної напруги 200 В, споживає при струмі 10 А і частоті  $f = 50$  Гц активну потужність 1,2 кВт. Визначити значення ємності, яку слід під'єднати паралельно котушці, щоб  $\cos \varphi$  отриманого кола зріс до 0,9.

**Відповідь:**  $C = 81,1$  мкФ.

**5.17** Коло (рис. 5.14) працює в режимі резонансу. Знайти параметри кола  $R$ ,  $X_L$ ,  $X_C$ , якщо  $U = 80$  В, споживана потужність  $P = 320$  Вт, напруга на котушці  $U_1 = 200$  В.

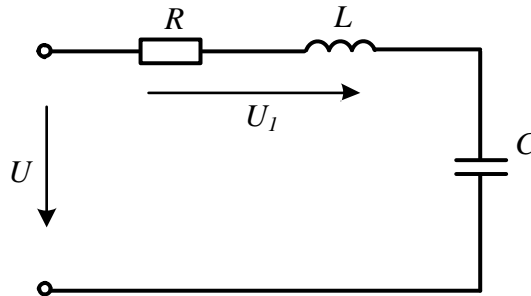


Рисунок 5.14

**Відповідь:**  $R = 20$  Ом;  $X_L = X_C = 45,8$  Ом.

**5.18** Визначити значення опору  $R_2$ , за яким коло (рис. 5.15) з параметрами  $X_C = 50$  Ом,  $X_L = 18$  Ом,  $R_1 = 51$  Ом буде працювати в режимі резонансу. Яким за цієї умови буде значення вхідного опору?

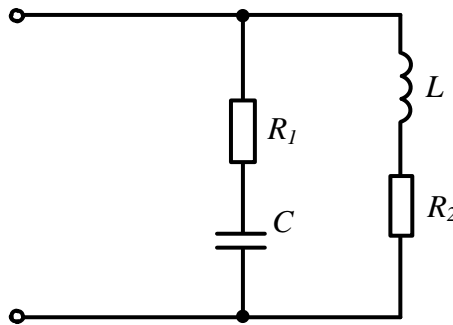


Рисунок 5.15

**Відповідь:**  $R_2 = 38,9$  Ом;  $Z_{вх} = 32,1$  Ом.

**5.19** Невелике підприємство в номінальному режимі споживає активну потужність  $P = 80$  кВт. Його навантаження носить активно-індуктивний характер з коефіцієнтом потужності  $\cos \varphi_n = 0,65$ , вхідна напруга  $U = 220$  В. Визначити значення ємності конденсатора, який необхідно під'єднати паралельно навантаженню, щоб коефіцієнт потужності дорівнював  $\cos \varphi_{n1} = 0,98$ .

**Відповідь:**  $C = 5082$  мкФ.

**5.20** Для кола (рис. 5.16) відомі опір  $R = 5$  Ом і резонансна частота  $f_0 = 100$  кГц. За яких значень  $L$  і  $C$  вхідний опір кола буде суто активним і дорівнюватиме 4 Ом?

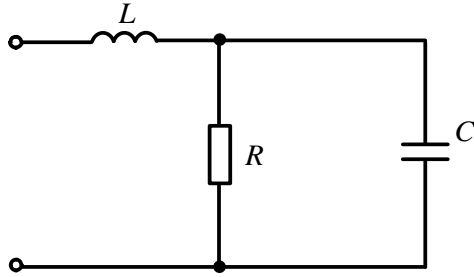


Рисунок 5.16

**Відповідь:**  $L = 3,18$  мкГн;  $C = 0,159$  мкФ.

**5.21** В колі (рис. 5.17) відомо, що  $X_L = 2R_2$ ,  $X_C = 3$  Ом і що в режимі резонансу  $I = 5$  А,  $I_3 = 6$  А. Визначити решту струмів та опори  $X_L$ ,  $R_2$ ,  $R_1$ .

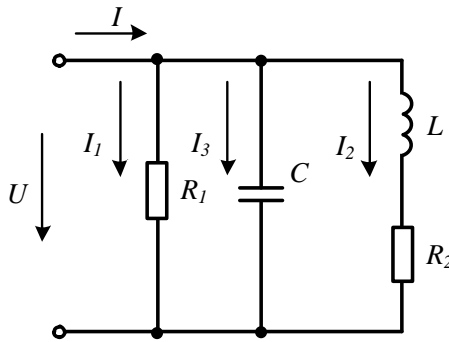


Рисунок 5.17

*Підказка.* Побудувати векторну діаграму і врахувати, що за резонансу струми  $I$  та  $I_1$  збігаються за фазою з напругою  $U$ , а реактивні потужності ємності та індуктивності рівні поміж собою.

**Відповідь:**  $I_1 = 2$  А;  $I_2 = 6,7$  А;  $X_L = 2,4$  Ом;  $R_1 = 9$  Ом;  $R_2 = 1,2$  Ом.

**5.22** Електричне коло (рис. 5.18) працює в резонансному режимі. Відомі струми  $I_1 = 6,9$  А та  $I_3 = 13$  А. Визначити струм  $I_2$ .

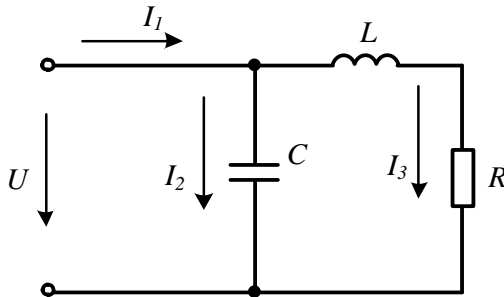


Рисунок 5.18

**Відповідь:**  $I_2 = 11$  А.

**5.23** В колі (рис. 5.19), яке працює в режимі резонансу, відомі: прикладена напруга  $U = 240$  В, індуктивність  $L = 40$  мГн та ємність  $C = 1$  мкФ. Опори  $R_1$  та  $R_2$  невідомі. Визначити показ амперметра А. Його внутрішній опір вважати рівним нулю.

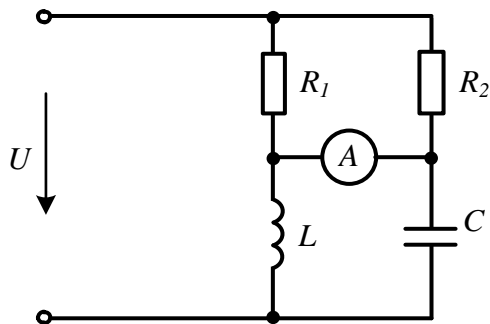


Рисунок 5.19

**Відповідь:** амперметр показує 1,2 А.



## Розділ 6

### КОЛА З ІНДУКТИВНО-ЗВ'ЯЗАНИМИ ВІТКАМИ

Під час розрахунку таких кіл необхідно брати до уваги взаємний вплив одна на одну індуктивно-зв'язаних котушок з урахуванням способу їх вмикання.

**6.1** В електричному колі, показаному на рис. 6.1, потрібно визначити всі струми і скласти баланс потужностей, якщо  $R_1 = R_4 = 10$  Ом,  $R_2 = R_3 = 20$  Ом,  $X_{L1} = X_{L2} = 40$  Ом,  $X_{C3} = 60$  Ом,  $X_M = 20$  Ом,  $U = 120$  В.

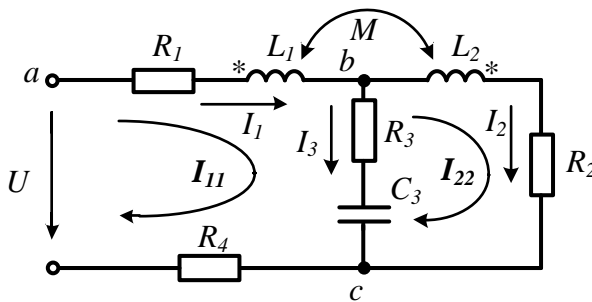


Рисунок 6.1

#### Розв'язування

Задачу розв'яжемо двома методами – *методом контурних струмів*, пам'ятаючи про те, що незалежні контури зручніше вибирати так, щоб в контур входила тільки одна індуктивно-зв'язана котушка (див. рис. 6.1), і *методом усунення магнітних зв'язків* (рис. 6.2).

1. Розглянемо докладно запис рівняння для першого контуру, здійснюючи обхід контуру за напрямком контурного струму та записуючи всі напруги в цьому контурі, спричинені контурним струмом  $I_{11}$  з додатним знаком (перший доданок в рівнянні).

У цьому ж контурі в спільній з другим контуром вітці  $R_3 - C_3$  протікає струм  $I_{22}$  в протилежному напрямку до  $I_{11}$ , який викликає на ній напругу, що входить в рівняння з від'ємним знаком (другий доданок в рівнянні). Індуктивність  $L_1$  магнітно зв'язана з індуктивністю  $L_2$ , тому слід ввести в рівняння напругу впливу другої індуктивності на першу зі знаком мінус, тому що для контурних струмів вмикання котушок зустрічне (третій доданок в рівнянні). Аналогічно складаємо рівняння і для другого контуру

$$\begin{cases} \underline{I}_{11} [R_1 + R_3 + R_4 + j(X_{L1} - X_{C3})] - \underline{I}_{22} (R_3 - jX_{C3}) - \underline{I}_{22} jX_M = \underline{U}, \\ -\underline{I}_{11} (R_3 - jX_{C3}) + \underline{I}_{22} [R_2 + R_3 + j(X_{L2} - X_{C3})] - \underline{I}_{11} jX_M = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, одержимо числові значення контурних струмів

$$\underline{I}_{11} = 2,236 e^{-j26,57^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_{22} = 2,236 e^{-j63,43^\circ} \text{ А}$$

та струми у вітках

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 2,236 e^{-j26,57^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{22} = 2,236 e^{-j63,43^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22} = 1,41 e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Складемо баланс потужностей.

Активна потужність джерела

$$P_{дж} = UI_1 \cos \varphi_1 = 120 \cdot 2,236 \cos [0 - (-26,57^\circ)] = 240 \text{ Вт}.$$

Знаходимо активну потужність приймачів

$$P_{пр} = I_1^2 (R_1 + R_5) + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 240 \text{ Вт}.$$

Реактивна потужність джерел  $Q_{дж} = UI_1 \sin \varphi_1 = 120 \text{ ВАр}$ .

Наявність індуктивного зв'язку між вітками змінює реактивний опір кола і тому під час визначення реактивної потужності приймачів слід враховувати ще одну (якщо в колі дві індуктивно-зв'язані котушки) складову. Таким чином,

$$Q_{пр} = I_1^2 X_{L1} + I_2^2 X_{L2} - I_3^2 X_{C3} - 2I_1 I_2 X_M \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 120 \text{ ВАр},$$

де  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  – початкові фази відповідних струмів.

Знак мінус в останньому доданку тому, що вмикання котушок зустрічне.

Баланс виконується. Отже, розрахунок виконано правильно.

2. Знайдемо струми методом перетворень, попередньо усунувши індуктивний зв'язок поміж котушками (див. рис. 6.2)

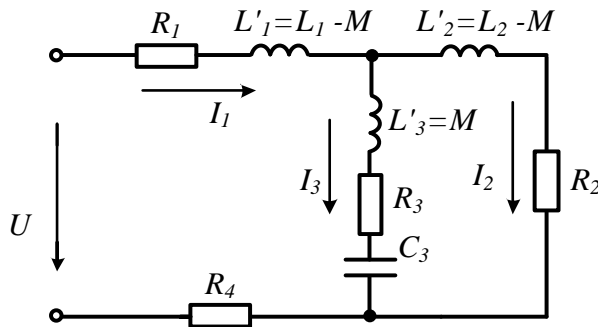


Рисунок 6.2

Повний комплексний вхідний опір кола

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ex} &= R_1 + j(X_{L1} - X_M) + \frac{[R_2 + j(X_{L2} - X_M)][R_3 + j(X_M - X_C)]}{R_2 + j(X_{L2} - X_M) + R_3 + j(X_M - X_C)} = \\ &= 53,7 e^{-j26,57^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Вхідний струм

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}_{ex}} = 2,236 e^{-j26,57^\circ} \text{ А,}$$

струми у вітках  $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 2,236 e^{-j63,43^\circ} \text{ А, } \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 1,41 e^{j45^\circ} \text{ А.}$

Результати розрахунків збігаються.

**6.2** В електричному колі (рис. 6.3) визначити напругу  $U_{ab}$  якщо задано такі параметри:  $R = X_C = X_{L1} = X_{L2} = 10 \text{ Ом, } X_M = 5 \text{ Ом, } U = 200 \text{ В.}$  Як зміниться значення цієї напруги, якщо змінити спосіб вмикання котушок?

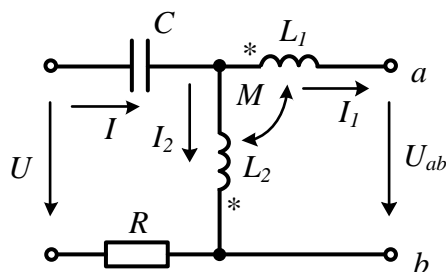


Рисунок 6.3

### Розв'язування

Як завжди, за умови розрахунку електричних кіл спочатку розставимо у вітках струми. Однак зазначимо, що на схемі (див. рис. 6.3) показано напрямок струму  $\underline{I}_1$ , хоча затискачі  $a$  і  $b$  розімкнуті і у цій вітці струм відсутній. Це зроблено навмисно для зручності складання розрахункових співвідношень. В остаточних обчисленнях цей струм буде прийнятий рівним нулю.

Запишемо для умовного контуру, який включає шукану напругу  $U_{ab}$  і прикладену напругу  $U$ , рівняння за другим законом Кірхгофа, враховуючи, що на схемі показано зустрічне вмикання котушок (струми в індуктивно-зв'язаних котушках орієнтовані протилежно відносно однойменних затискачів цих котушок). Виберемо напрям обходу цього контуру за годинниковою стрілкою і врахуємо, що напруга на індуктивності  $L_1$  має дві складові:

- напруги на власному опорі  $jX_{L1}\underline{I}_1$ ;

- напруги взаємної індукції  $jX_M\underline{I}_2$  (напруги впливу другої котушки на першу), що входить в рівняння зі знаком мінус (зустрічне вмикання).

Отже,

$$\underline{U}_{ab} + R\underline{I} - jX_C\underline{I} + jX_{L1}\underline{I}_1 - jX_M\underline{I}_2 = \underline{U}.$$

Тепер згадаємо, що струм  $\underline{I}_1 = 0$ . Тоді  $\underline{I}_2 = \underline{I}$ , на підставі чого можна записати  $\underline{U}_{ab} = \underline{U} - \underline{I}[R - j(X_C + X_M)]$ .

Введення в рівняння струму  $\underline{I}_1$  нам знадобилося для того, щоб правильно врахувати спосіб вмикання котушок.

Струм  $\underline{I}$  знайдемо за законом Ома, враховуючи, що вплив першої котушки на другу відсутній, тому що струм  $\underline{I}_1$  в розімкнутій вітці дорівнює нулю,

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j(X_{L2} - X_C)} = 20 \text{ A},$$

Підставляючи знайдене значення струму  $\underline{I}$  у вираз для  $\underline{U}_{ab}$  отримуємо  $\underline{U}_{ab} = j300 \text{ V}$ .

Якщо вмикання котушок буде узгодженим, то зміниться знак опору взаємної індукції  $X_M$ , а значення струму  $\underline{I}$  не зміниться і тоді  $\underline{U}_{ab} = j100 \text{ V}$ .

**6.3** В першу та другу вітки кола, розглянутого в задачі 6.1, увімкнуті ватметри, як це показано на рис. 6.4. Використовуючи результати розрахунку задачі 6.1, визначити покази ватметрів.

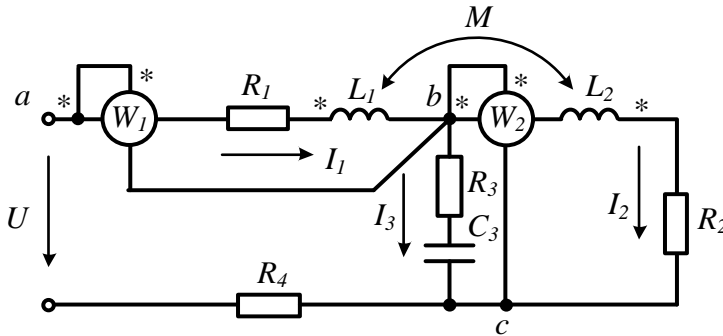


Рисунок 6.4

### Розв'язування

Ватметри показують величину, рівну добутку напруги ватметра на струм, що протікає через нього, та на косинус кута між ними. Струми, що протікають через ватметри, вже знайдено – в задачі 6.1

$$\underline{I}_1 = 2,236e^{-j26,57^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = 2,236e^{-j63,43^\circ} \text{ A}.$$

Отже, для знаходження показів ватметрів слід визначити напруги  $\underline{U}_{ab}$  і  $\underline{U}_{bc}$ . Ці напруги з урахуванням взаємного впливу котушок одна на одну, відповідно, дорівнюють

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1(R_1 + jX_{L1}) - \underline{I}_2jX_M = 53,85e^{j68,2^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{I}_2(R_2 + jX_{L2}) - \underline{I}_1jX_M = 89,44e^{-j26,57^\circ} \text{ V}.$$

Таким чином, покази першого ватметра

$$P_1 = U_{ab} I_1 \cos(\psi_{u_{ab}} - \psi_{i_1}) = 53,8 \cdot 2,236 \cdot \cos[68,2^\circ - (-26,57^\circ)] = -10 \text{ Вт},$$

а другого –

$$P_2 = U_{bc} I_2 \cos(\psi_{u_{bc}} - \psi_{i_2}) = 89,44 \cdot 2,236 \cdot \cos[-26,57^\circ - (-63,43^\circ)] = 160 \text{ Вт}.$$

Проаналізуємо отримані результати. З результатів розрахунку видно, що для першої ділянки активна потужність є від'ємною і дорівнює  $P_1 = -10$  Вт. Знак мінус вказує на те, що на ділянці потужність не витрачається, а віддається назовні. Водночас на цій ділянці є активний опір, який необоротно споживає активну потужність  $P_{R_1} = I_1^2 R_1 = 50$  Вт. Така розбіжність в показах ватметра і витратах активної потужності на ділянці наштовкує на думку, що активна потужність першої котушки, попри її суто реактивний характер, має бути відмінною від нуля. І справді, внаслідок індуктивного зв'язку спостерігається взаємообмін електромагнітною енергією між першою котушкою, що входить до складу зазначеної ділянки кола, та другою котушкою, яка розташована поза її межами. *Наразі енергія через магнітне поле необоротно і спрямовано передається від однієї індуктивно-зв'язаної котушки до іншої: в нашому випадку – від першої до другої.* Про це свідчать знаки активних потужностей обох індуктивно-зв'язаних котушок.

Зокрема, з урахуванням зустрічного характеру індуктивного зв'язку, активна потужність, яку окремо споживає перша котушка є, по-перше, відмінною від нуля, а, по-друге, від'ємною:

$$P_{M_1} = -X_M I_1 I_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = -60 \text{ Вт},$$

де  $\alpha_1 = \psi_{i_1}$  і  $\alpha_2 = \psi_{i_2}$  – початкові фази струмів  $I_1$  та  $I_2$ .

Щодо другої котушки, то її активна потужність, відповідно, додатна:

$$P_{M_2} = -X_M I_1 I_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = +60 \text{ Вт}.$$

Як бачимо, за модулем обидві активні потужності однакові, але протилежні за знаком, що цілком узгоджується із законом збереження енергії.

Відтак активна потужність першої ділянки в термінах її складових

$$P_1 = P_{R_1} + P_{M_1} = 50 + (-60) = -10 \text{ Вт},$$

а активна потужність другої ділянки (з урахуванням втрат на опорі  $R_2$ )

$$P_2 = P_{R_2} + P_{M_2} = I_2^2 R_2 + P_{M_2} = 100 + 60 = 160 \text{ Вт},$$

що і відповідає показам обох ватметрів.

Потрібно пам'ятати, що до пасивних ділянок кола активна потужність надходить в усіх випадках від джерела енергії. Але це може відбуватися або безпосередньо, або опосередковано – через інші ділянки кола, наприклад, через індуктивно-зв'язані котушки. Баланс активних потужностей беззаперечно це доводить.

**6.4** За результатами розрахунку задачі 6.1 побудувати суміщену векторну діаграму напруг і струмів.

### Розв'язування

В електричних колах із взаємними індуктивностями напруги на ділянках кожної з віток залежать від струмів індуктивно-зв'язаних віток, тому векторну діаграму потрібно будувати, відкладаючи в масштабі вектори струмів індуктивно-зв'язаних віток з урахуванням їх початкових фаз.

Векторну діаграму напруг будуюмо топографічну, тому на рис. 6.5 кожен елемент схеми заданого кола (див. рис. 6.1) промаркований літерами, яким відповідають точки на векторній діаграмі.

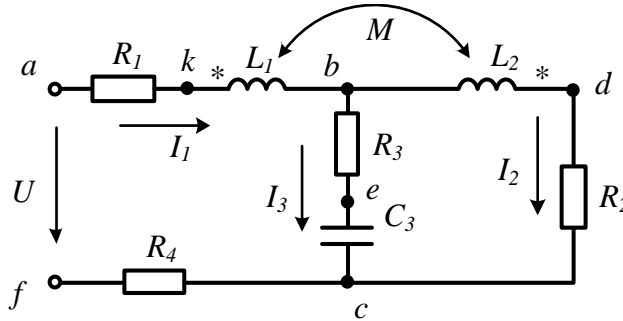


Рисунок 6.5

Побудову векторної діаграми починаємо з побудови струмів  $I_1$  та  $I_2$  на комплексній площині з врахуванням їх початкових фаз (рис. 6.6). Потім будуюмо всі напруги другої вітки. На ділянці  $bd$  напруга складається з двох доданків – напруги на індуктивності  $L_2$  від дії струму  $I_2$ , яка випереджає цей струм на  $90^\circ$ , і напруги взаємної індукції від дії струму  $I_1$ , яка відстає від цього струму на  $90^\circ$ , тому що котушки увімкнено зустрічно. На ділянці  $dc$  напруга збігається за напрямом зі струмом  $I_2$ .

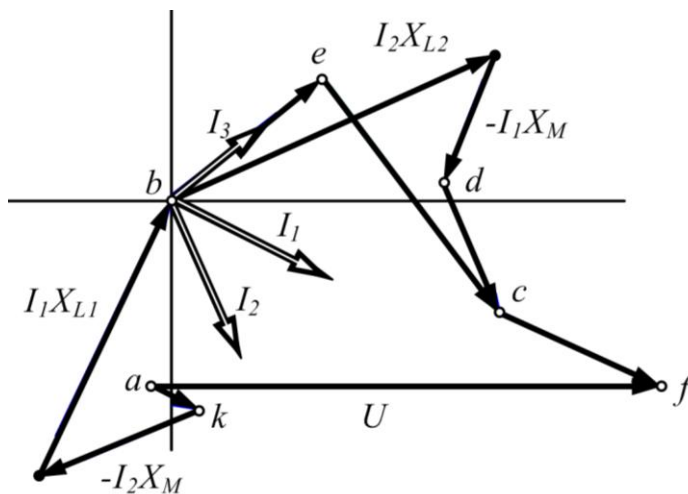


Рисунок 6.6

Далі можна будувати вектори напруги третьої вітки, попередньо побудувавши струм  $I_3$ , який відповідно до першого закону Кірхгофа дорівнює різниці струмів  $I_1$  і  $I_2$ . На ділянці  $be$  вектор напруги збігається зі струмом  $I_3$ , а на ділянці  $ec$  відстає від нього на  $90^\circ$ . Природно, що точка  $c$ , яку отримано двома шляхами, повинна потрапити в те саме місце.

Будуємо тепер напруги першої вітки. На ділянці  $kb$  (найскладніша ділянка з точки зору побудови діаграми) напруга складається з двох частин – напруги на індуктивності  $L_1$ , вектор якої *випереджає* за напрямом вектор струму  $I_1$  на  $90^\circ$ , і напруги впливу другої котушки на першу, вектор якої *відстає* від струму  $I_2$  на  $90^\circ$ . Ці вектори направлені від точки  $k$  до точки  $b$ . На ділянці  $ak$  напруга збігається за фазою зі струмом  $I_1$  і її вектор спрямований з точки  $a$  в точку  $k$ . Аналогічно на ділянці  $cf$  вектор напруги направлений за струмом  $I_1$  з точки  $c$  в точку  $f$ . Вектор прикладеної напруги проводимо з точки  $a$  в точку  $f$ . За умови дотримання заданих масштабів і правильних побудов, вектор прикладеної напруги на діаграмі повинен відповідати заданим в умові задачі параметрам.

**6.5** В електричному колі зі взаємними індуктивностями (рис. 6.7) знайти всі струми, якщо відомо:  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 10$  Ом,  $X_{L1} = X_{L2} = 15$  Ом,  $X_{L3} = 20$  Ом,  $X_{C3} = 15$  Ом,  $X_{13} = \omega M_{13} = 10$  Ом,  $X_{23} = \omega M_{23} = 15$  Ом,  $U = 150$  В.

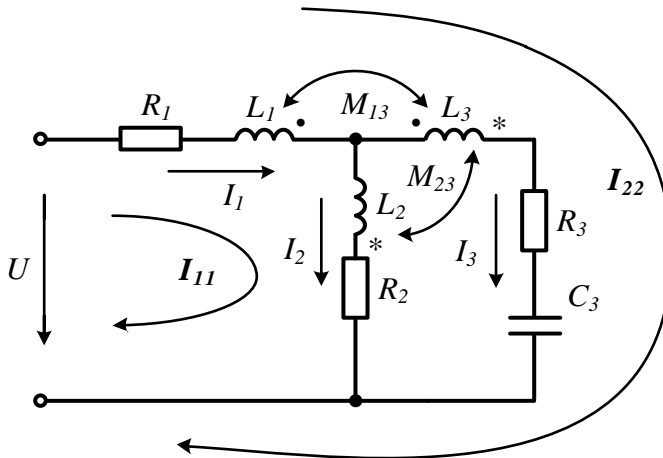


Рисунок 6.7

### Розв'язування

Суттєва відмінність цієї задачі від попередніх полягає в тому, що в колі магнітно-зв'язаними є індуктивності  $L_1$  і  $L_3$  та індуктивності  $L_2$  і  $L_3$ . Цю задачу також будемо розв'язувати методом контурних струмів, проте в цьому випадку запис рівнянь виявляється більш складним, тому що неможливо вибрати незалежні контури так, щоб в кожній із них входила тільки одна індуктивно-зв'язана котушка. Розглянемо детально складання рівнянь, вибравши незалежні контури і напрям контурних струмів в них так, як показано на рис. 6.7. Спосіб вмикання котушок

показано для кожної пари своїм значком (жирна точка для  $L_1$  і  $L_3$ , зірочка – для  $L_2$  і  $L_3$ ). Для заданих напрямків контурних струмів індуктивності  $L_1$  і  $L_3$  включені зустрічно, а індуктивності  $L_2$  і  $L_3$  – узгоджено. Для першого контуру записуємо напруги на всіх пасивних елементах від контурного струму  $\underline{I}_{11}$  (перший доданок), потім напруги від контурного струму  $\underline{I}_{22}$  на  $R_1$  і  $L_1$  зі знаком плюс, тому що контурні струми на цій ділянці збігаються за напрямом (другий доданок). Третім доданком в цьому рівнянні є напруга, взята зі знаком «мінус», яка обумовлена впливом індуктивності  $L_3$  на індуктивність  $L_1$  від струму  $\underline{I}_{22}$ . Четвертою складовою є напруга, взята зі знаком «плюс» та обумовлена впливом індуктивності  $L_3$  на індуктивність  $L_2$  від струму  $\underline{I}_{22}$ .

$$\underline{I}_{11}(R_1 + R_2 + jX_{L1} + jX_{L2}) + \underline{I}_{22}(R_1 + jX_{L1}) - \underline{I}_{22} jX_{L3} + \underline{I}_{22} jX_{23} = \underline{U}.$$

Складемо рівняння для другого контуру. Перший доданок є напругою на всіх пасивних елементах контуру від струму  $\underline{I}_{22}$ . Другий доданок – це напруги на елементах  $R_1$  і  $L_1$ , обумовлені струмом  $\underline{I}_{11}$ . Наступним кроком слід врахувати напруги магнітних зв'язків:

- на індуктивності  $L_1$  під дією струму  $\underline{I}_{22}$ , що протікає в індуктивності  $L_3$ , з'являється додаткова напруга  $\underline{I}_{22} jX_{L3}$  зі знаком «мінус»;

- на індуктивності  $L_3$  зі знаком «мінус» з'являється напруга впливу першої котушки ( $\underline{I}_{11} jX_{L3}$ ) від дії струму  $\underline{I}_{11}$  і ( $\underline{I}_{22} jX_{L3}$ ) від дії струму  $\underline{I}_{22}$ , а також зі знаком «плюс» напруга впливу другої котушки ( $\underline{I}_{11} jX_{23}$ ) від дії струму  $\underline{I}_{11}$ . Таким чином, друге рівняння має вигляд:

$$\underline{I}_{22}(R_1 + R_3 + jX_{L1} + jX_{L3} - jX_{C3}) + \underline{I}_{11}(R_1 + jX_{L1}) - \underline{I}_{22} jX_{L3} - \underline{I}_{11} jX_{L3} - \underline{I}_{22} jX_{L3} + \underline{I}_{11} jX_{23} = \underline{U}.$$

Після розв'язування цієї системи, одержимо контурні струми

$$\underline{I}_{11} = 5,16 e^{-j86^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_{22} = 3,264 e^{j22,4^\circ} \text{ А}$$

і струми у вітках

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{22} = 5,16 e^{-j49,18^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{11} = 5,16 e^{-j86^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{22} = 3,264 e^{j22,4^\circ} \text{ А}.$$

**6.6** Визначити миттєве значення вхідної напруги в електричному колі (рис. 6.8), якщо струм в опорі навантаження  $R_n$  відомий і дорівнює  $i_n = 2 \sin(628t - 20^\circ)$  А. Відомі також параметри кола:  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 8$  Ом,  $L_1 = 0,05$  Гн,  $L_2 = 0,03$  Гн,  $R_n = 50$  Ом,  $C_2 = 50$  мкФ,  $M = 0,04$  Гн.

### Розв'язування

Знайдемо спочатку реактивні опори кола, враховуючи, що кутова частота за-



дана у виразі для миттєвого значення струму:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 628 \cdot 0,05 = 31,4 \text{ Ом}, \quad X_{L2} = \omega L_2 = 18,84 \text{ Ом}, \quad X_M = \omega M = 25,12 \text{ Ом},$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = 31,83 \text{ Ом}.$$

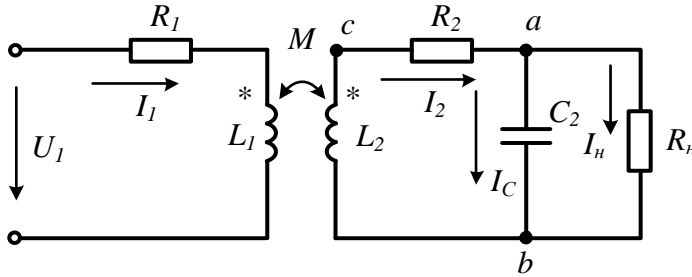


Рисунок 6.8

Задачу будемо розв'язувати, використовуючи заданий струм навантаження  $\underline{I}_n$  і поступово підходячи до шуканої вхідної напруги.

За відомим струмом  $\underline{I}_n$  та опором навантаження  $R_n$  за законом Ома знаходимо комплексне діюче значення напруги між точками  $a$  і  $b$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_n R_n = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-j20^\circ} \cdot 50 = 70,71 e^{-j20^\circ} \text{ В}.$$

Потім знаходимо струм в ємності

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{ab}}{-jX_C} = 2,22 e^{j70^\circ} \text{ А}.$$

За першим законом Кірхгофа знаходимо струм

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_C + \underline{I}_n = 2,632 e^{j37,5^\circ} \text{ А}.$$

Тепер можна знайти напругу між точками  $c$  і  $b$  за другим законом Кірхгофа

$$\underline{U}_{cb} = \underline{I}_2 R_2 + \underline{U}_{ab} = 83,925 e^{-j7,78^\circ} \text{ В}.$$

З іншого боку, ту ж саму напругу можна визначити як напругу на індуктивності  $L_2$ . Ця напруга складається з двох доданків – напруги самоіндукції  $\underline{I}_2 jX_{L2}$  і напруги взаємної індукції  $\underline{I}_1 jX_M$ , взятої зі знаком «мінус», тому що за заданих напрямів струмів котушки увімкнені зустрічно. Таким чином,

$$\underline{U}_{cb} = -(\underline{I}_2 jX_{L2} - \underline{I}_1 jX_M).$$

Знак «мінус» перед дужками стоїть тому, що напрям напруги  $\underline{U}_{cb}$  на індуктивності протилежний напрямку струму в ній. Два отриманих вирази для  $\underline{U}_{cb}$  дозволяють знайти струм у первинному контурі

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{cb} + \underline{I}_2 jX_{L2}}{jX_M} = 2,386 e^{-j62,15^\circ} \text{ А}.$$

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для первинного контуру, враховуючи, що при заданих напрямках струмів котушки увімкнені зустрічно, і знайдемо вхідну напругу

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 (R_1 + jX_{L1}) - \underline{I}_2 jX_M = 124,4 e^{-j18,7^\circ} \text{ В.}$$

Миттєве значення напруги

$$u_1 = 124,4\sqrt{2} \sin(628t - 18,7^\circ) \text{ В.}$$

**6.7** В колі (рис. 6.8) з тими ж параметрами, що і в задачі 6.6, визначити опір навантаження  $\underline{Z}_n$ , за яким він буде отримувати максимальну потужність, а також значення цієї потужності.

### Розв'язування

Для розв'язання цієї задачі скористаємось методом еквівалентного генератора, замінивши всю схему, крім вітки з опором навантаження, еквівалентним генератором з е.р.с.  $E_{екв}$  і внутрішнім опором  $\underline{Z}_{екв}$  (рис. 6.9, а). Щоб визначити  $E_{екв}$ , необхідно знайти напругу в місці розриву вітки, де знаходиться навантаження (рис. 6.9, б).

Як видно з цього рисунка, напругу холостого ходу можна знайти за формулою

$$\underline{U}_{xx} = \underline{I}'_2 (-jX_{C2}).$$

Для визначення струму  $\underline{I}'_2$  запишемо два рівняння за другим законом Кірхгофа

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}'_1 (R_1 + jX_{L1}) - \underline{I}'_2 jX_M, \\ 0 = \underline{I}'_2 [R_2 + j(X_{L2} - X_{C2})] - \underline{I}'_1 jX_M. \end{cases}$$

Підставимо числові значення і розв'яжемо цю систему

$$\underline{I}'_2 = 2,78 e^{j65,12^\circ} \text{ А, } \underline{U}_{xx} = 88,4 e^{-j24,9^\circ} \text{ В.}$$

Внутрішній опір еквівалентного генератора  $\underline{Z}_{екв}$  в даному випадку зручніше знайти як відношення напруги холостого ходу  $\underline{U}_{xx}$  до струму короткого замикання  $\underline{I}''_k$ , тобто струму, який протікає по вітці навантаження, коли  $\underline{Z}_n = 0$  (рис. 6.9, в). Для знаходження цього струму складемо два рівняння

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}''_1 (R_1 + jX_{L1}) - \underline{I}''_k jX_M, \\ 0 = \underline{I}''_k (R_2 + jX_{L2}) - \underline{I}''_1 jX_M, \end{cases}$$

підставивши в які числові значення та розв'язавши їх, одержимо

$$\underline{I}''_k = 6,862 e^{-j3,6^\circ} \text{ А.}$$

Звідки маємо

$$\underline{Z}_{екв} = \frac{\underline{U}_{xx}}{\underline{I}_k''} = 12,88 e^{-j21,3^\circ} = 12 - j4,7 \text{ Ом}.$$

Таким чином, визначили, що значення е.р.с. еквівалентного генератора  $\underline{E}_{екв} = \underline{U}_{xx} = 88,4 e^{-j24,9^\circ}$  В, а його внутрішнього опору  $\underline{Z}_{екв} = 12 - j4,7$  Ом.

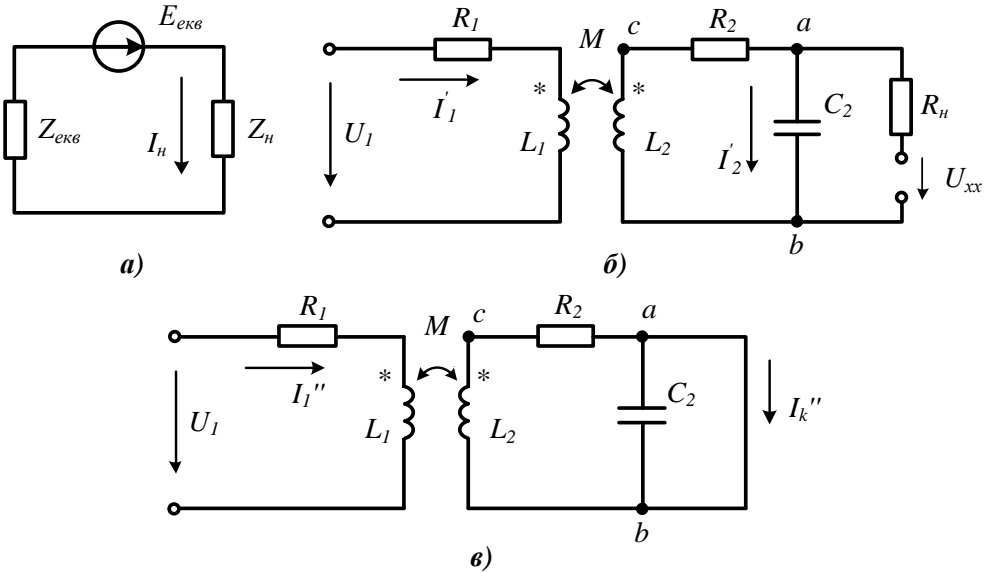


Рисунок 6.9

Правильність результатів розрахунку легко перевірити таким чином. В задачі 6.6 з опором навантаження  $R_H = 50$  Ом миттєве значення струму дорівнювало

$$i = 2 \sin(628t - 20^\circ) \text{ А}.$$

Підставимо в схемі рис. 6.9, а вказане значення опору навантаження і обчислимо діюче значення струму

$$\underline{I}_H = \frac{\underline{E}_{екв}}{\underline{Z}_{екв} + R_H} = 1,42 e^{-j20,5^\circ} \text{ А}.$$

Тоді миттєве значення цього струму

$$i = 2,008 \sin(628t - 20,5^\circ) \text{ А},$$

що й доводить правильність розрахунку.

Як відомо, максимальну потужність навантаження отримує, якщо його опір дорівнює комплексному *спряженому* значенню внутрішнього опору генератора. В нашій задачі це опір  $\underline{Z}_{екв}$  еквівалентного генератора. Тому опір навантаження повинен бути

$$\underline{Z}_H = 12 + j4,7 \text{ Ом}.$$

В цьому випадку струм навантаження

$$\underline{I}_H = \frac{E_{екв}}{\underline{Z}_{екв} + \underline{Z}_H} = 3,68 e^{j24,8^\circ} \text{ A},$$

а споживана ним активна потужність

$$P_{H\max} = I_H^2 R_H = 162,5 \text{ Вт}.$$

Для порівняння знайдемо потужність, споживану навантаженням в задачі 6.6,

$$P_H = I_H^2 R_H = 100 \text{ Вт}.$$

**6.8** В електричному колі (рис. 6.10, а) визначити ємність, яку слід підімкнути паралельно первинній обмотці (рис. 6.10, б) (поперечна компенсація) або послідовно з первинною обмоткою (рис. 6.10, в) (поздовжня компенсація), щоб коефіцієнт потужності кола став рівним одиниці. Параметри кола:  $X_1 = 12,8 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_H = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_H = 20 \text{ Ом}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ , коефіцієнт магнітного зв'язку  $k_{зв} = 0,5$ .

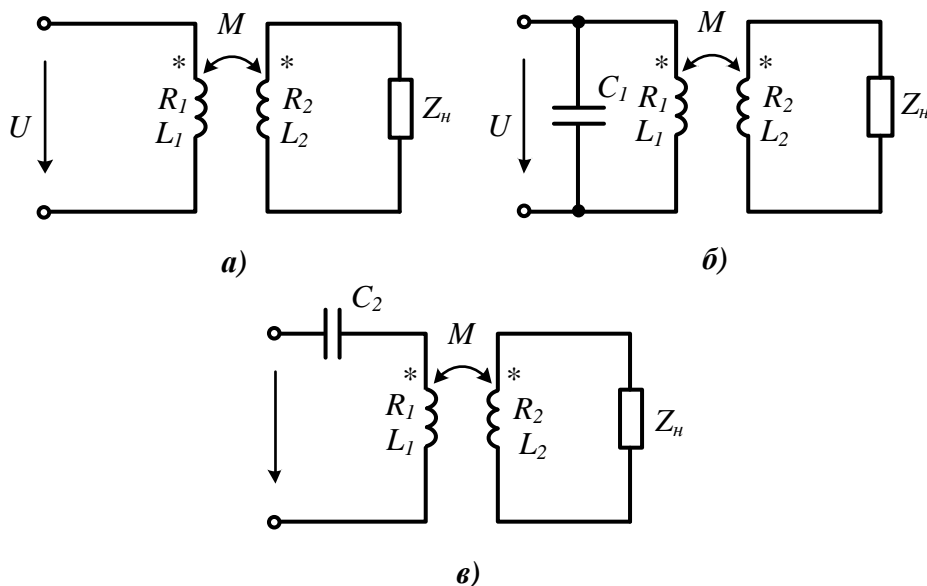


Рисунок 6.10

### Розв'язування

Нагадаємо, що *коефіцієнтом потужності* називають відношення активної потужності, що споживається колом, до повної потужності. В колах синусоїдного струму він дорівнює косинусу кута зсуву фаз між вхідною напругою і вхідним струмом.

*Коефіцієнт магнітного зв'язку* визначається виразом

$$k_{зв} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{X_M}{\sqrt{X_1 X_2}},$$

звідки легко знаходимо  $X_M = 8$  Ом.

Рівність одиниці коефіцієнта потужності рівносильна умові роботи схеми в резонансному режимі, за якого реактивна складова вхідного опору дорівнює нулю. Таким чином, необхідно знайти в схемах поперечної (рис. 6.10, б) і поздовжньої (рис. 6.10, в) компенсації вхідний комплексний опір кола та прирівняти його реактивну складову до нуля. З цією метою зручно скористатися схемою заміщення трансформатора з боку первинної обмотки. Тоді за умови поперечної компенсації схема має вигляд, що зображений на рис. 6.11, а, а за умови поздовжньої – на рис. 6.11, б.

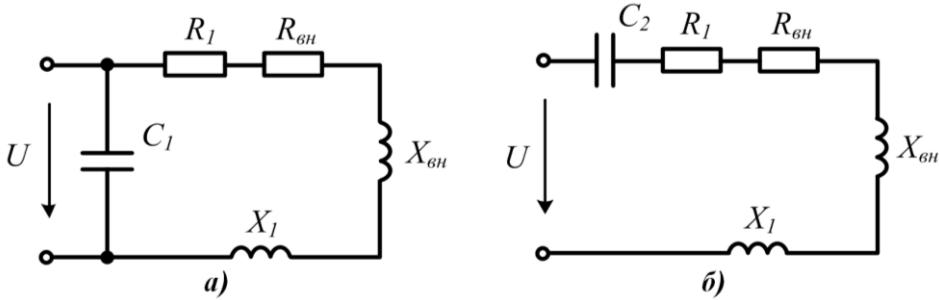


Рисунок 6.11

В цих схемах активний і реактивний опори, що вносяться другим контуром в перший, можна знайти з виразів

$$R_{\text{вн}} = (R_{\text{н}} + R_2) \frac{X_M^2}{(R_{\text{н}} + R_2)^2 + (X_{\text{н}} + X_2)^2},$$

$$X_{\text{вн}} = -(X_{\text{н}} + X_2) \frac{X_M^2}{(R_{\text{н}} + R_2)^2 + (X_{\text{н}} + X_2)^2}.$$

Після підстановки числових значень маємо  $R_{\text{вн}} = 0,64$  Ом,  $X_{\text{вн}} = -1,28$  Ом.

1. Визначимо значення ємності у випадку поперечної компенсації. Для цього запишемо вхідну комплексну провідність кола і розділимо її на дійсну та уявні частини

$$\underline{Y} = j \frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{(R_1 + R_{\text{вн}}) + j(X_1 + X_{\text{вн}})} =$$

$$= \frac{R_1 + R_{\text{вн}}}{(R_1 + R_{\text{вн}})^2 + (X_1 + X_{\text{вн}})^2} + j \left( \frac{1}{X_{C1}} - \frac{X_1 + X_{\text{вн}}}{(R_1 + R_{\text{вн}})^2 + (X_1 + X_{\text{вн}})^2} \right).$$

Прирівнюючи уявну частину до нуля (умова резонансу), отримаємо шукане значення опору ємності

$$X_{C1} = \frac{(R_1 + R_{\text{вн}})^2 + (X_1 + X_{\text{вн}})^2}{X_1 + X_{\text{вн}}} = 14,28 \text{ Ом}, \quad C_1 = \frac{1}{\omega X_{C1}} = 223 \text{ мкФ}.$$

2. За умови позовжньої компенсації маємо послідовний контур. Тоді опір емності в резонансному режимі кола визначається з виразу

$$X_{C2} = X_1 + X_{en} = 11,52 \text{ Ом}, \quad C_2 = \frac{1}{\omega X_{C2}} = 276 \text{ мкФ}.$$

**6.9** Для вимірювання взаємної індуктивності використано *мостову* схему (рис. 6.12). Рівновага мосту, тобто відсутність струму у вітці  $ab$ , що містить вимірювальний прилад ( $A$ ), досягнута шляхом зміни значення опорів  $R_1$  за таких параметрів:  $R_1 = 200 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 120 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 40 \text{ Ом}$ ,  $C = 0,25 \text{ мкФ}$ . Визначити індуктивності  $L_4$  та  $L_5$  і взаємну індуктивність між ними, якщо коефіцієнт магнітного зв'язку  $k_{36} = 0,5$ .

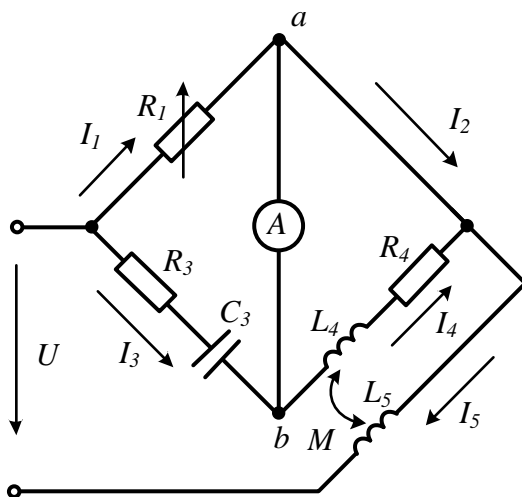


Рисунок 6.12

### Розв'язування

За умови рівноваги мосту потенціали точок  $a$  і  $b$  однакові ( $U_{ab} = 0$ ), тому однаковими є і напруги першої та третьої віток, тобто

$$\underline{I}_1 R_1 = \underline{I}_3 (R_3 - jX_{C3}).$$

З цієї ж причини дорівнюють одна одній напруги другої і четвертої віток. Водночас напруга другої вітки дорівнює нулю, оскільки в ній відсутній опір, а при знаходженні напруги четвертої вітки слід врахувати вплив індуктивності  $L_5$ . Таким чином, отримуємо ще одне рівняння

$$\underline{U}_4 = \underline{I}_4 (R_4 + jX_{L4}) \pm jX_M \underline{I}_5 = \underline{U}_2 = 0.$$

В цьому рівнянні знак другого доданку не визначено, тому що не задано спосіб вмикання котушок. За умови рівноваги мосту мають місце рівності  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$  і  $\underline{I}_3 = \underline{I}_4$ , тому за першим законом Кірхгофа

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_2 + \underline{I}_4 = \underline{I}_1 + \underline{I}_3.$$

Скориставшись останнім рівнянням, напругу для четвертої вітки можна переписати у вигляді

$$0 = \underline{I}_3 (R_4 + jX_{L4}) \pm jX_M (\underline{I}_1 + \underline{I}_3)$$

або

$$\underline{I}_3 [R_4 + j(X_{L4} \pm X_M)] = \mp jX_M \underline{I}_1.$$

Виразимо з першого рівняння  $\underline{I}_1$  та підставимо його в останній вираз, тоді

$$\underline{I}_3 [R_4 + j(X_{L4} \pm X_M)] = \mp jX_M \underline{I}_3 \frac{R_3 - jX_{C3}}{R_1}.$$

Прирівнюючи дійсні частини отриманого рівняння, отримаємо

$$R_4 = \mp \frac{X_M X_{C3}}{R_1},$$

звідки  $X_M = \mp \frac{R_1 R_4}{X_{C3}}$  або

$$M = R_1 R_4 C_3 = 2 \text{ мГн}.$$

Подвійний знак біля величини  $X_M$  означає, що результати вимірювань не залежать від способу вмикання котушок.

Прирівнюючи уявні частини, остаточно отримаємо

$$L_4 = M \left( 1 + \frac{R_3}{R_1} \right) = 3,2 \text{ мГн}, \quad L_5 = \frac{M^2}{k_{36}^2 L_4} = 5 \text{ мГн}.$$

### Задачі для самостійного розв'язування

**6.10** Активна потужність, яку споживає коло, що складається з двох послідовно з'єднаних індуктивно-зв'язаних котушок, за умови їх зустрічного вмикання в 16 разів перевищує потужність, ніж за узгодженого вмикання. Знайти активний опір другої котушки  $R_2$ , якщо її індуктивний опір  $X_2 = 45$  Ом. Параметри першої котушки:  $R_1 = 15$  Ом,  $X_1 = 25$  Ом. Коефіцієнт магнітного зв'язку  $k_{36} = 0,8$ .

**Відповідь:**  $R_2 = 12,1$  Ом.

**6.11** Дві індуктивно-зв'язані котушки з'єднані послідовно і увімкнені до джерела синусоїдної напруги з діючим значенням  $U = 100$  В. Через них протікає струм  $I = 2,5$  А. За умови підключення до цього ж джерела тільки першої котушки, струм в ній  $I_1 = 4$  А, а споживана потужність  $P_1 = 240$  Вт. При підключенні тільки другої, струм  $I_2 = 5$  А, потужність  $P_2 = 300$  Вт. Визначити спосіб вмикання котушок і значення взаємної індуктивності. Робоча частота  $f = 50$  Гц.

**Відповідь:** зустрічне,  $M = 10,3$  мГн.

**6.12** За схемою (рис. 6.13) визначити спосіб вмикання котушок, зобразити схему без осердя і записати рівняння за методом контурних струмів.

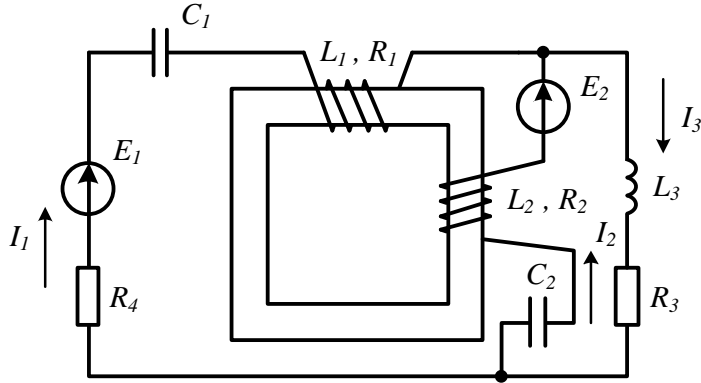


Рисунок 6.13

*Підказка.* Перш ніж розпочати розв'язування задачі, слід визначити напрям власних та взаємних потоків, які утворюють обмотки, що розташовані на осердді.

*Відповідь:* зустрічне.

**6.13** В електричному колі (рис. 6.14) з взаємними індуктивностями відомі його параметри:  $X_{L1} = 20$  Ом,  $X_{L3} = 40$  Ом,  $X_{C2} = 30$  Ом,  $X_M = 15$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом, струм  $I_3 = 2$  А. Знайти прикладена напругу  $U$ .

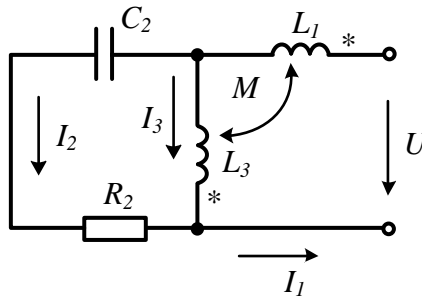


Рисунок 6.14

*Відповідь:*  $U = 49,1$  В.

**6.14** Визначити опір  $R_2$ , за яким коло (рис. 6.15) перебуватиме в стані резонансу, якщо  $R_1 = 5$  Ом,  $X_{L1} = 20$  Ом,  $X_{L2} = 15$  Ом,  $X_{C1} = 16$  Ом,  $X_M = 12$  Ом.

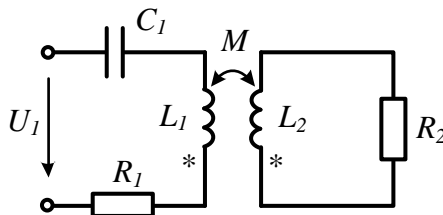


Рисунок 6.15

*Відповідь:*  $R_2 = 17,75$  Ом.



**6.15** Знайти, з яким значенням опору ємності  $X_C$  в колі, показаному на рис. 6.16, струм  $I_2$  не залежатиме від опору  $R$ . Визначити значення струму  $I_2$ . Параметри елементів кола такі:  $X_{L1} = 20$  Ом,  $X_{L2} = 15$  Ом,  $X_M = 18$  Ом,  $U = 190$  В.

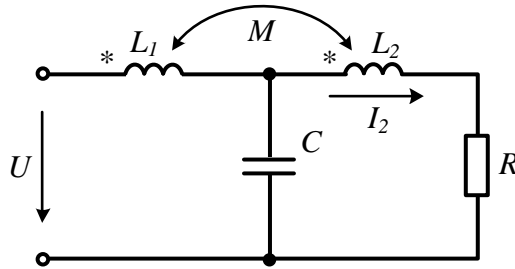


Рисунок 6.16

*Підказка.* Скласти систему рівнянь за законами Кірхгофа, виразити струм  $I_2$  через вхідну напругу і параметри кола, а ту складову, що містить  $R$ , прирівняти до нуля.

**Відповідь:**  $X_C = X_{L1}$ ,  $I_2 = 5$  А.

**6.16** В електричному колі (рис. 6.17) з параметрами  $X_1 = 20$  Ом,  $X_2 = 120$  Ом,  $X_M = 40$  Ом,  $R = 100$  Ом необхідно розрахувати потужність, яка витрачається в опорі  $R$ , для двох випадків – розімкнутого і замкнутого станів ключа  $K$ . Прикладена до кола напруга  $U = 210$  В.

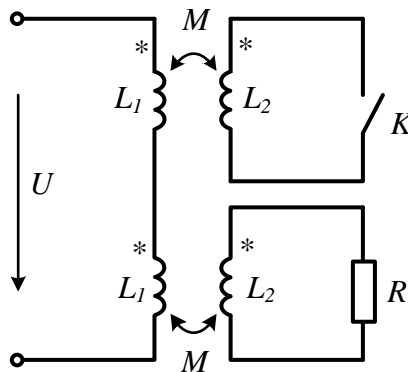


Рисунок 6.17

**Відповідь:** 269 Вт, 729 Вт.

**6.17** За умови роботи трансформатора без осердя в режимі холостого ходу, як це показано на рис. 6.18, той споживає активну потужність  $P_1 = 200$  Вт за вхідної напруги  $U_1 = 120$  В. В первинній обмотці протікає струм  $I_1 = 10$  А. Коефіцієнт магнітного зв'язку  $k_{ze} = 0,845$ . Визначити значення вихідної напруги  $U_2$  і зсув фаз між напругами  $U_1$  і  $U_2$ .

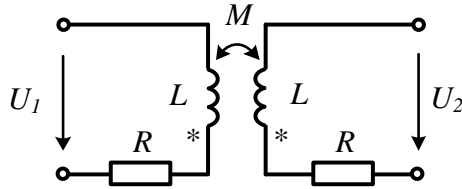


Рисунок 6.18

**Відповідь:**  $U_2 = 100 \text{ В}$ ,  $\beta_1 - \beta_2 = -9,6^\circ$ .

**6.18** Визначити напругу  $U_2$  в колі, показаному на рис. 6.19, якщо  $X_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_2 = 45 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 20 \text{ Ом}$ ,  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $U_1 = 100 \text{ В}$ ,  $k_{36} = 0,6$ .

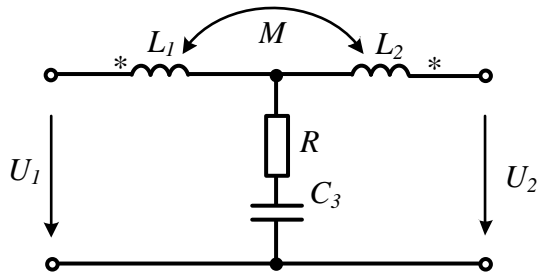


Рисунок 6.19

**Відповідь:**  $\underline{U}_2 = 393e^{-j15,3^\circ} \text{ В}$ .

**6.19** Визначити покази вольметра в електричному колі, наведеному на рис. 6.20, якщо задано його параметри:  $U = 200 \text{ В}$ ,  $R_1 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 80 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 80 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 50 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 130 \text{ Ом}$ ,  $X_{12} = 60 \text{ Ом}$ ,  $X_{23} = 40 \text{ Ом}$ . Опір вольметра вважати нескінченно великим. Струм  $I_2$ , який показаний на рисунку, відсутній. Водночас його напрям задано для правильного врахування способу вмикання котушок.

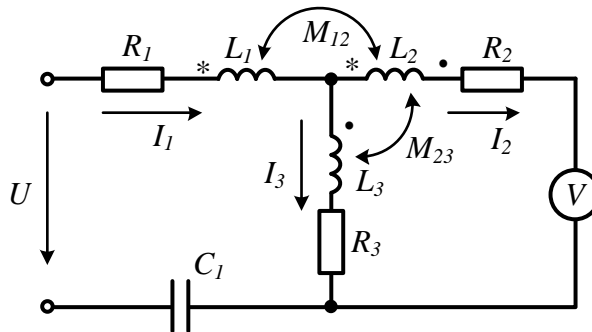


Рисунок 6.20

**Відповідь:** вольметр показує 158 В.

**6.20** Дві індуктивно-зв'язані котушки з'єднані паралельно і до них прикладено синусоїдну напругу, діюче значення якої 120 В. Активним опором котушок можна знехтувати. У випадку узгодженого вмикання струм в першій котушці  $I_1 = 0$ , у другій  $I_2 = 6$  А. За умови зустрічного вмикання струм у другій котушці в 2,5 раза більший за струм в першій. Визначити коефіцієнт магнітного зв'язку між котушками.

**Відповідь:**  $k_{зв} = 0,5$ .

**6.21** В колі (рис. 6.21)  $U = 50$  В,  $R_1 = 5$  Ом,  $X_{L1} = 9$  Ом,  $X_{L2} = 4$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом,  $X_{C3} = 2$  Ом. У випадку якого способу вмикання котушок (узгодженого чи зустрічного) і за якого значення коефіцієнта магнітного зв'язку  $k_{зв}$  струм  $I_3$  буде дорівнювати нулю? Яким за цих умов буде струм  $I_2$ ?

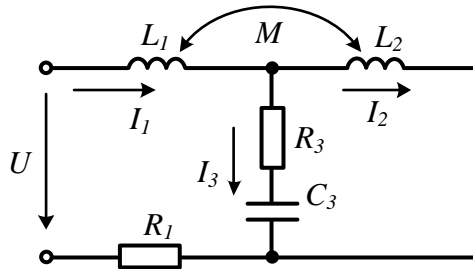


Рисунок 6.21

**Відповідь:** зустрічне,  $k_{зв} = 0,667$ ,  $I_2 = 7,07$  А.

**6.22** В електричному колі (рис. 6.22) з параметрами  $R_1 = 5$  Ом,  $X_{L2} = 8$  Ом,  $R_2 = 8$  Ом,  $X_{L3} = 6$  Ом,  $X_M = 5$  Ом,  $X_{C3} = 6$  Ом,  $U = 100$  В визначити, яка з котушок передає активну потужність в іншу котушку і знайти значення цієї потужності.

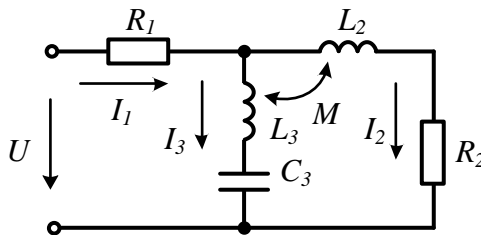


Рисунок 6.22

**Відповідь:** третя котушка передає в другу 162 Вт.

**6.23** В електричному колі, наведеному на рис. 6.23, визначити спосіб увімкнення індуктивно-зв'язаних котушок, накреслити схему без осердя та скласти систему рівнянь за методом контурних струмів в символічній формі.

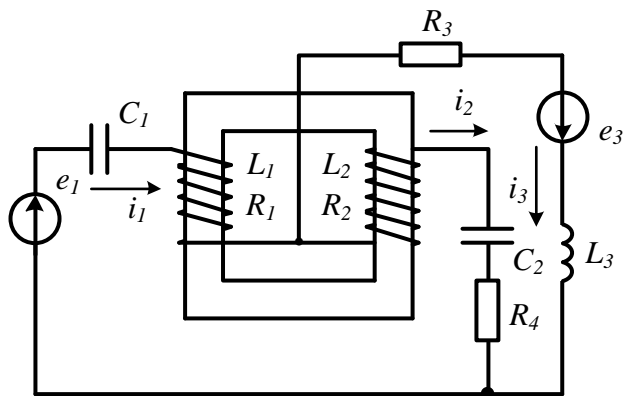


Рисунок 6.23

*Відповідь:* узгоджене.

**6.24** В електричному колі (рис. 6.24) з параметрами  $R = 20$  Ом,  $X_{L1} = 50$  Ом,  $X_{L2} = 120$  Ом,  $X_{L3} = 60$  Ом,  $X_{L4} = 40$  Ом,  $X_C = 180$  Ом,  $X_{M12} = 55$  Ом,  $X_{M34} = 30$  Ом,  $U_1 = 220$  В знайти напругу холостого ходу  $U_2$ .

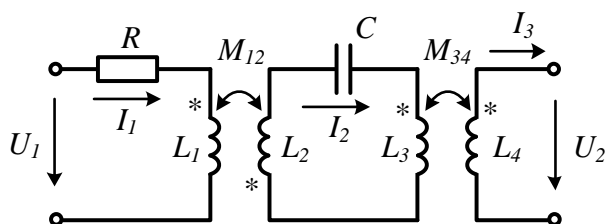


Рисунок 6.24

*Відповідь:*  $U_2 = 120$  В.

## Розділ 7

# ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

Розглядаються методи розрахунку трифазних кіл в симетричних, несиметричних та деяких аварійних режимах, зокрема і *метод симетричних складових*.

В більшості задач цього розділу системи е.р.с. генератора симетричні і в умовах задач про це не згадується.

**7.1** Два трифазні двигуни підімкнуті до трифазного генератора змінного струму з лінійною напругою 380 В. Перший двигун споживає потужність  $P_1 = 5$  кВт та має  $\cos \varphi_1 = 0,848$ . Його обмотки з'єднані трикутником. Другий двигун має потужність  $P_2 = 4$  кВт з  $\cos \varphi_2 = 0,743$  і його обмотки з'єднані зіркою. Визначити лінійні струми генератора.

### Розв'язування

Двигуни з'єднані паралельно, тому лінійні струми генератора слід знаходити за першим законом Кірхгофа як суму комплексних значень лінійних струмів окремих двигунів.

Знайти значення лінійного струму двигуна можна, знаючи, що потужність симетричного трифазного навантаження за будь-якого способу його з'єднання (зіркою або трикутником) виражається через лінійні величини за формулою

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi.$$

Таким чином, струм першого двигуна  $I_{1\text{л}} = \frac{P_1}{\sqrt{3} U_{\text{л}} \cos \varphi_1} = 8,96$  А.

Оскільки двигун є активно-індуктивним навантаженням, то струм відстає від лінійної напруги на кут  $\varphi_1 = \arccos(0,848) = 32^\circ$ , тому, якщо початкову фазу лінійної напруги прийняти рівною нулю, комплексне діюче значення лінійного струму першого двигуна буде рівним  $I_{1\text{л}} = 8,96 e^{-j32^\circ}$  А.

Аналогічно знаходимо лінійний струм другого двигуна

$$I_{2\text{л}} = \frac{P_2}{\sqrt{3} U_{\text{л}} \cos \varphi_2} = 8,18$$
 А.

Зсув фаз між напругою і цим струмом  $\varphi_2 = \arccos(0,743) = 42^\circ$  і комплексне діюче значення струму  $I_{2\text{л}} = 8,18 e^{-j42^\circ}$  А.

Тоді лінійний струм генератора  $I_{\text{л}} = I_{1\text{л}} + I_{2\text{л}} = 17,1 e^{-j36,8^\circ}$  А.

**7.2** В симетричному трифазному колі (рис. 7.1) ватметр показує 1100 Вт, струм в лінійному проводі 12 А, фазна напруга на навантаженні 127 В. Визначити опір навантаження і активну потужність джерела.

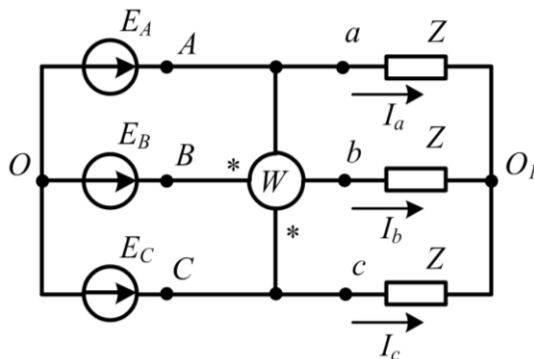


Рисунок 7.1

### Розв'язування

Розв'яжемо задачу двома способами.

1. Щоб знайти опір навантаження, потрібно знати значення напруги та струму в будь-якій фазі навантаження та кут між ними. В зв'язку з тим, що струмова обмотка ватметра увімкнена в фазу  $B$ , зручніше шукати струм і напругу цієї фази. Відповідно до позначених на схемі початків обмоток ватметра (зірочки) він показує значення

$$P_W = U_{ca} I_b \cos \varphi,$$

де  $\varphi$  – кут зсуву між напругою  $U_{ca}$  і струмом  $I_b$ .

У зв'язку з тим, що коло симетричне, всі лінійні струми однакові за значенням. Рівні також і всі лінійні напруги, які пов'язані з фазними співвідношенням

$$U_l = \sqrt{3} U_\phi = 220 \text{ В.}$$

Для розв'язання задачі зручно побудувати векторну діаграму, показавши на ній всі лінійні та фазні напруги і струм  $I_b$  (рис. 7.2). Струм відкладаємо так, щоб він відставав від напруги  $U_b$  на довільний, тобто допоки що невідомий, кут  $\varphi_b$ .

Зауважимо, що при побудові векторних діаграм в трифазних колах прийнято вектори напруг направляти від точок з більш низьким потенціалом до точок з більш високим потенціалом. Наприклад, на рис. 7.2 фазна напруга  $U_a$  спрямована з точки  $O_1$  в точку  $a$ .

Знайдемо кут  $\varphi$ , тобто кут між напругою  $U_{ca}$  і струмом  $I_b$ ,

$$\varphi = \arccos \frac{P_W}{U_{ca} I_b} = 65,4^\circ.$$

Як видно з векторної діаграми, кут

$$\varphi_b = 90^\circ - \varphi = 24,6^\circ.$$

Тепер, враховуючи, що струм  $I_b$  відстає від напруги  $U_b$ , можна знайти опір навантаження

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{U_b}{I_b} e^{j\varphi_b} = 10,58 e^{j24,6^\circ} = 9,62 + j4,41 \text{ Ом} .$$

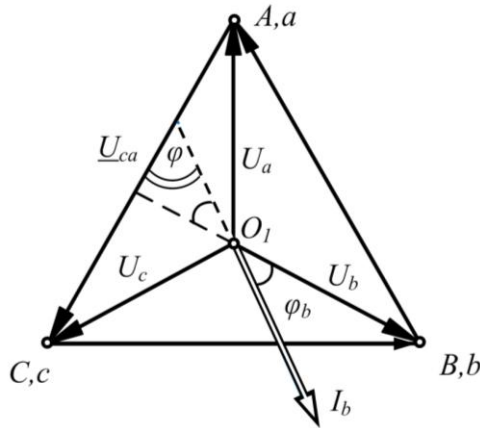


Рисунок 7.2

Звідси легко знайти активну потужність, споживану однією фазою  $B$ ,

$$P_b = I_b^2 R = 12^2 \cdot 9,62 = 1385 \text{ Вт} ,$$

і потужність джерела

$$P = 3P_b = 4155 \text{ Вт} .$$

2. Цю задачу також можна розв'язати без побудови векторної діаграми. Прийнемо початкову фазу фазної напруги  $U_a$  рівною нулю  $\beta_a = 0$ , тоді початкова фаза напруги  $U_b$  становить  $\beta_b = -120^\circ$ . Як наслідок, початкова фаза напруги  $U_{ab}$  дорівнює  $\beta_{ab} = 30^\circ$ , а початкова фаза напруги  $U_{ca} - \beta_{ca} = 150^\circ$ .

З виразу

$$\cos \varphi = \frac{P_W}{U_{ca} I_b} = \frac{1100}{220 \cdot 12} = 0,417$$

знаходимо зсув фаз між напругою  $U_{ca}$  і струмом  $I_b$ . Водночас пам'ятаємо, що *косинус* є парною функцією, тобто кут  $\varphi$  може бути як додатним, так і від'ємним:  $\varphi = \pm 65,4^\circ$ .

Якщо задатися значенням  $\varphi = +65,4^\circ$ , то з урахуванням співвідношення  $\varphi = \beta_{ca} - \alpha_b$ , отримаємо початкову фазу струму  $I_b$

$$\alpha_b = \beta_{ca} - \varphi = 150^\circ - 65,4^\circ = 84,6^\circ .$$

В цьому випадку аргумент повного комплексного опору навантаження фази  $B$  можна знайти за формулою

$$\varphi_b = \beta_b - \alpha_b = -120^\circ - 84,6^\circ = -204,6^\circ .$$

Оскільки модуль аргументу лінійного опору не може перевищувати  $90^\circ$ , інакше його активний опір буде від'ємним, то значення  $\varphi = +65,4^\circ$  є хибним і не дає потрібного розв'язку.

Отож вибираємо значення  $\varphi = -65,4^\circ$ . Повторюємо всі попередні міркування і отримуємо  $\alpha_b = 215,4^\circ$  або інакше  $-\alpha_b = 360^\circ - 215,4^\circ = -144,6^\circ$ .

Тоді кут  $\varphi_b = 24,6^\circ$ .

Після цього легко знаходимо опір навантаження

$$\underline{Z} = \frac{U_b}{I_b} = \frac{127 e^{-j120^\circ}}{12 e^{-j144,6^\circ}} = 10,58 e^{j24,6^\circ} = 9,62 + j4,41 \text{ Ом}.$$

**7.3** В триповерховому будинку на першому поверсі працюють електричні лампи, увімкнені паралельно, загальною потужністю  $P_1 = 2000$  Вт (опір  $R_1$ ), на другому –  $P_2 = 1500$  Вт ( $R_2$ ), на третьому –  $P_3 = 800$  Вт ( $R_3$ ) (рис. 7.3, а). Лінійна напруга на кожному поверсі 220 В. З невідомої причини обірвався провід  $Bb$ . Визначити напруги на лампах кожного поверху після обриву проводу.

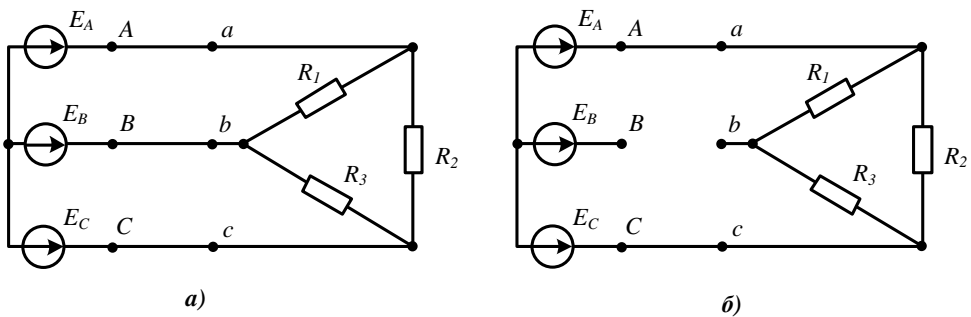


Рисунок 7.3

### Розв'язування

Електричні лампи розжарювання є активними опорами, тому можна відразу знайти значення опору ламп кожного поверху. Оскільки

$$P = \frac{U^2}{R},$$

то опір ламп першого поверху

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1} = 24,2 \text{ Ом},$$

другого

$$R_2 = \frac{U^2}{P_2} = 32,27 \text{ Ом},$$

третього



$$R_3 = \frac{U_{л}^2}{P_3} = 60,5 \text{ Ом} .$$

Після обриву лінійного проводу  $Bb$  опір  $R_2$  (лампи другого поверху) залишається під'єднаним до лінійної напруги. Лампи першого і третього поверхів виявляються з'єднаними послідовно і під'єднаними також до лінійної напруги (рис. 7.3, б). Струм, який протікає по цих лампах, знаходимо за законом Ома

$$I = \frac{U_{л}}{R_1 + R_3} = 2,6 \text{ А} .$$

Після цього визначаємо напруги на лампах першого

$$U_1 = IR_1 = 62,8 \text{ В}$$

і третього

$$U_3 = IR_3 = 157,2 \text{ В}$$

поверхів.

**7.4** В трифазному колі з несиметричним навантаженням (рис. 7.4) визначити покази ватметра, якщо  $R = X_L = X_C = 10 \text{ Ом}$ . Всі е.р.с. генератора дорівнюють 120 В і утворюють симетричну систему. Опір нейтрального проводу приймаємо рівним нулю.

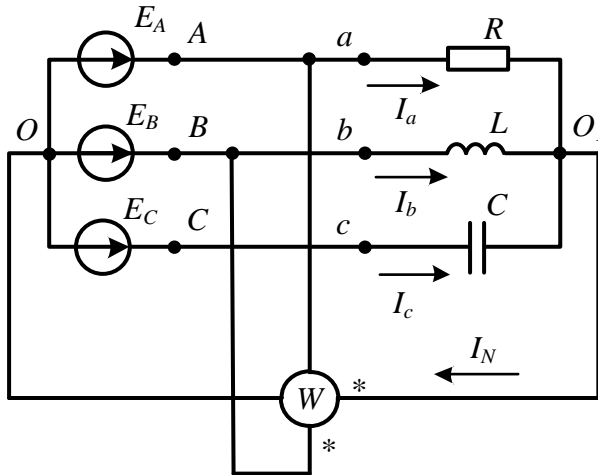


Рисунок 7.4

### Розв'язування

За такого способу вмикання ватметра, як це зображено на рис. 7.4, він показує значення

$$P_W = U_{ba} I_N \cos \varphi ,$$

де  $I_N$  – струм в нейтральному проводі, а  $\varphi$  – кут зсуву фаз між напругою  $U_{ba}$  і струмом  $I_N$ .

В нейтральному проводі опір відсутній, тому потенціали точок  $O$  і  $O_1$  однакові а, отже, за відсутності опорів в лінійних проводах, фазні напруги навантаження рівні відповідним е.р.с. генератора, тобто

$$\underline{U}_a = \underline{E}_A, \underline{U}_b = \underline{E}_B, \underline{U}_c = \underline{E}_C.$$

Це дозволяє знайти струми у фазах, а потім і струм в нейтральному проводі.

Задамо початкову фазу  $\underline{E}_A$  рівною нулю, тоді:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_a} = \frac{120}{10} = 12 \text{ A}; \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_b} = \frac{120e^{-j120^\circ}}{j10} = 12e^{-j210^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_c} = \frac{120e^{j120^\circ}}{-j10} = 12e^{j210^\circ} \text{ A}.$$

Струм в нейтральному проводі за першим законом Кірхгофа

$$\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = -8,78 = 8,78e^{-j180^\circ} \text{ A}.$$

Лінійна напруга

$$\underline{U}_{ba} = \underline{U}_b - \underline{U}_a = 207,8e^{-j150^\circ} \text{ В}.$$

Таким чином, кут між струмом  $\underline{I}_N$  та напругою  $\underline{U}_{ba}$  дорівнює

$$\varphi = -150^\circ - (-180^\circ) = 30^\circ,$$

а покази ватметра

$$P_W = 207,8 \cdot 8,78 \cdot \cos 30^\circ = 1580 \text{ Вт}.$$

**7.5** Визначити покази вольтметра, увімкненого так, як показано на рис. 7.5, якщо  $R = X_L = X_C = 20 \text{ Ом}$ . Лінійна напруга  $U_l = 220 \text{ В}$ . Опір вольтметра вважати нескінченно великим.

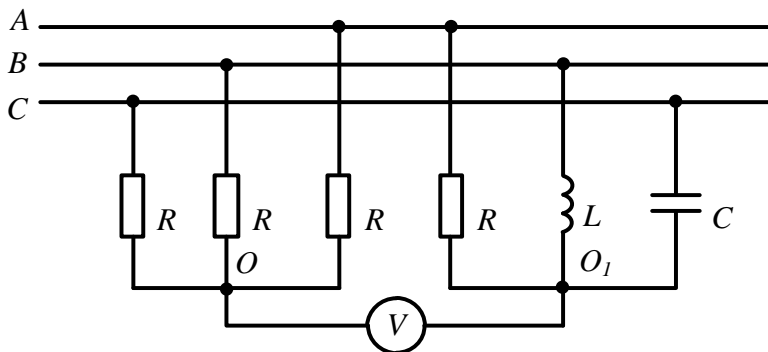


Рисунок 7.5

### Розв'язування

В зв'язку з тим, що в умові задачі задана лише одна лінійна напруга, то це

означає, що система е.р.с. генератора є симетричною, тому фазна напруга

$$U_{\phi} = \frac{U_{\lambda}}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В.}$$

Перше навантаження, що складається з трьох однакових опорів, симетричне, тому потенціал точки  $O$  дорівнює потенціалу нейтральної точки генератора. Для другого навантаження, яке є несиметричним, ця умова не виконується, тому вольтметр показує різницю потенціалів між точками  $O$  і  $O_1$ , яку можна знайти за відомою формулою для визначення напруги зсуву нейтралі

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{U}_a \underline{Y}_a + \underline{U}_b \underline{Y}_b + \underline{U}_c \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

де  $\underline{Y}_a = \frac{1}{R}$ ,  $\underline{Y}_b = \frac{1}{jX_L}$ ,  $\underline{Y}_c = \frac{1}{-jX_C}$ .

Прийнявши початкову фазу напруги  $U_a$  рівною нулю, отримаємо

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{127 \cdot 0,05 + 127 e^{-j120^\circ} \cdot 0,05 e^{-j90^\circ} + 127 e^{-j240^\circ} \cdot 0,05 e^{j90^\circ}}{0,05 - j0,05 + j0,05} = -93 \text{ В.}$$

Таким чином, вольтметр покаже 93 В.

**7.6** В трифазному колі з симетричною системою е.р.с. генератора струм у закороченій фазі  $C$  дорівнює нулю (рис. 7.6). Визначити значення опору  $Z_a$ , якщо  $X_b = 10 \text{ Ом}$ .

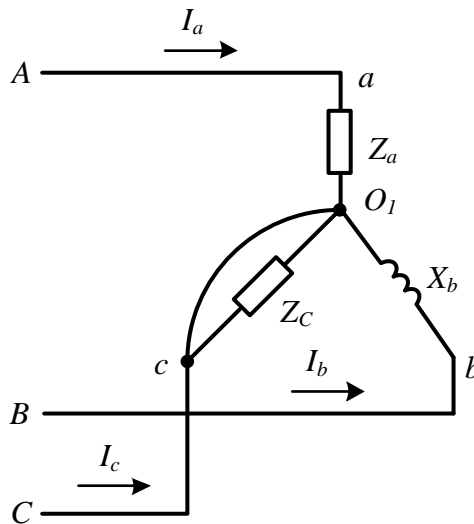


Рисунок 7.6.

### Розв'язування

За умови закороченого навантаження фази  $C$  потенціал точки  $O_1$  дорівнюватиме потенціалу точки  $c$ , тому до навантаження фази  $A$  прикладена лінійна напру-

га  $\underline{U}_{AC}$ , а до навантаження фази  $B$  – лінійна напруга  $\underline{U}_{BC}$ . Якщо прийняти початкову фазу напруги  $\underline{U}_{BC}$  рівною нулю, то початкова фаза напруги  $\underline{U}_{CA}$  буде  $\beta_{CA} = -120^\circ$ , звідки кут  $\beta_{AC} = 60^\circ$ .

Струм у фазі  $B$

$$\underline{I}_b = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_b} = \frac{U_\lambda}{X_b e^{j90^\circ}} = \frac{U_\lambda}{X_b} e^{-j90^\circ}.$$

Струм у фазі  $A$

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_{AC}}{\underline{Z}_a} = \frac{U_\lambda e^{j60^\circ}}{Z_a e^{j\varphi_a}} = \frac{U_\lambda}{Z_a} e^{j(60^\circ - \varphi_a)}.$$

За першим законом Кірхгофа

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0.$$

За умовою задачі  $\underline{I}_c = 0$ .

Тоді  $\underline{I}_a = -\underline{I}_b$  або

$$\frac{U_\lambda}{Z_a} e^{j(60^\circ - \varphi_a)} = -\frac{U_\lambda}{X_b} e^{-j90^\circ}.$$

Скоротивши на  $U_\lambda$ , маємо  $\frac{1}{Z_a} e^{j(60^\circ - \varphi_a)} = -\frac{1}{X_b} e^{-j90^\circ} = \frac{1}{X_b} e^{j90^\circ}$ .

Прирівнюючи модулі та аргументи комплексних чисел, отримуємо

$$\underline{Z}_a = X_b e^{-j30^\circ} = 10 e^{-j30^\circ} \text{ Ом.}$$

**7.7** В трифазному колі (рис. 7.7, а)  $E_A = 220 \text{ В}$ ,  $R_a = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{Ca} = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_b = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_{Lb} = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_c = 5 \text{ Ом}$ . Знайти струми в колі за умови нормального режиму роботи, а також за умови обриву лінійного проводу між точками  $C$  і  $c$ . Визначити напругу в місці обриву і побудувати для цього режиму якісну (без дотримання масштабу) векторну діаграму.

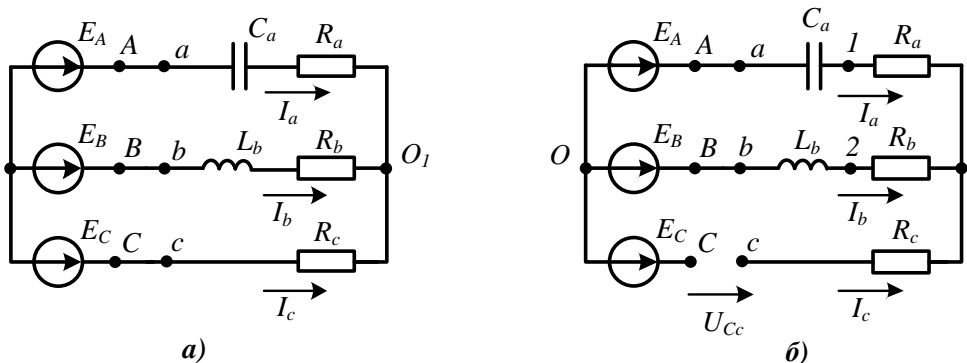


Рисунок 7.7

### Розв'язування

Знайдемо попередньо повні комплексні опори та провідності кожної фази

$$\underline{Z}_a = 5 - j10 = 11,18e^{-j63,43^\circ} \text{ Ом}, \quad \underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a} = 0,0894e^{j63,43^\circ} \text{ См},$$

$$\underline{Z}_b = 15 + j15 = 21,21e^{j45^\circ} \text{ Ом}, \quad \underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b} = 0,0471e^{-j45^\circ} \text{ См},$$

$$\underline{Z}_c = 5 \text{ Ом}, \quad \underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c} = 0,2 \text{ См}.$$

Розрахуємо струми в нормальному режимі, для чого знайдемо напругу зсуву нейтралі, враховуючи, що трифазна система е.р.с. генератора симетрична

$$\begin{aligned} \underline{U}_{O_1O} &= \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_a + \underline{E}_B \underline{Y}_b + \underline{E}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \\ &= \frac{220 \cdot 0,0894e^{j63,43^\circ} + 220e^{-j120^\circ} \cdot 0,0471e^{-j45^\circ} + 220e^{-j240^\circ} \cdot 0,2}{0,04 + j0,08 + 0,0333 - j0,0333 + 0,2} = 208,7e^{j104^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Лінійні струми

$$\underline{I}_a = (\underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}) \underline{Y}_a = 30,21e^{j26,63^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_b = (\underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}) \underline{Y}_b = 18,74e^{-j143,6^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_c = (\underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}) \underline{Y}_c = 12,15e^{j191,7^\circ} \text{ А}.$$

Можна переконатись, що для знайдених значень струмів виконується перший закон Кірхгофа.

Знаходження струмів за умови обриву проводу  $C$  (рис. 7.7, б) значно простіше, тому що струм  $\underline{I}_c = 0$ . Тоді за першим законом Кірхгофа  $\underline{I}_b = -\underline{I}_a$ . Застосувавши другий закон Кірхгофа для контуру, складеного з фаз  $A$  і  $B$ , запишемо

$$\underline{I}_a (R_a - jX_{Ca}) - \underline{I}_b (R_b + jX_{Lb}) = \underline{E}_A - \underline{E}_B,$$

звідки отримаємо

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{(R_a + R_b) - j(X_{Lb} - X_{Ca})} = 18,5e^{j16^\circ} \text{ А}.$$

Напругу обриву між точками  $C$  і  $c$  обчислимо, склавши рівняння за другим законом Кірхгофа для умовного контуру, який включає цю напругу

$$\underline{I}_a (R_a - jX_{Ca}) - \underline{U}_{Cc} = \underline{E}_A - \underline{E}_C,$$

звідки

$$\underline{U}_{Cc} = \underline{I}_a (R_a - jX_{Ca}) - \underline{E}_A + \underline{E}_C = 193,8e^{j191,4^\circ} \text{ В}.$$

За умови обриву проводу в схемі всього два лінійних струми, тому побудову діаграми можна починати з будь-якого струму, наприклад, зі струму  $\underline{I}_a$  (рис. 7.8).

Побудуємо далі всі напруги в цій фазі, починаючи з точки  $O_1$ . Напруга на ді-

лянці  $O_1 - 1$  збігається за напрямом зі струмом  $I_a$ , а на ділянці  $1 - a$  відстає від струму на  $90^\circ$  (на цій ділянці увімкнена ємність). Оскільки опір лінійного проводу прийнято рівним нулю, то точки  $A$  і  $a$  збігаються на діаграмі (їх потенціали рівні). Нагадаємо, що діаграма струмів – променева. Струм  $I_b$  відкладаємо на діаграмі рівним за величиною струму  $I_a$  і протилежним за напрямом ( $I_b = -I_a$ ). Потім будемо всі напруги фази  $B$ . Аналогічно попереднім отримуємо точки  $b$  і  $B$ , які збігаються. За симетричної системи е.р.с. генератора точки  $A, B, C$  є вершинами рівностороннього трикутника, тому точку  $C$  на діаграмі знаходимо, побудувавши на прямій  $AB$  рівносторонній трикутник таким чином, щоб чергування фаз було за годинниковою стрілкою (див. рис. 7.8). Центром цього трикутника є точка  $O$  – нейтральна точка генератора. У фазі  $C$  струм відсутній, тому потенціал точки  $c$  рівний потенціалу точки  $O_1$ . Напряга між точками  $C$  і  $c$  та є напругою обриву.

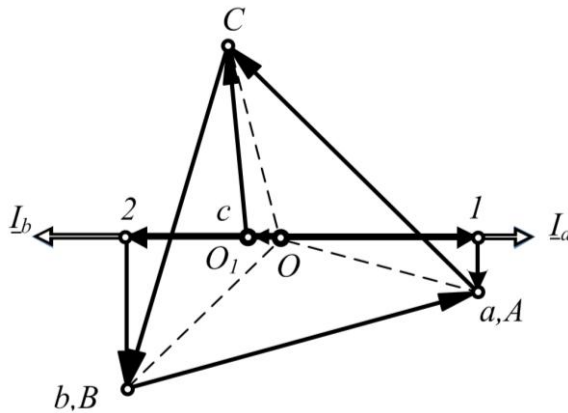


Рисунок 7.8

**7.8** В трифазному електричному колі (рис. 7.9)  $E_A = 220$  Ом,  $X_{Cab} = 20$  Ом,  $R_{bc} = X_{Lbc} = 10$  Ом,  $R_{ca} = 20$  Ом. За умови обриву фазного проводу  $ca$  знайти всі струми та якісно побудувати векторні діаграми напруг і струмів.

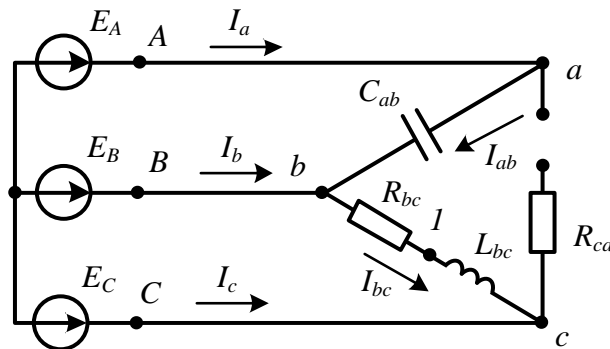


Рисунок 7.9

### Розв'язування

У лінійних провідниках відсутні опори, тому до навантажень фаз прикладено лінійні напруги генератора. Фазний провідник  $ca$  обірваний, струм в ньому дорівнює нулю, а решта фазних струмів знаходимо за виразами

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\underline{E}_A \sqrt{3} e^{j30^\circ}}{-jX_{Cab}} = 19,05 e^{j120^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{\underline{E}_A \sqrt{3} e^{-j90^\circ}}{R_{bc} + jX_{Lbc}} = 26,94 e^{-j135^\circ} \text{ А}.$$

Як видно зі схеми,  $\underline{I}_a = \underline{I}_{ab}$ ,  $\underline{I}_c = -\underline{I}_{bc}$ , а струм  $\underline{I}_b$  знаходиться за першим законом Кірхгофа  $\underline{I}_b = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}$ .

Таким чином,

$$\underline{I}_a = 19,05 e^{j120^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_b = 36,8 e^{-j105^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_c = 26,94 e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Побудову векторної діаграми зручніше розпочати зі струму більш складної фази, тобто зі струму  $\underline{I}_{bc}$ , і відразу ж відкласти струм  $\underline{I}_c = -\underline{I}_{bc}$  (рис. 7.10).

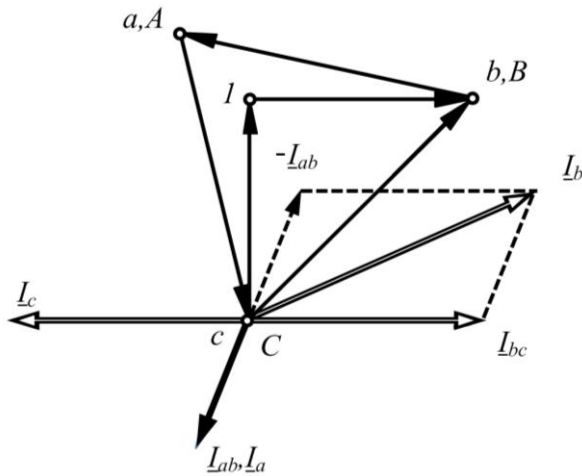


Рисунок 7.10

Розташуємо точку  $c$ , потенціал якої дорівнює потенціалу точки  $C$ , на початку вектора струму  $\underline{I}_{bc}$  і відкладемо на ділянці  $c-1$ , де знаходиться індуктивність, вектор напруги, який випереджає струм на  $90^\circ$ .

З точки  $1$  до точки  $b$  ( $B$ ) відкладаємо напругу на активному опорі  $R_{bc}$ , яка збігається за фазою зі струмом  $\underline{I}_{bc}$ . Знаючи положення на діаграмі точок  $C$  і  $B$ , побудуємо рівносторонній трикутник за стороною  $BC$  і визначимо положення точки  $A$  ( $a$ ). Струм  $\underline{I}_{ab} = \underline{I}_a$  випереджає напругу  $\underline{U}_{ab}$  на  $90^\circ$ . Струм  $\underline{I}_b$  будемо, скориставшись першим законом Кірхгофа.

**7.9** Визначити аналітично і графічно симетричні складові заданої на рис. 7.11, а системи векторів струму.

**Розв'язування**

1. Щоб знайти аналітично симетричні складові несиметричної системи векторів струму, зображеної на рис. 7.11, а, слід записати комплексні значення струмів, оскільки необхідно застосувати такі вирази:

1) для струму прямої послідовності:

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{3}(\underline{I}_a + a\underline{I}_b + a^2\underline{I}_c);$$

2) для струму зворотної послідовності:

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{3}(\underline{I}_a + a^2\underline{I}_b + a\underline{I}_c);$$

3) для струму нульової послідовності:

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c).$$

В наведених формулах стала  $a = e^{j120^\circ}$  – це оператор повороту.

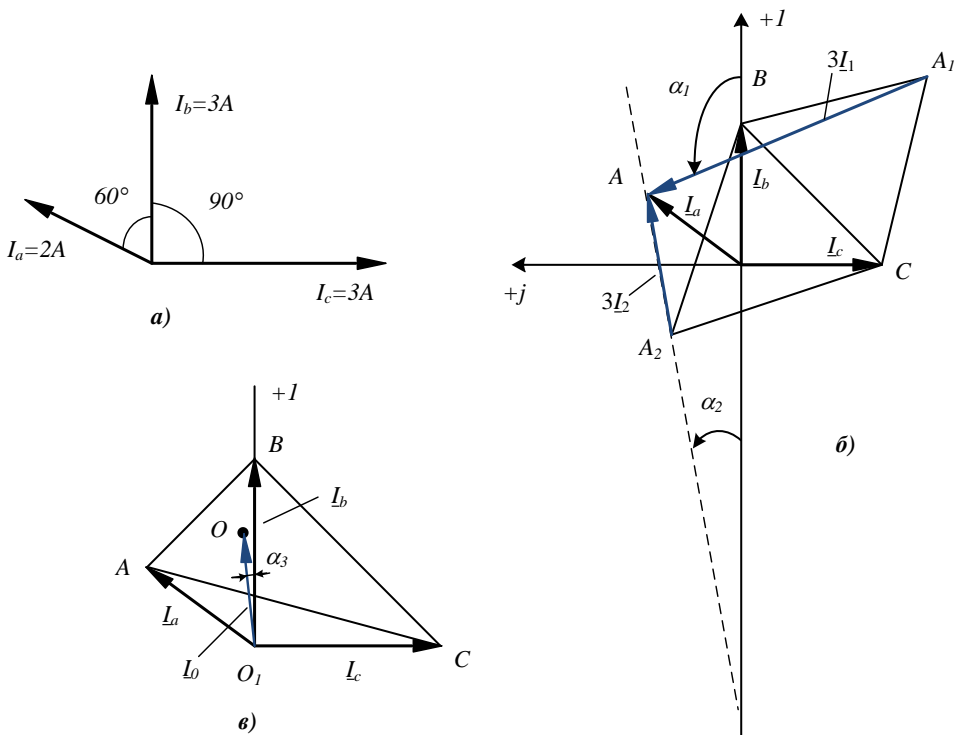


Рисунок 7.11

Для запису струмів в комплексній формі слід розташувати цю систему век-



торів на комплексній площині в зручному положенні. Так, наприклад, одним з можливих способів буде розміщення вектора струму  $\underline{I}_b$  вздовж додатного напрямку дійсної осі. В цьому випадку запис струмів в комплексній формі матиме вигляд:

$$\underline{I}_b = 3 \text{ А}, \quad \underline{I}_a = 2e^{j60^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_c = 3e^{-j90^\circ} \text{ А}.$$

Підставивши ці значення у формули, одержимо

$$\underline{I}_1 = 2,2e^{j118^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_2 = 1,71e^{j7,06^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_0 = 1,4e^{-j17,6^\circ} \text{ А}.$$

2. *Графічна* побудова симетричних складових здійснюється таким чином.

Будуємо у вибраному масштабі вектори струмів на комплексній площині. Позначимо кінці відповідних векторів літерами  $A, B, C$  (рис. 7.11, б). З'єднаємо точки  $B$  і  $C$  прямою лінією і побудуємо на ній два рівносторонніх трикутника. Якщо дивитися з точки  $B$  у точку  $C$  вздовж цієї лінії, то вершину рівностороннього трикутника, розташовану ліворуч від цієї лінії, позначимо буквою  $A_1$ , а праворуч – буквою  $A_2$ . З'єднаємо точку  $A$  з точками  $A_1$  і  $A_2$ . Якщо отримані вектори  $AA_1$  і  $AA_2$  записати у вигляді комплексних чисел, для то симетричних складових струмів прямої і зворотної послідовностей маємо

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{3} AA_1 e^{j\alpha_1}, \quad \underline{I}_2 = \frac{1}{3} AA_2 e^{j\alpha_2}.$$

Щоб графічно знайти нульову послідовність, потрібно побудувати трикутник з вершинами в точках  $A, B, C$ , знайти його центр як перетин медіан (точка  $O$  на рис. 7.11, в), і тоді  $\underline{I}_0 = O_1 O e^{j\alpha_3}$ .

**7.10** Оцінити вплив нейтрального проводу на ступінь несиметрії фазних напруг навантаження в трифазному колі рис. 7.12, якщо  $R_a = R_b = R_c = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_N = 5 \text{ Ом}$ ,  $E_A = 220 \text{ В}$ .

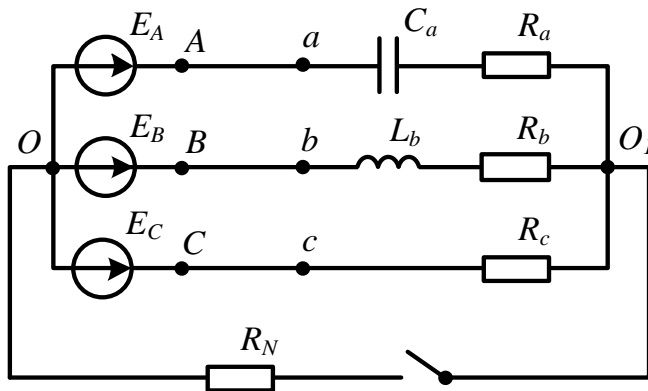


Рисунок 7.12

### Розв'язування

Зазвичай коефіцієнтом несиметрії оцінюють систему лінійних напруг і визначають його як відношення напруги зворотної послідовності до напруги прямої послідовності

$$\varepsilon = \frac{U_2}{U_1} \cdot 100\% .$$

Несиметрію фазних напруг в такий спосіб оцінювати не можна, тому що фазні напруги можуть мати ще й напругу нульової послідовності. Під час розв'язування даної задачі ступінь несиметрії фазних напруг будемо визначати умовно, як відношення мінімальної фазної напруги до максимальної. Таким чином, за симетричних напруг цей коефіцієнт дорівнює одиниці, а за умови несиметрії – менший одиниці.

Щоб знайти фазні напруги навантаження, слід знати фазні струми. Для цього необхідно знайти напругу зсуву нейтралі.

1. Без нейтрального проводу напруга зсуву нейтралі

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_a + \underline{E}_B \underline{Y}_b + \underline{E}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = 110 e^{j112^\circ} \text{ В.}$$

Тоді струми у фазах

$$\begin{aligned} \underline{I}_a &= (\underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}) \underline{Y}_a = 25,1 e^{j5,26^\circ} \text{ А,} \\ \underline{I}_b &= (\underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}) \underline{Y}_b = 21,24 e^{-j148,25^\circ} \text{ А,} \\ \underline{I}_c &= (\underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}) \underline{Y}_c = 11,22 e^{j127,8^\circ} \text{ А,} \end{aligned}$$

а фазні напруги

$$\begin{aligned} \underline{U}_a &= \underline{I}_a \underline{Z}_a = 280,3 e^{-j21,3^\circ} \text{ В,} \\ \underline{U}_b &= \underline{I}_b \underline{Z}_b = 300,4 e^{-j109,25^\circ} \text{ В,} \\ \underline{U}_c &= \underline{I}_c \underline{Z}_c = 112,2 e^{j127,8^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Відтак умовний коефіцієнт несиметрії фазних напруг

$$k_u = \frac{U_c}{U_b} = \frac{112,2}{300,4} = 0,373 .$$

2. За наявності нейтрального проводу напруга зсуву нейтралі

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_a + \underline{E}_B \underline{Y}_b + \underline{E}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N} = 58,77 e^{j110,8^\circ} \text{ В.}$$

Струми у фазах

$$\underline{I}_a = (\underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}) \underline{Y}_a = 22,1 e^{j13,7^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_b = (\underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}) \underline{Y}_b = 18,46 e^{-j155^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_c = (\underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}) \underline{Y}_c = 16,22 e^{j123,3^\circ} \text{ A}.$$

Струм в нейтральному проводі

$$\underline{I}_N = \underline{U}_{O_1O} \underline{Y}_N = 11,75 e^{j110,8^\circ} \text{ A}.$$

Фазні напруги

$$\underline{U}_a = \underline{I}_a \underline{Z}_a = 247 e^{-j12,8^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_b = \underline{I}_b \underline{Z}_b = 261 e^{-j110^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_c = \underline{I}_c \underline{Z}_c = 162,2 e^{j123,3^\circ} \text{ В},$$

а умовний коефіцієнт несиметрії фазних напруг

$$k_n = \frac{U_c}{U_b} = \frac{162,2}{261} = 0,621.$$

Виконаний розрахунок показує, що наявність нейтрального проводу *вирівнює* (симетрує) фазні напруги за умови несиметричного навантаження. Це означає, що у випадку, коли опір нейтрального проводу дорівнює нулю, всі фазні напруги навантаження за відсутності опорів в лінійних проводах рівні між собою і  $k_n = 1$ .

**7.11** Трифазний електричний двигун, з'єднаний зіркою, підімкнутий до несиметричного джерела, лінійні напруги якого утворюють прямокутний трикутник (рис. 7.13, а), де  $\underline{U}_{AB} = 80 \text{ В}$ ,  $\underline{U}_{BC} = 60 \text{ В}$ . Опір фази двигуна струму прямої послідовності  $\underline{Z}_1 = 40 e^{j60^\circ} \text{ Ом}$ , струму зворотної послідовності  $\underline{Z}_2 = 15 e^{j72^\circ} \text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх фазах. Внутрішнім опором фаз джерела і опорами проводів лінії можна знехтувати.

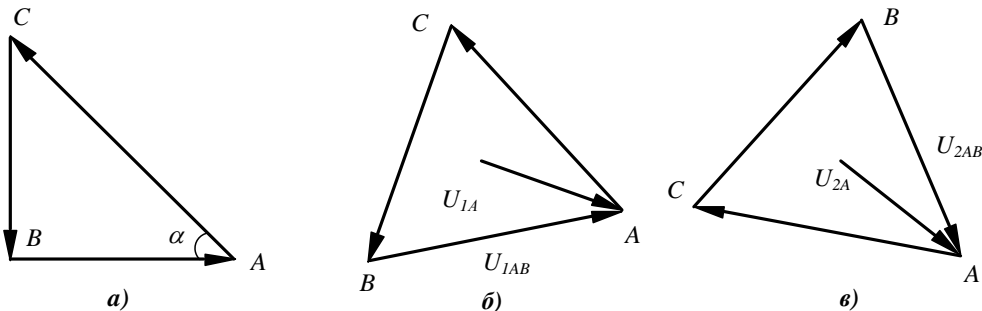


Рисунок 7.13

### Розв'язування

Задачу будемо розв'язувати застосовуючи метод симетричних складових. Для цього необхідно визначити симетричні складові *фазних* напруг джерела. В

умові задано лінійні напруги, тому потрібно спочатку знайти симетричні складові системи лінійних напруг, а вже потім перейти до фазних.

Використовуючи рис. 7.13, а, запишемо комплексні значення лінійних напруг:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= 80 \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = 60 e^{-j90^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_{CA} &= \sqrt{U_{AB}^2 + U_{BC}^2} e^{j(180^\circ - \alpha)} = 100 e^{j144,13^\circ} \text{ В}, \end{aligned}$$

де  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{U_{BC}}{U_{AB}}$ .

Визначимо їх симетричні складові:

$$\underline{U}_{1л} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{AB} + a \underline{U}_{BC} + a^2 \underline{U}_{CA}) = 78,07 e^{j17,84^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{2л} = \frac{1}{3} (\underline{U}_{AB} + a^2 \underline{U}_{BC} + a \underline{U}_{CA}) = 23,9 e^{-j75,6^\circ} \text{ В}.$$

Нульова послідовність цієї системи векторів відсутня, тому що сума лінійних напруг завжди дорівнює нулю. Знаходимо тепер за відомими симетричними складовими лінійних напруг симетричні складові фазних. Як видно з рис. 7.13, б, фазна напруга прямої послідовності фази А пов'язана з прямою послідовністю лінійної напруги  $\underline{U}_{1AB}$  співвідношенням

$$\underline{U}_{1A} = \frac{\underline{U}_{1AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}.$$

Фазна напруга зворотної послідовності (рис. 7.13, в) – виразом

$$\underline{U}_{2A} = \frac{\underline{U}_{2AB}}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ}.$$

Таким чином,  $\underline{U}_{1\phi} = 45,07 e^{-j12,76^\circ} \text{ В}$ ,  $\underline{U}_{2\phi} = 13,8 e^{-j45,6^\circ} \text{ В}$ .

Симетричні складові струмів у фазах трифазних симетричних кіл знаходимо за законом Ома

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1\phi}}{\underline{Z}_1} = \frac{45,07 e^{-j12,76^\circ}}{40 e^{j60^\circ}} = 1,127 e^{-j72,76^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2\phi}}{\underline{Z}_2} = \frac{13,8 e^{-j45,6^\circ}}{15 e^{j72^\circ}} = 0,92 e^{-j117,6^\circ} \text{ А}.$$

Нульову складову фазних струмів можна не шукати. Вона дорівнює нулю, оскільки в колі нульовий провід відсутній.

Струми в фазах знаходяться як сума відповідних симетричних складових

$$\underline{I}_a = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1,89 e^{-j92,8^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_b = a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 = 0,339 e^{j122,2^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_c = a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 = 1,63 e^{j80,4^\circ} \text{ А}.$$

**7.12** В симетричному трифазному колі (рис. 7.14) відомі такі параметри:

1) опори генератора і двигуна струмам:

- прямої послідовності  $Z_{1Г} = j12 \text{ Ом}$ ,  $Z_{1Д} = 5 + j10 \text{ Ом}$ ;

- зворотної послідовності  $Z_{2Г} = j3 \text{ Ом}$ ,  $Z_{2Д} = 3 + j4 \text{ Ом}$ ;

- нульової послідовності  $Z_{0Г} = j2 \text{ Ом}$ ,  $Z_{0Д} = j1 \text{ Ом}$ ;

2) опори заземлення нейтральних точок генератора і навантаження:

$R_{ГЗ} = R_{ДЗ} = 2 \text{ Ом}$ ;

3) фазна напруга генератора:  $E_A = 220 \text{ В}$ .

Опором лінійних проводів можна знехтувати.

Визначити:

1) струми у фазах і нейтральному проводі при обриві лінійного проводу  $B$  (див. рис. 7.14);

2) фазні напруги на обмотках двигуна;

3) напругу в місці обриву.

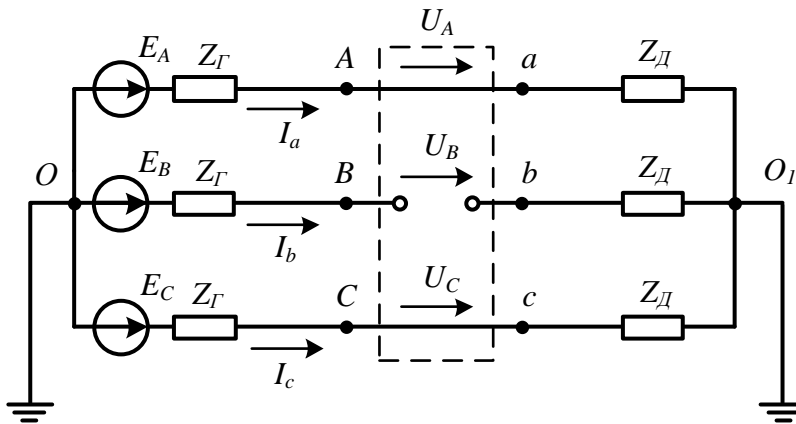


Рисунок 7.14

### Розв'язування

1. За умови локального порушення симетрії і наявності в трифазному колі обертових машин слід застосовувати метод симетричних складових. З цією метою в місці порушення симетрії (на рис. 7.14 пунктирний прямокутник) ділянки лінії замінюємо напругами (теорема компенсації). При цьому, як видно зі схеми,  $\underline{U}_A = \underline{U}_C = 0$ , а напруга  $\underline{U}_B$  допоки невідома. Розкладаючи цю несиметричну систему напруг на симетричні складові ( $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_0$ ) і застосовуючи принцип накладення, подаємо вихідну схему у вигляді трьох незалежних контурів – для прямої (рис. 7.15, а), зворотної (рис. 7.15, б) і нульової (рис. 7.15, в) послідовностей однієї тільки фази А.

Симетрична система е.р.с. генератора містить тільки пряму послідовність, тому в наведених схемах зворотної та нульової послідовностей відсутня е.р.с. ге-

нератора. В схемі нульової послідовності фазні струми збігаються за фазою, тому в нейтральному проводі (на схемі рис. 7.14 – це земля) протікає струм  $\underline{I}_{0N} = 3\underline{I}_0$  і в схему цієї послідовності додається потрібне значення опору нейтрального проводу. В даній задачі  $Z_{0N} = (R_{ГЗ} + R_{ДЗ})$ .

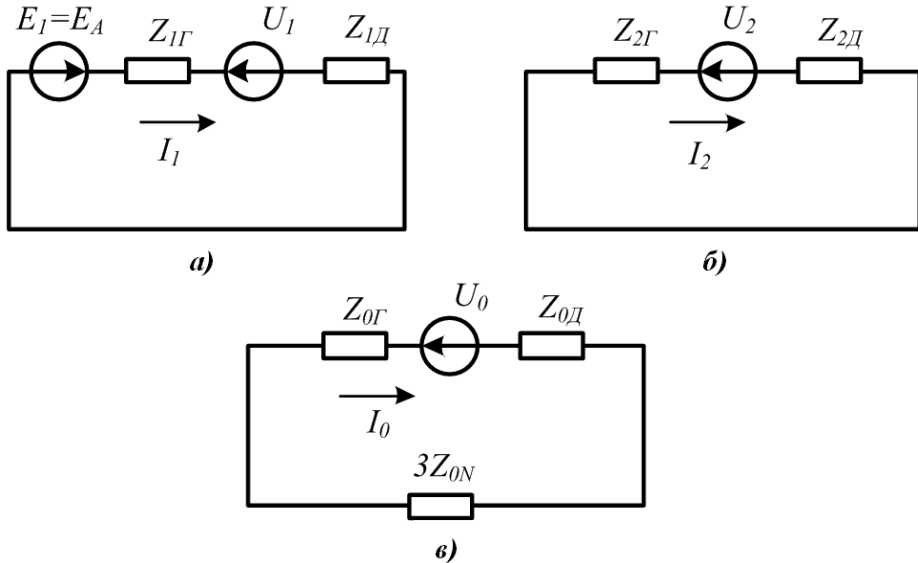


Рисунок 7.15

Складаючи для кожного контуру рівняння за другим законом Кірхгофа, отримуємо систему

$$\begin{cases} \underline{I}_1 (Z_{1Г} + Z_{1Д}) = \underline{E}_A - \underline{U}_1, \\ \underline{I}_2 (Z_{2Г} + Z_{2Д}) = -\underline{U}_2, \\ \underline{I}_0 (Z_{0Г} + Z_{0Д} + 3Z_{0N}) = -\underline{U}_0. \end{cases} \quad (7.1)$$

В отриманій системі рівнянь (7.1) *шість* невідомих, тому необхідно скласти ще три додаткових рівняння, які враховують характер порушення симетрії в кожному конкретному випадку. В розглянутій задачі очевидні рівності (див. рис. 7.14)  $\underline{U}_A = 0$ ,  $\underline{U}_C = 0$ ,  $\underline{I}_b = 0$ . Якщо розписати ці величини через симетричні складові, то отримаємо потрібну додаткову систему ще з трьох рівнянь

$$\begin{cases} \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 0, \\ a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 0, \\ a^2\underline{I}_1 + a\underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Відніmemo з першого рівняння системи (7.2) друге, тоді

$$(1-a)\underline{U}_1 + (1-a^2)\underline{U}_2 = 0$$

або  $\underline{U}_1 + (1+a)\underline{U}_2 = 0$ .

Відомо, що  $1+a = -a^2 = -\frac{1}{a}$ . Отже,  $\underline{U}_2 = a\underline{U}_1$ . Підставимо це співвідношення

в перше рівняння системи (7.2) і отримаємо  $\underline{U}_0 = a^2\underline{U}_1$ .

Позначимо вирази в дужках системи (7.1) відповідно через  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_0$  і виразимо з цих рівнянь струми всіх послідовностей

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_1} - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}, \\ \underline{I}_2 &= -\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = -\frac{a\underline{U}_1}{\underline{Z}_2}, \\ \underline{I}_0 &= -\frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = -\frac{a^2\underline{U}_1}{\underline{Z}_0}. \end{aligned}$$

Якщо підставити ці струми в останнє рівняння системи (7.2), то отримаємо можливість визначити напругу прямої послідовності  $\underline{U}_1$ .

Дійсно,  $a^2 \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_1} - a^2 \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} - a^2 \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_2} - a^2 \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_0} = 0$ , звідси

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0}.$$

Знайдемо числові значення параметрів

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_{1Г} + \underline{Z}_{1Д}} = \frac{1}{j12 + 5 + j10} = 0,0443 e^{-j77,2^\circ} \text{ См},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_{2Г} + \underline{Z}_{2Д}} = \frac{1}{j3 + 3 + j4} = 0,1313 e^{-j66,8^\circ} \text{ См},$$

$$\underline{Y}_0 = \frac{1}{\underline{Z}_{0Г} + \underline{Z}_{0Д} + 3\underline{Z}_{0N}} = \frac{1}{j2 + j1 + 12} = 0,0808 e^{-j14,04^\circ} \text{ См}.$$

Використовуючи ці значення, отримаємо

$$\underline{U}_1 = \frac{220 \cdot 0,0443 e^{-j77,2^\circ}}{0,0443 e^{-j77,2^\circ} + 0,1313 e^{-j66,8^\circ} + 0,0808 e^{-j14,04^\circ}} = 42,23 e^{-j24,54^\circ} \text{ В}.$$

Тепер можна знайти симетричні складові струмів у фазах

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = 8,08 e^{-j71,7^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{a\underline{U}_1}{\underline{Z}_2} = 5,54 e^{-j151,34^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_0 = -\frac{a^2\underline{U}_1}{\underline{Z}_0} = 3,41 e^{j21,4^\circ} \text{ А}$$

і струми в фазах та нейтральному проводі

$$\begin{aligned} \underline{I}_a &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 9,12 e^{-j84,65^\circ} \text{ A}, \\ \underline{I}_b &= 0, \\ \underline{I}_c &= a\underline{I}_1 + a^2\underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 15,48 e^{j55,9^\circ} \text{ A}, \\ \underline{I}_N &= \underline{I}_a + \underline{I}_b = 10,23 e^{j21,4^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

2. Щоб знайти фазні напруги двигуна  $\underline{U}_{\phi Д}$ , слід спочатку знайти за законом Ома їх симетричні складові

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1\phi Д} &= \underline{I}_1 \underline{Z}_{1Д} = 90,33 e^{-j8,27^\circ} \text{ В}, \\ \underline{U}_{2\phi Д} &= \underline{I}_2 \underline{Z}_{2Д} = 27,7 e^{-j98,21^\circ} \text{ В}, \\ \underline{U}_{0\phi Д} &= \underline{I}_0 \underline{Z}_{0Д} = 3,41 e^{j111,4^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Після цього отримуємо

$$\begin{aligned} \underline{U}_{aД} &= \underline{U}_{1\phi Д} + \underline{U}_{2\phi Д} + \underline{U}_{0\phi Д} = 92,07 e^{-j23,86^\circ} \text{ В}, \\ \underline{U}_{bД} &= a^2 \underline{U}_{1\phi Д} + a \underline{U}_{2\phi Д} + \underline{U}_{0\phi Д} = 65,8 e^{-j119,1^\circ} \text{ В}, \\ \underline{U}_{cД} &= a \underline{U}_{1\phi Д} + a^2 \underline{U}_{2\phi Д} + \underline{U}_{0\phi Д} = 115,4 e^{j118^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Викликає здивування наявність фазної напруги на фазі  $b$  двигуна, адже в цій фазі обрив, і в ній відсутній струм. Справа полягає в тому, що між обмотками ротора і статора двигуна існує магнітний зв'язок, який при розрахунках якраз і враховується відмінністю опорів двигуна струмам різних послідовностей. Вплив сусідніх обмоток зумовив наявність напруги на обмотці фази  $b$  навіть за відсутності в ній струму.

3. Напругу в місці обриву знаходимо за формулою

$$\underline{U}_{обр} = \underline{U}_b = a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 + \underline{U}_0.$$

Раніше було встановлено, що  $\underline{U}_2 = a \underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_0 = a^2 \underline{U}_1$ , тому

$$\underline{U}_{обр} = 3a^2 \underline{U}_1 = 126,7 e^{-j144,54^\circ} \text{ В}.$$

### **Задачі для самостійного розв'язування**

**7.13** Симетричний трифазний генератор з е.р.с.  $E_A = 220 \text{ В}$  підімкнутий до симетричного навантаження  $\underline{Z}_н = 15 + j9 \text{ Ом}$ , яке з'єднане трикутником, через лінію, кожен провід якої має опір  $\underline{Z}_л = 1 + j2 \text{ Ом}$ . Знайти лінійні та фазні струми і напруги навантаження. А також потужність, яку віддає генератор та ту, що спо-



живається навантаженням.

*Підказка.* Зручно попередньо перетворити трикутник навантаження на еквівалентну зірку.

**Відповідь:**  $I_n = 28,2$  А,  $I_\phi = 16,3$  А,  $U_n = 284,5$  В,  $U_\phi = 164$  В,  $P_\Gamma = 14,3$  кВт,  $P_H = 11,9$  кВт.

**7.14** Трифазний електричний двигун, потужність якого на валу становить  $P_g = 50$  кВт, працює від мережі з лінійною напругою 380 В. Коефіцієнт потужності двигуна  $\cos \varphi = 0,8$ , коефіцієнт корисної дії  $\eta = 0,9$ . Знайти струм, що протікає в обмотках двигуна, у випадку, коли вони з'єднані 1) зіркою і 2) трикутником.

**Відповідь:** 1)  $I_1 = 105,5$  А, 2)  $I_2 = 60,9$  А.

**7.15** В трифазному колі  $E_A = 220$  В,  $R_a = 5$  Ом,  $X_{La} = 10$  Ом,  $R_b = 15$  Ом,  $X_{Cc} = 15$  Ом (рис. 7.16). Визначити всі струми у випадках 1) розімкнутого і 2) замкнутого ключа  $K$ .

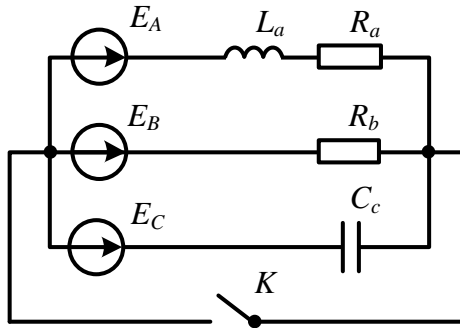


Рисунок 7.16

**Відповідь:** 1) для розімкнутого ключа:

$$\underline{I}_a = 40,8e^{-j11,35^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_b = 11,79e^{j106,3^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_c = 36,87e^{j185,15^\circ} \text{ А};$$

2) для замкнутого ключа:

$$\underline{I}_a = 19,7e^{-j63,4^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_b = 14,7e^{-j120^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_c = 14,7e^{j210^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_N = 39,3e^{-j106,6^\circ} \text{ А}$$

**7.16** Визначити аналітично та графічно симетричні складові показаної на рис. 7.17 системи векторів струму.

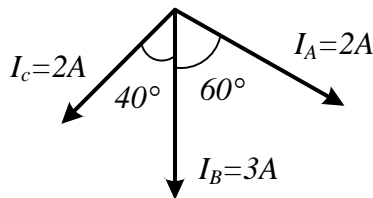


Рисунок 7.17

**Відповідь:**  $\underline{I}_1 = 1,51e^{j122,5^\circ}$  А,  $\underline{I}_2 = 0,355e^{j89^\circ}$  А,  $\underline{I}_0 = 1,81e^{j3,36^\circ}$  А.

**7.17** В трифазному колі (рис. 7.18)  $E_A = 220$  В,  $R_{ab} = 10$  Ом,  $X_{Cbc} = 10$  Ом,  $R_{ca} = 5$  Ом,  $X_{Lca} = 5$  Ом. За умови обриву лінійного проводу В:

- 1) якісно побудувати векторні діаграми напруг і струмів;
- 2) знайти в колі всі струми.

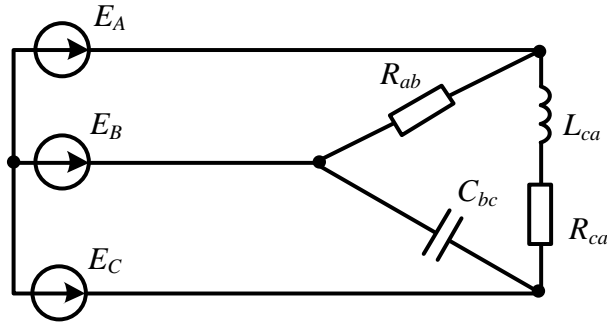


Рисунок 7.18

**Відповідь:**  $\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{bc} = 26,9e^{j15^\circ}$  А,  $\underline{I}_{ca} = 53,9e^{j105^\circ}$  А,  $\underline{I}_a = 60,2e^{-j48,4^\circ}$  А,  $\underline{I}_c = -\underline{I}_a$ .

**7.18** В трифазному колі (рис. 7.19)  $E_A = 220$  В,  $R_a = 5$  Ом,  $X_{L_a} = 10$  Ом,  $R_b = 15$  Ом,  $X_{C_c} = 15$  Ом. За умови короткого замикання навантаження фази В:

- 1) якісно побудувати векторні діаграми напруг і струмів;
- 2) знайти всі струми.

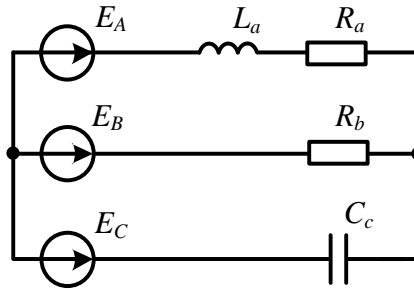


Рисунок 7.19

**Відповідь:**  $\underline{I}_a = 19,7e^{-j63,4^\circ}$  А,  $\underline{I}_b = 25,2e^{j81,1^\circ}$  А,  $\underline{I}_c = 14,7e^{j210^\circ}$  А.

**7.19** В трифазному колі (рис. 7.20)  $E_A = 220$  Ом,  $R_a = 10$  Ом,  $X_{C_a} = 5$  Ом,  $X_{L_b} = 10$  Ом,  $R_c = 15$  Ом. За умови короткого замикання навантаження фази С:

- 1) якісно побудувати векторні діаграми напруг і струмів;
- 2) знайти струми.

**Відповідь:**  $\underline{I}_a = 19,68e^{j26,56^\circ}$  А,  $\underline{I}_b = 22e^{-j210^\circ}$  А,  $\underline{I}_c = 16,4e^{-j84,9^\circ}$  А.

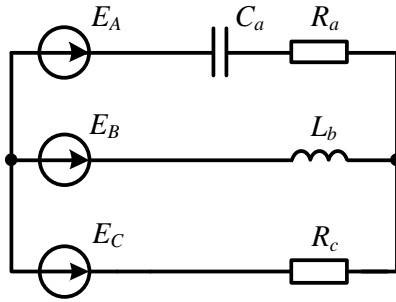


Рисунок 7.20

**7.20** Симетричне трифазне навантаження (рис. 7.21) споживає потужність  $P = 50$  кВт. Фазний струм відстає від фазної напруги на кут  $\varphi$ , водночас  $\cos \varphi = 0,8$ . Визначити покази ватметрів.

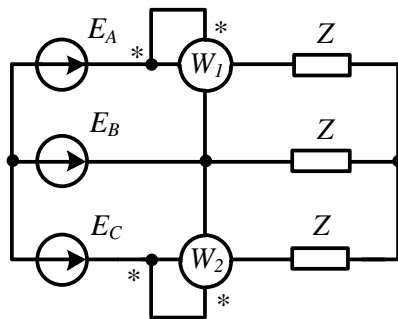


Рисунок 7.21

**Відповідь:**  $P_{W_1} = 14,17$  кВт,  $P_{W_2} = 35,83$  кВт.

**7.21** В трифазне симетричне коло (рис. 7.22) увімкнено два ватметра. Перший ватметр показує  $P_1 = 1000$  Вт, другий –  $P_2 = 1500$  Вт. Визначити  $\cos \varphi$  навантаження.

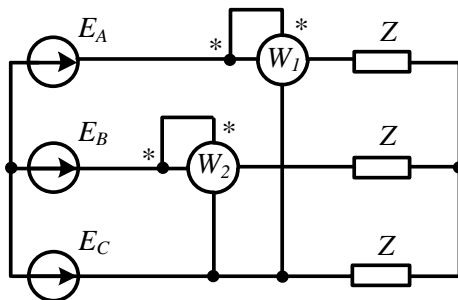


Рисунок 7.22

*Підказка.* Доцільно побудувати векторну діаграму і застосувати нескладні тригонометричні перетворення.

**Відповідь:**  $\cos \varphi = 0,945$ ,  $\varphi < 0$ .

**7.22** В трифазному колі  $E_A = 220$  В,  $R = 10$  Ом,  $X_L = 10$  Ом,  $X_C = 10$  Ом (рис. 7.23). За умови обриву фазного проводу  $ab$ :

- 1) якісно побудувати векторні діаграми напруг і струмів;
- 2) знайти всі струми.

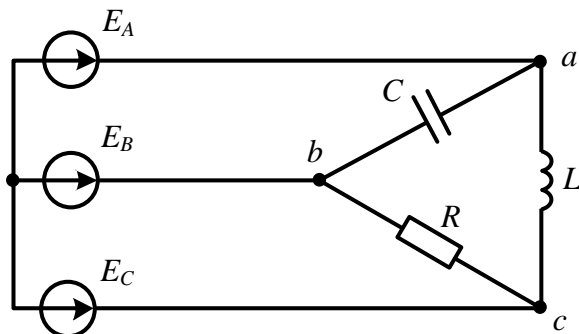


Рисунок 7.23

**Відповідь:**  $\underline{I}_{bc} = \underline{I}_b = 38,1e^{-j90^\circ}$  А,  $\underline{I}_{ca} = 38,1e^{j60^\circ}$  А,  $\underline{I}_a = 38,1e^{-j120^\circ}$  А,  $\underline{I}_c = 73,61e^{j75^\circ}$  А.

**7.23** В трифазному колі (рис. 7.24) лінійний провід  $B$  обірваний, струм у фазі  $A$   $I_a = 5$  А. Визначити аналітично і графічно симетричні складові системи лінійних струмів.

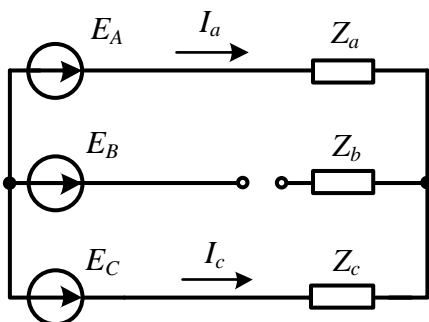


Рисунок 7.24

**Відповідь:**  $\underline{I}_1 = 8,67e^{j30^\circ}$  А,  $\underline{I}_2 = 8,67e^{-j30^\circ}$  А,  $\underline{I}_0 = 0$ .

**7.24** До симетричного трифазного генератора, з'єднаного зіркою без нульового проводу, підключено трифазний двигун, який також з'єднаний зіркою. Фазна електрична напруга генератора  $U_A = 220$  В, його опір струму прямої послідовності  $\underline{Z}_{Г1} = j3$  Ом, а струму зворотної послідовності  $\underline{Z}_{Г2} = j1$  Ом. Опір двигуна струму прямої послідовності  $\underline{Z}_{Д1} = 5 + j5$  Ом, струму зворотної послідовності

$Z_{Д2} = 1 + j2$  Ом. Фаза  $C$  генератора замкнулася накоротко. Потрібно знайти струми в кожній фазі за умови нормальної роботи генератора і у випадку короткого замикання вказаної фази.

*Підказка.* Застосувати метод симетричних складових, визначивши пряму і зворотну послідовності несиметричної системи фазних напруг генератора.

**Відповідь:** 1) за нормального режиму роботи:

$$\underline{I}_a = 23,32 e^{-j58^\circ} \text{ А ;}$$

$$\underline{I}_b = 23,32 e^{-j178^\circ} \text{ А ;}$$

$$\underline{I}_c = 23,32 e^{j62^\circ} \text{ А ;}$$

2) в аварійному режимі:

$$\underline{I}_a = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 35,75 e^{-j30^\circ} \text{ А ;}$$

$$\underline{I}_b = a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 = 31,46 e^{j137^\circ} \text{ А ;}$$

$$\underline{I}_c = a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 = 8,9 e^{-j155,6^\circ} \text{ А .}$$

## Розділ 8

# ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ. ПРОСТІ ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ

Наведено приклади розрахунку параметрів лінійних пасивних чотириполіусників і простих електричних фільтрів типу  $k$ .

**8.1** Знайти  $A$ -параметри чотириполіусника (рис. 8.1) за допомогою дослідів холостого ходу і короткого замикання, якщо  $X_C = R = 10$  Ом,  $X_L = 5$  Ом. Перевірити правильність розрахунку.

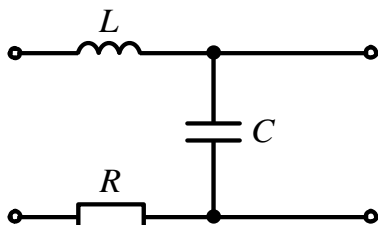


Рисунок 8.1

### Розв'язування

Для визначення  $A$ -параметрів чотириполіусника через дослід короткого замикання і холостого ходу використаємо формули:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1x} Z_{1k}}{Z_{2k} (Z_{1x} - Z_{1k})}};$$

$$A_{12} = A_{11} Z_{2k};$$

$$A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1x}};$$

$$A_{22} = A_{11} \frac{Z_{2k}}{Z_{1k}}.$$

Знаходимо опір *прямого короткого замикання*  $Z_{1k}$  як вхідний опір чотириполіусника з боку первинних затискачів за замкнених накоротко вихідних (вторинних) затискачах. В цьому режимі ємність замкнута накоротко, тому

$$Z_{1k} = Z_{ex1k} = R + jX_L = 10 + j5 = 11,18 e^{j26,56^\circ} \text{ Ом.}$$

*Опір прямого холостого ходу*  $Z_{1x}$  визначаємо як вхідний опір чотириполіусника з боку первинних затискачів за розімкнених вихідних затискачах, через що

$$\underline{Z}_{1x} = \underline{Z}_{\text{вх}1x} = R + j(X_L - X_C) = 10 - j5 = 11,18e^{-j26,56^\circ} \text{ Ом}.$$

Опір зворотного короткого замикання  $\underline{Z}_{2к}$  знаходиться як опір чотириполюсника з боку вихідних затискачів за умови короткого замикання вхідних. Таким чином,

$$\underline{Z}_{2к} = \frac{(R + jX_L)(-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)} = 10e^{-j36,88^\circ} \text{ Ом}.$$

Отже, підставляємо числові значення опорів у вирази для знаходження  $A$ -параметрів і отримуємо:

$$\underline{A}_{11} = 0,5 + j; \quad \underline{A}_{12} = 10 + j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = j0,1 \text{ См}; \quad \underline{A}_{22} = 1.$$

Для перевірки правильності отриманих результатів використовуємо співвідношення

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1.$$

Підставляючи в цей вираз числові значення отриманих  $A$ -параметрів, переконуємося в їх правильності.

Відзначимо, що можна використати й інші варіанти дослідів. Наприклад, якщо знайти опори прямого холостого ходу  $\underline{Z}_{1x}$ , зворотного холостого ходу  $\underline{Z}_{2x}$  і зворотного короткого замикання  $\underline{Z}_{2к}$ , то вирази для визначення коефіцієнтів чотириполюсника матимуть вигляд:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2к}}};$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2к};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1x}};$$

$$\underline{A}_{22} = \underline{A}_{11} \frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}}.$$

Якщо відомі опори прямого холостого ходу  $\underline{Z}_{1x}$ , прямого короткого замикання  $\underline{Z}_{1к}$  і зворотного холостого ходу  $\underline{Z}_{2x}$ , то коефіцієнти чотириполюсників можна визначити за формулами:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_{1x}}{\sqrt{\underline{Z}_{2x}(\underline{Z}_{1x} - \underline{Z}_{1к})}};$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \frac{\underline{Z}_{1к}\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1x}};$$

$$\underline{A}_{22} = \underline{A}_{11} \frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}}.$$

**8.2** Параметри чотириполосника задані матрицею

$$[A] = \begin{pmatrix} 1+j & 10 \\ 0,1 & 1-j \end{pmatrix}.$$

Визначити вхідний опір чотириполосника, якщо до його вихідних затискачів підключено опір  $Z_H = j5$  Ом. Накреслити  $T$ -подібну схему заміщення чотириполосника та знайти її параметри.

**Розв'язування**

Виходячи з основних рівнянь чотириполосника через  $A$ -параметри і враховуючи, що

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_H \underline{I}_2,$$

отримуємо вираз для вхідного опору чотириполосника та його значення

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_H + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_H + \underline{A}_{22}} = \frac{(1+j) \cdot j5 + 10}{0,1 \cdot j5 + (1-j)} = 6,32e^{j71,56^\circ} \text{ Ом}.$$

Параметри  $T$ -подібної схеми заміщення (рис. 8.2, а) визначасмо з відомих виразів:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{1+j-1}{0,1} = j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}} = -j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{\underline{A}_{21}} = 10 \text{ Ом}.$$

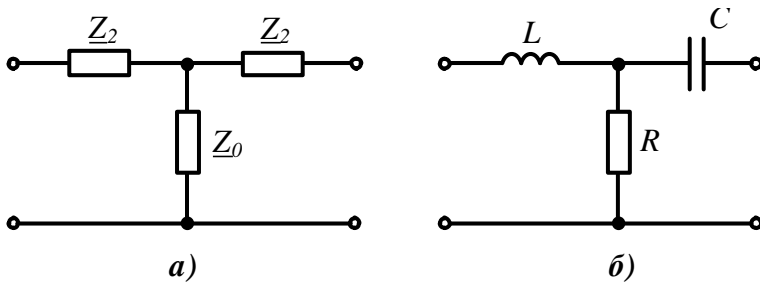


Рисунок 8.2

Електрична схема чотириполосника показана на рис. 8.2, б. Активний опір  $R = Z_0 = 10$  Ом. Якщо задатися частотою  $f = 50$  Гц, то

$$L = \frac{Z_1}{\omega} = \frac{10}{2\pi \cdot 50} = 31,8 \text{ мГн},$$

$$C = \frac{1}{Z_2\omega} = \frac{10}{10 \cdot 2\pi \cdot 50} = 318 \text{ мкФ}.$$



**8.3** Для чотириполосника (рис. 8.3, а), де  $R = 10$  Ом,  $X_C = 30$  Ом, скласти матрицю  $A$ -параметрів та визначити його характеристичні параметри.

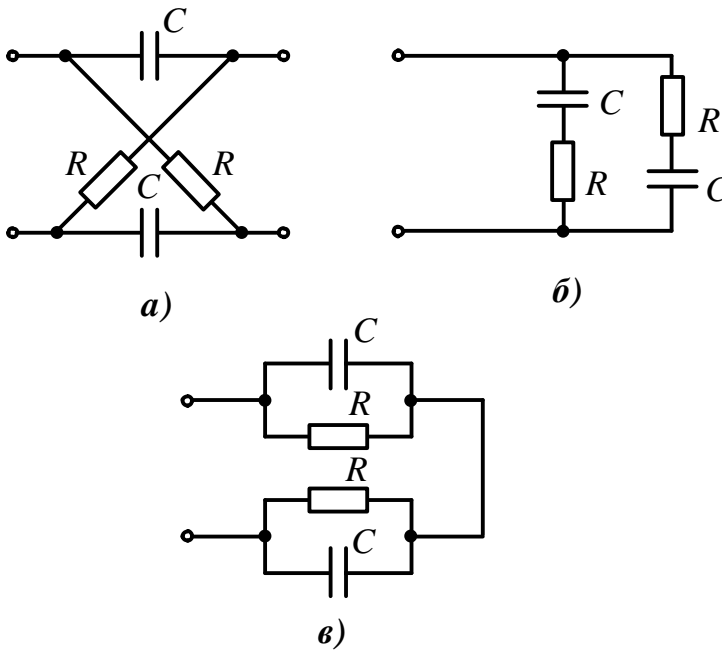


Рисунок 8.3

### Розв'язування

Даний чотириполосник симетричний, тому для знаходження  $A$ -параметрів досить виконати всього два досліди – прямого холостого ходу і прямого короткого замикання. З рисунка видно, що в режимі прямого холостого ходу (вихідні затискачі розімкнені) утворюються дві паралельно з'єднані вітки, в кожній з яких елементи  $R$  і  $C$  з'єднані послідовно (рис. 8.3, б), тому

$$\underline{Z}_{1x} = \frac{(R - jX_C)(R - jX_C)}{R - jX_C + R - jX_C} = 5 - j15 = 15,81e^{-j71,56^\circ} \text{ Ом}.$$

У випадку короткого замикання вихідних затискачів елементи  $R$  і  $C$  з'єднані паралельно, а між собою – послідовно (рис. 8.3, в). Отже,

$$\underline{Z}_{1к} = \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = 9 - j3 = 9,49e^{-j18,44^\circ} \text{ Ом}.$$

В симетричному чотириполоснику

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{1x} - \underline{Z}_{1к}}} = 1,118e^{j18,44^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{21}\underline{Z}_{1к} = 10,6 \text{ Ом},$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1x}} = j0,0707 \text{ См.}$$

Перевірка за співвідношенням

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$$

підтверджує правильність отриманих результатів. Таким чином, матриця  $A$ -параметрів чотириполосника набуває вигляду

$$[\underline{A}] = \begin{pmatrix} 1,118e^{j18,44^\circ} & 10,6 \\ j0,0707 & 1,118e^{j18,44^\circ} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо характеристичні параметри чотириполосника.

*Характеристичний опір* можна знайти за двома виразами:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = 12,25e^{-j45^\circ} \text{ Ом}$$

або

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1k}} = 12,25e^{-j45^\circ} \text{ Ом.}$$

*Сталу передачі* симетричного чотириполосника знаходимо із виразу

$$\underline{g} = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right) = 0,657 + j0,523.$$

Оскільки  $\underline{g} = a + jb$ , то *коефіцієнт загасання*  $a = 0,657$  Нп, а *фазовий коефіцієнт*  $b = 0,523$  рад.

**8.4** Для несиметричного чотириполосника внаслідок виконаних дослідів холостого ходу і короткого замикання отримано значення опорів  $\underline{Z}_{1x} = 1414e^{-j45^\circ}$  Ом,  $\underline{Z}_{1k} = 707e^{-j45^\circ}$  Ом,  $\underline{Z}_{2x} = 1414e^{j45^\circ}$  Ом. Знайти  $\underline{Z}_{2k}$  і записати основні рівняння чотириполосника через  $A$ -параметри.

### Розв'язування

Відомо, що

$$\underline{Z}_{1k} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}, \quad \underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}, \quad \underline{Z}_{2x} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}.$$

Звідси витікає корисне співвідношення

$$\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{2k}} = \frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x}},$$

за допомогою якого знаходимо

$$\underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{Z}_{1k}\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}} = 707e^{j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Визначаємо  $A$ -параметри

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_{1x}}{\sqrt{\underline{Z}_{2x}(\underline{Z}_{1x} - \underline{Z}_{1k})}} = 1,414e^{-j45^\circ},$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{2k} = 1000 \text{ Ом},$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1x}} = 0,001 \text{ См};$$

$$\underline{A}_{22} = \underline{A}_{21} \underline{Z}_{2x} = 1,414 e^{j45^\circ}.$$

Отже, основні рівняння чотириполосника записуються у вигляді:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = 1,414 e^{-j45^\circ} \underline{U}_2 + 1000 \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 = 0,001 \underline{U}_2 + 1,414 e^{j45^\circ} \underline{I}_2. \end{cases}$$

**8.5** Визначити  $A$ -параметри чотириполосника, показаного на рис. 8.4, якщо  $X_{L1} = 50 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_{C0} = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 60 \text{ Ом}$ ,  $X_M = 10 \text{ Ом}$ .

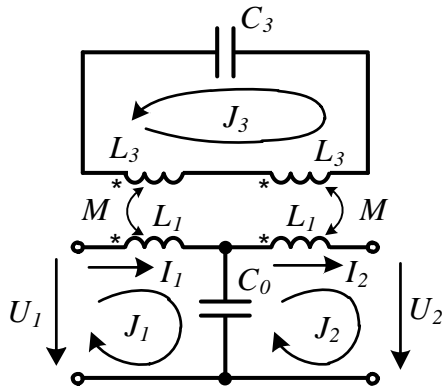


Рисунок 8.4

### Розв'язування

Визначити  $A$ -параметри даного чотириполосника за допомогою дослідів холостого ходу і короткого замикання достатньо складне завдання, тому що в колі є індуктивно-зв'язані котушки. В даному випадку доцільно скласти рівняння, що пов'язують вхідні ( $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ ) і вихідні величини ( $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ ), з наступним порівнянням їх з основними рівняннями чотириполосника.

Отож складемо систему рівнянь за методом контурних струмів, вибравши незалежні контури і напрям контурних струмів  $J$  так, як зображено на рис. 8.4,

$$\begin{cases} (jX_{L1} - jX_{C0}) \underline{J}_1 - (-jX_{C0}) \underline{J}_2 + jX_M \underline{J}_3 = \underline{U}_1, \\ -(-jX_{C0}) \underline{J}_1 - (jX_{L1} - jX_{C0}) \underline{J}_2 + jX_M \underline{J}_3 + \underline{U}_2 = 0, \\ jX_M \underline{J}_1 + jX_M \underline{J}_2 + (j2X_{L3} - jX_{C3}) \underline{J}_3 = 0. \end{cases}$$

Виразимо з останнього рівняння  $\underline{J}_3$  через  $\underline{J}_1$  та  $\underline{J}_2$  і підставимо його в друге рівняння. Після незначних перетворень та підстановки числових значень, враховуючи, що  $\underline{I}_1 = \underline{J}_1$ , а  $\underline{I}_2 = \underline{J}_2$ , отримаємо одне з двох рівнянь чотириполосника в

$A$ -формі

$$\underline{I}_1 = j0,04\underline{U}_2 - 1,4\underline{I}_2.$$

Підставимо знайдене раніше значення  $\underline{I}_3$  та  $\underline{I}_1$  в перше рівняння системи. В результаті маємо друге рівняння чотириполосника в  $A$ -формі

$$\underline{U}_1 = -1,4\underline{U}_2 - j24\underline{I}_2.$$

Таким чином, матриця  $A$ -параметрів заданого чотириполосника має вигляд:

$$[\underline{A}] = \begin{pmatrix} -1,4 & -j24 \\ j0,04 & -1,4 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнти  $\underline{A}_{11}$  і  $\underline{A}_{22}$  виявилися рівними, тому даний чотириполосник – симетричний.

**8.6** Для чотириполосника, представленого в задачі 8.5 (див. рис. 8.4), визначити параметри  $T$ - і  $\Pi$ -подібних схем заміщення без взаємних індуктивностей та зобразити їх схеми.

### Розв'язування

Опори  $T$ -подібної схеми заміщення симетричного чотириполосника визначаються через  $A$ -параметри за формулами:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = j60 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{\underline{A}_{21}} = -j25 \text{ Ом}.$$

Зазначену схему показано на рис. 8.5, *а*.

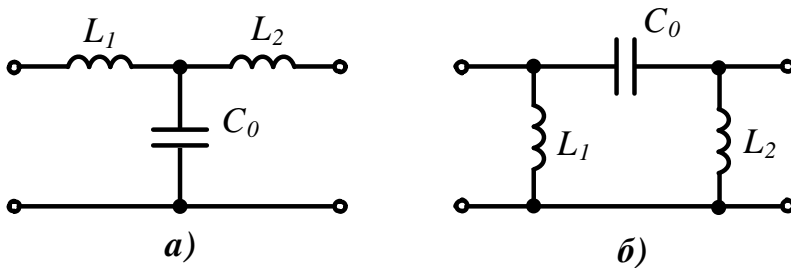


Рисунок 8.5

Опори для  $\Pi$ -подібної схеми заміщення знаходимо за виразами:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - 1} = j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = -j24 \text{ Ом}.$$

Ця схема подана на рис. 8.5, *б*.

**8.7** Побудувати  $\Pi$ -подібний симетричний чотириполусник за заданими характеристичними параметрами, визначеними на частоті  $f = 100$  Гц. Характеристичний опір  $Z_C = 42,1e^{-j57,5^\circ}$  Ом, коефіцієнт загасання  $a = 1,526$  Нп, фазовий коефіцієнт  $b = 1,141$  рад.

**Розв'язування**

Відомо, що опори  $\Pi$ -подібної схеми заміщення чотириполусника за його  $A$ -параметрами розраховуються за формулами:

$$Z_1 = Z_2 = \frac{A_{12}}{A_{22} - 1}; \quad Z_0 = A_{12}.$$

Щоб знайти  $A$ -параметри чотириполусника через його характеристичні параметри, необхідно скористатися визначенням коефіцієнтів чотириполусника в гіперболічних функціях

$$A_{11} = A_{22} = \operatorname{ch} \underline{g}, \quad A_{12} = Z_C \operatorname{sh} \underline{g}$$

де  $\underline{g} = a + jb$  – стала передачі чотириполусника.

Скориставшись тим, що

$$\operatorname{ch} \underline{g} = \frac{e^{\underline{g}} + e^{-\underline{g}}}{2}, \quad \operatorname{sh} \underline{g} = \frac{e^{\underline{g}} - e^{-\underline{g}}}{2},$$

в результаті отримуємо:

$$A_{11} = A_{22} = \operatorname{ch} \underline{g} = \operatorname{ch}(1,526 + j1,141) = 2,235 e^{j63,4^\circ} = 1 + j2,$$

$$A_{12} = Z_C \operatorname{sh} \underline{g} = 42,1 e^{-j57,5^\circ} \cdot \operatorname{sh}(1,526 + j1,141) = 100 \text{ Ом}.$$

Тоді

$$Z_1 = Z_2 = \frac{A_{12}}{A_{22} - 1} = \frac{100}{1 + j2 - 1} = -j50 \text{ Ом};$$

$$Z_0 = A_{12} = 100 \text{ Ом}.$$

$\Pi$ -подібну схему заміщення чотириполусника наведено на рис. 8.6.

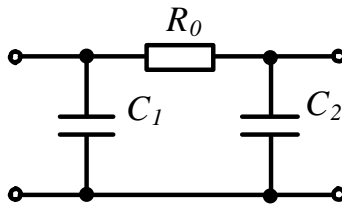


Рисунок 8.6

Активний опір  $R_0 = 100$  Ом, а ємності

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{Z_1 2\pi f} = 31,83 \text{ мкФ}.$$

**8.8** Визначити  $A$ -параметри трансформатора без осердя (рис. 8.7, а) як чотириполосника та побудувати його  $T$ -подібну схему заміщення. Параметри трансформатора:  $L_1 = 15,9$  мГн,  $R_1 = 5$  Ом,  $L_2 = 6,37$  мГн,  $R_2 = 3$  Ом,  $M = 9,55$  мГн,  $f = 500$  Гц.

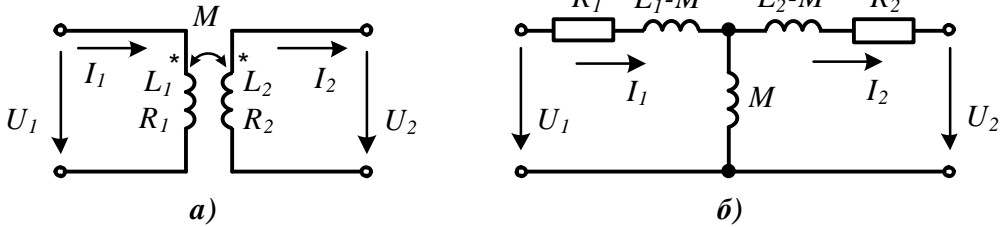


Рисунок 8.7

### Розв'язування

Для того, щоб визначити коефіцієнти чотириполосника, еквівалентного трансформатора без осердя, виразимо в схемі (рис. 8.7, а) входні величини через вихідні та порівняємо їх із основними рівняннями чотириполосника.

Для первинного контуру рівняння, складене за другим законом Кірхгофа з урахуванням зустрічного з'єднання індуктивно-зв'язаних котушок, має вигляд:

$$(R_1 + jX_{L1})\underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2 = \underline{U}_1.$$

Для вторинного контуру

$$(R_2 + jX_{L2})\underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1 + \underline{U}_2 = 0.$$

Виразимо з останнього рівняння струм  $\underline{I}_1$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{jX_M} \underline{U}_2 + \frac{R_2 + jX_{L2}}{jX_M} \underline{I}_2$$

і підставимо його в перше рівняння. Після нескладних перетворень отримуємо

$$\underline{U}_1 = \frac{R_1 + jX_{L1}}{jX_M} \underline{U}_2 + \left[ \frac{(R_1 + jX_{L1})(R_2 + jX_{L2})}{jX_M} - jX_M \right] \underline{I}_2.$$

Порівнюючи отриману систему рівнянь з основними рівняннями чотириполосника, визначаємо  $A$ -параметри чотириполосника, який і буде еквівалентним заданому трансформатору без осердя:

$$\underline{A}_{11} = \frac{R_1 + jX_{L1}}{jX_M} = 1,675 e^{-j5,71^\circ},$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{(R_1 + jX_{L1})(R_2 + jX_{L2})}{jX_M} - jX_M = 8,8 e^{j18,74^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{jX_M} = -j0,03333 \text{ См},$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{R_2 + jX_{L2}}{jX_M} = 0,674e^{-j8,53^\circ}.$$

Перевіримо правильність розрахунку

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} &= 1,675e^{-j5,71^\circ} \cdot 0,674e^{-j8,53^\circ} - 8,8e^{j18,74^\circ} \cdot 0,03333e^{-j90^\circ} = \\ &= 1,001 - j0,003. \end{aligned}$$

Отже, розрахунок правильний.

Опори  $T$ -подібної схеми заміщення трансформатора (рис. 8.7, б) визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} \underline{Z}_0 &= \frac{1}{\underline{A}_{21}} = j\omega M = j30 \text{ Ом}, \\ \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = R_1 + j\omega(L_1 - M) = 5 + j20 \text{ Ом}, \\ \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}} = R_2 + j\omega(L_2 - M) = 3 - j\omega \cdot 0,00318 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Як видно з останнього виразу, опір  $\underline{Z}_2$  містить негативну індуктивність  $L_2 - M = -3,18 \text{ мГн}$ .

Насправді фізично реалізувати в класі лінійних кіл отриману схему заміщення трансформатора для знайдених параметрів неможливо. Проте, якщо частота вхідної напруги залишається сталою, то замість від'ємної індуктивності можна увімкнути ємність, опір якої на заданій частоті рівний 10 Ом.

**8.9** Дано несиметричний чотириполіусник (рис. 8.8) з параметрами  $X_L = 5 \text{ Ом}$ ,  $R = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 10 \text{ Ом}$ . Потрібно виконати такі завдання:

- 1) визначити значення опору  $\underline{Z}$  одноелементного чотириполіусника, який необхідно каскадно підімкнути з боку вихідних затискачів заданого чотириполіусника, щоб в результаті отримати симетричний чотириполіусник, який можна фізично реалізувати;
- 2) розрахувати  $\Pi$ -подібну схему заміщення отриманого чотириполіусника.

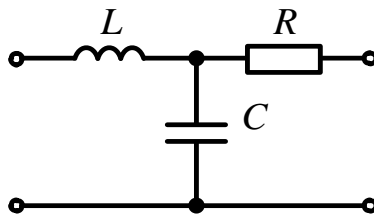


Рисунок 8.8

### Розв'язування

1. Використовуючи формули для  $T$ -подібного чотириполіусника і враховуючи, що

$Z_0 = -jX_C = -j10 \text{ Ом}$ ,  $Z_1 = jX_L = j5 \text{ Ом}$ ,  $Z_2 = R = 5 \text{ Ом}$ ,  
знайдемо спочатку  $A'$ - параметри заданого чотириполюсника:

$$A'_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_0} = 0,5;$$

$$A'_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0} = 2,5 + j5 \text{ Ом};$$

$$A'_{21} = \frac{1}{Z_0} = j0,1 \text{ См};$$

$$A'_{22} = 1 + \frac{Z_2}{Z_0} = 1 + j0,5.$$

Одноелементні чотириполюсники можуть бути з *послідовно* і *паралельно* увімкненим опором.

а) Розглянемо перший випадок. Матриця  $A$ -параметрів *одноелементного чотириполюсника з послідовно увімкненим опором* має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коли два чотириполюсники з'єднані каскадно, вони утворюють *складений чотириполюсник*, матриця коефіцієнтів якого знаходиться як добуток матриць окремих чотириполюсників.

Відтак

$$[\underline{A}] = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{11}\underline{Z} + A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{21}\underline{Z} + A'_{22} \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб складений чотириполюсник був симетричним, необхідно, щоб виконувалася рівність  $A'_{11} = A'_{22}$ , тому значення опору  $\underline{Z}$  знаходиться з рівняння

$$A'_{11} = A'_{21}\underline{Z} + A'_{22},$$

звідки

$$\underline{Z} = \frac{A'_{11} - A'_{22}}{A'_{21}} = -5 + j5 \text{ Ом}.$$

Від'ємна дійсна частина повного комплексного опору відповідає від'ємному активному опору, що означає неможливість фізичної реалізації схеми в класі лінійних кіл.

б) Матриця  $A$ -параметрів *простого чотириполюсника з паралельно увімкненим опором* має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця складеного чотириполюсника



$$[\underline{A}] = \begin{pmatrix} \underline{A}'_{11} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}'_{11} + \frac{\underline{A}'_{12}}{\underline{Z}} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} + \frac{\underline{A}'_{22}}{\underline{Z}} & \underline{A}'_{22} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи ті ж міркування, що і в пункті а), значення опору  $\underline{Z}$  знаходимо із співвідношення

$$\underline{Z} = \frac{\underline{A}'_{12}}{\underline{A}'_{22} - \underline{A}'_{11}} = 7,5 + j2,5 \text{ Ом}.$$

Фізична реалізація такого чотириполюсника в класі лінійних кіл є можливою.

Отже, значення  $A$ -параметрів складеного симетричного чотириполюсника будуть такими:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \underline{A}'_{22} &= 1 + j0,5; \\ \underline{A}_{12} = \underline{A}'_{12} &= 2,5 + j5 \text{ Ом}; \\ \underline{A}_{21} = \underline{A}'_{21} + \frac{\underline{A}'_{22}}{\underline{Z}} &= 0,14 + j0,12 \text{ См}. \end{aligned}$$

2. Знайдемо значення опорів  $\Pi$ -подібної схеми заміщення

$$\begin{aligned} \underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} &= R_0 + jX_0 = 2,5 + j5 \text{ Ом}, \\ \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - 1} &= R_1 - jX_1 = 10 - j5 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Схема заміщення зображена на рис. 8.9. В схемі опори  $R_0$  та  $R_1$  є додатними, тому отримана схема також може бути фізично реалізована.

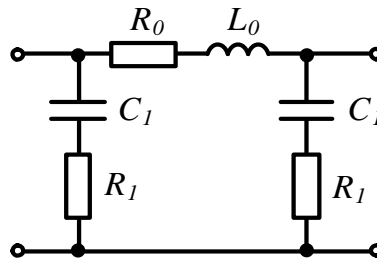


Рисунок 8.9

**8.10** Визначити параметри низькочастотного  $T$ -подібного фільтра, схему якого показано на рис. 8.10, якщо опір навантаження  $R = 200 \text{ Ом}$ , а граничні частоти фільтра  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 500 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Побудувати залежність коефіцієнта загасання  $a$  і фазового коефіцієнта  $b$  від частоти у випадку заданого навантаження фільтра і порівняти їх з аналогічними залежностями, коли фільтр навантажено на характеристичний опір.

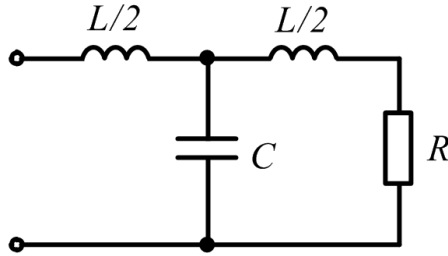


Рисунок 8.10

### Розв'язування

Для розрахунку параметрів фільтра нижніх частот початковими даними є гранична частота  $\omega_2$  і характеристичний опір, який приймають рівним опору навантаження за умови  $\omega = 0$ .

Для зручності розрахунку введемо відносну частоту  $\nu = \frac{\omega}{\omega_2}$ .

Тоді характеристичний опір фільтра  $Z_C = k\sqrt{1-\nu^2}$ , де  $k = \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Гранична частота  $\omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ .

За умови  $\omega = 0$  характеристичний опір є активним опором, тобто

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = R.$$

Тоді

$$L = \frac{2R}{\omega_2} = 0,8 \text{ Гн}, \quad C = \frac{2}{\omega_2 R} = 20 \text{ мкФ}.$$

Якщо вважати, що у всьому діапазоні частот навантаження фільтра  $Z_n$  рівне характеристичному опору (режим узгодженого навантаження), то в смузі пропускання коефіцієнт загасання  $a = 0$ , а фазовий коефіцієнт можна знайти з виразу

$$b = \arccos(1 - 2\nu^2).$$

У смузі загасання для будь-якої частоти  $b = \pi$ , а коефіцієнт загасання визначається з співвідношення

$$a = \text{Arch}(2\nu^2 - 1).$$

Варто зазначити, що значення обернених гіперболічних функцій  $y = \text{Arch}(x)$  зручніше знаходити за формулою

$$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}).$$

Відзначимо, що в цьому режимі коефіцієнт загасання і фазовий коефіцієнт однакові як для напруги  $U_2$ , так і для струму  $I_2$ . Залежність цих величин від  $\nu$

наведена в табл. 8.1, а на рис 8.11 зображена пунктирною лінією.

Таблиця 8.1

$\nu$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,5	2	3
$a$ , Нп	0	0	0	0	0	0	1,24	1,92	2,63	3,52
$b$ , рад	0	0,4	0,82	1,29	1,85	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14

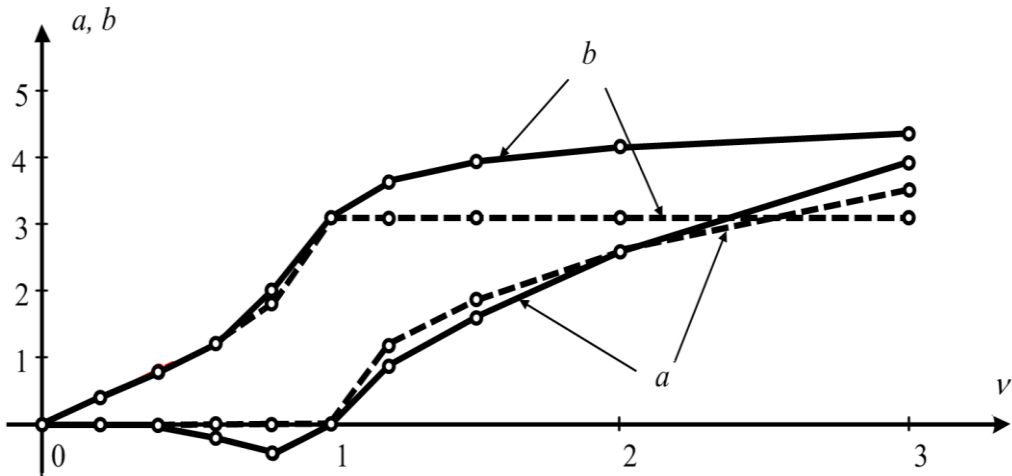


Рисунок 8.11

Отримаємо ці ж залежності для фільтра, навантаженого на сталий опір  $R = 200$  Ом (режим *неузгодженого* навантаження). В цьому режимі коефіцієнти  $a$  і  $b$  для вихідних напруги і струму різні, тому визначимо зазначені величини тільки для напруги  $U_2$ .

Оскільки для заданої схеми фільтра  $\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}$ , де  $\underline{Z}_1 = \frac{j\omega L}{2}$ , з врахуванням, що  $\underline{Z}_0 = -j\frac{1}{\omega C}$ , звідки

$$\underline{A}_{11} = 1 - 2\nu^2.$$

Коефіцієнт  $\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}$ , але оскільки  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ , то, враховуючи вирази для відносної частоти і опору  $R$ , отримаємо

$$\underline{A}_{12} = j2\nu R(1 - \nu^2).$$

Напруга  $U_2$  і струм  $I_2$  у випадку, коли опір навантаження рівний  $R$ , пов'язані співвідношенням  $I_2 = \frac{U_2}{R}$ , тому  $\frac{U_1}{U_2} = e^s = e^a e^{jb} = (1 - 2\nu^2) + j2\nu(1 - \nu^2)$ .

Звідси

$$a = \ln \sqrt{(1-2\nu^2)^2 + 4\nu^2(1-\nu^2)^2},$$

$$b = \operatorname{arctg} \frac{2\nu(1-\nu^2)}{1-2\nu^2}.$$

Залежності коефіцієнтів  $a$  і  $b$  наведені в табл. 8.2, а на рисунку (див. рис. 8.11) зображені суцільною лінією.

Таблиця 8.2

$\nu$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,5	2	3
$a$ , Нп	0	-0,003	-0,045	-0,2	-0,44	0	0,9	1,63	2,63	3,93
$b$ , рад	0	0,395	0,78	1,22	2,02	3,14	3,65	3,96	4,19	4,38

Розрахунок показує, що коефіцієнти загасання в режимах узгодженого та неузгодженого навантаження мало відрізняються один від одного. Найбільшу розбіжність мають фазові коефіцієнти саме в смузі загасання.

**8.11** Для високочастотного фільтра (рис. 8.12) відоме значення ємності  $C = 20$  нФ. Характеристичний опір на частоті, що удвічі перевищує граничну частоту  $\omega_1$ ,  $Z_C = 1400$  Ом. Розрахувати значення індуктивності фільтра  $L$ , частоту  $\omega_1$ , а також коефіцієнти загасання  $a$  і фази  $b$  на частоті, де визначений характеристичний опір.

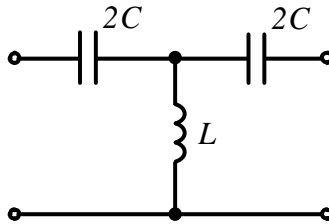


Рисунок 8.12

### Розв'язування

Для фільтра високої частоти типу  $k$  гранична частота  $\omega_1$  визначається виразом

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{LC}},$$

а характеристичний опір

$$Z_C = k\sqrt{1 - \frac{1}{\nu^2}},$$

де  $\nu = \frac{\omega}{\omega_1}$  – відносна частота;  $k = \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Оскільки за умови

$$\omega = 2\omega_1,$$

відносна частота  $\nu = 2$ , а характеристичний опір  $Z_C = 1400 \text{ Ом}$ , то

$$k = 1616.$$

Тоді значення індуктивності

$$L = k^2 C = 52,3 \text{ мГн}.$$

Задана частота  $2\omega_1$  знаходиться в смузі пропускання фільтра, де коефіцієнт загасання  $a = 0$ .

Фазовий коефіцієнт знаходимо з виразу

$$\cos b = 1 - \frac{2}{\nu^2} = 0,5,$$

відтак маємо  $b = -1,05$  рад.

Знак мінус взятий тому, що в смузі загасання фільтра верхніх частот фазовий коефіцієнт сталий і дорівнює  $-\pi$ , а в смузі пропускання із зростанням частоти змінюється від вказаного значення до нуля.

### Задачі для самостійного розв'язування

**8.12** Для визначення  $A$ -параметрів симетричного чотириполосника були виконані досліди короткого замикання ( $P_{1к} = 110 \text{ Вт}$ ,  $U_{1к} = 50 \text{ В}$ ,  $I_{1к} = 2,36 \text{ А}$ ,  $\varphi_{1к} < 0$ ) і холостого ходу ( $P_{1х} = 430 \text{ Вт}$ ,  $U_{1х} = 50 \text{ В}$ ,  $I_{1х} = 10 \text{ А}$ ,  $\varphi_{1х} > 0$ ). Знайти  $A$ -параметри чотириполосника та побудувати його  $T$ -подібну схему заміщення.

**Відповідь:**  $A$ -параметри:  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 0,52 e^{-j57,9^\circ}$ ,  $\underline{A}_{12} = 11 e^{-j79,1^\circ} \text{ Ом}$ ,  $\underline{A}_{21} = 0,104 e^{-j88,6^\circ} \text{ См}$ .

Параметри схеми заміщення:  $Z_1 = Z_2 = 4,05 - j7,05 \text{ Ом}$ ,  $Z_0 = 0,24 + j9,6 \text{ Ом}$ .

**8.13** Знайти  $A$ -параметри чотириполосника за допомогою дослідів холостого ходу і короткого замикання (рис. 8.13), якщо  $X_L = R = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 5 \text{ Ом}$ . Перевірити правильність розрахунку.

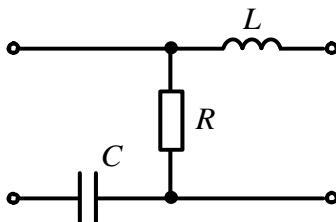


Рисунок 8.13

**Відповідь:**  $\underline{A}_{11} = 1 - j0,5$ ,  $\underline{A}_{12} = 5 + j5 \text{ Ом}$ ,  $\underline{A}_{21} = 0,1 \text{ См}$ ,  $\underline{A}_{22} = 1 + j$ .

**8.14** Знайти  $A$ -параметри чотириполюсника за допомогою дослідів короткого замикання і холостого ходу (рис. 8.14), якщо  $X_L = R = 10$  Ом,  $X_C = 5$  Ом. Перевірити правильність розрахунку.

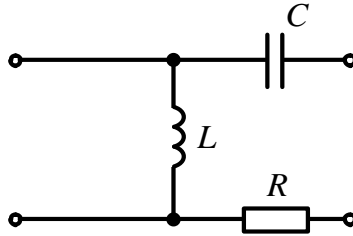


Рисунок 8.14

**Відповідь:**  $\underline{A}_{11} = 1$ ,  $\underline{A}_{12} = -j5$  Ом,  $\underline{A}_{21} = -j0,1$  См,  $\underline{A}_{22} = 0,5$ .

**8.15** Визначити параметри  $T$ - і  $\Pi$ -подібної схем заміщення чотириполюсника, якщо задані його  $A$ -параметри:  $\underline{A}_{11} = 1 - j2$ ,  $\underline{A}_{12} = 10 - j5$  Ом,  $\underline{A}_{22} = 1 + j$ .

**Відповідь:** для  $T$ -подібної схеми:  $\underline{Z}_0 = 5$  Ом,  $\underline{Z}_1 = -j10$  Ом,  $\underline{Z}_2 = j10$  Ом;  
для  $\Pi$ -подібної схеми:  $\underline{Z}_0 = 10 - j5$  Ом,  $\underline{Z}_1 = -5 - j10$  Ом,  $\underline{Z}_2 = 2,5 + j5$  Ом.

**8.16** У симетричного чотириполюсника відомі коефіцієнти  $\underline{A}_{11} = 1 - j0,5$ ,  $\underline{A}_{12} = 10 - j2,5$  Ом. Побудувати  $T$ -подібну схему заміщення чотириполюсника і знайти його характеристичні параметри.

**Відповідь:**  $\underline{Z}_0 = j10$  Ом,  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 5$  Ом;  $a = 0,732$  Нп,  $b = -0,675$  рад,  $\underline{Z}_c = 10,15e^{j38^\circ}$  Ом.

**8.17** Для симетричного чотириполюсника (рис. 8.15) визначити опір навантаження  $Z_H$ , за наявності якого вхідний опір чотириполюсника також буде рівний значенню  $Z_H$ . За виконання зазначеної умови обчислити, як зміниться вихідна напруга відносно вхідної за діючим значенням та фазою. Параметри кола такі:  $R = X_C = 20$  Ом.

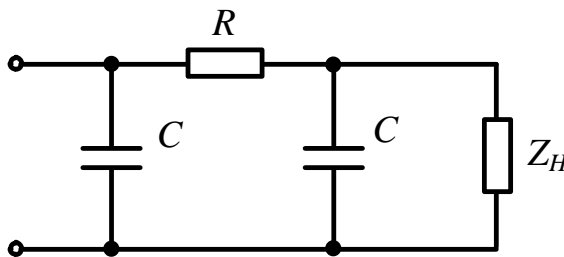


Рисунок 8.15

**Відповідь:**  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_c = 13,37e^{-j58,3^\circ}$  Ом;  $\frac{U_2}{U_1} = 0,344e^{-j52,4^\circ}$ , тобто діюче значення вихідної

напруги менше від вхідної в 2,91 рази, а сама напруга відстає за фазою на  $52,45^\circ$ .

**8.18** За заданими характеристичними параметрами симетричного чотириполюсника  $a = 0,732$  Нп,  $b = -0,675$  рад,  $Z_C = 20,3e^{-j52^\circ}$  Ом побудувати його  $T$ -подібну схему заміщення.

**Відповідь:**  $Z_1 = Z_2 = -j10$  Ом,  $Z_0 = 20$  Ом.

**8.19** Два симетричні чотириполюсники з параметрами:  $A'_{11} = 1 + j0,5$ ,  $A'_{12} = 10 + j2,5$  Ом і  $A''_{11} = 1 + j2$ ,  $A''_{12} = -20 + j20$  Ом з'єднані каскадно. Визначити  $A$ -параметри складеного чотириполюсника і знайти значення опорів його  $T$ -подібної схеми заміщення.

**Відповідь:**  $A_{11} = 2 + j3$ ,  $A_{12} = -25 + j32,5$  Ом,  $A_{21} = j0,2$  См,  $A_{22} = -2 + j0,5$ ;  
 $Z_1 = 15 - j5$  Ом,  $Z_2 = 2,5 + j15$  Ом,  $Z_0 = -j5$  Ом.

**8.20** Чотириполюсник має параметри  $A_{11} = 0,5 + j0,25$ ,  $A_{12} = 2,5 + j15$  Ом,  $A_{21} = j0,05$  См. Яким суто активним опором необхідно навантажити чотириполюсник, щоб вхідний струм і напруга збігались за фазою?

**Відповідь:**  $R_H = 17,32$  Ом.

**8.21** В симетричному чотириполюснику вхідна напруга  $U_1 = 36$  В стала. За замкнутого ключа  $K$  струм  $I_1 = 2,4$  А, струм  $I_2 = 1,2$  А. Визначити ці струми за розімкнутого ключа, якщо  $R_H = 30$  Ом (рис. 8.16).

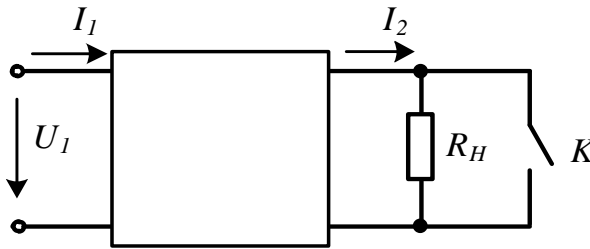


Рисунок 8.16

**Відповідь:**  $I_1 = 2$  А,  $I_2 = 0,4$  А.

**8.22** Для симетричного чотириполюсника, показаного на рис. 8.17, де параметри елементів  $X_L = 5$  Ом,  $X_C = 10$  Ом,  $R = 10$  Ом, визначити:

- 1)  $A$ -параметри чотириполюсника;
- 2) зміну вихідної напруги порівняно з вхідною за діючим значенням та початковою фазою:
  - а) в режимі холостого ходу;
  - б) у випадку навантаження, рівного характеристичному опору.

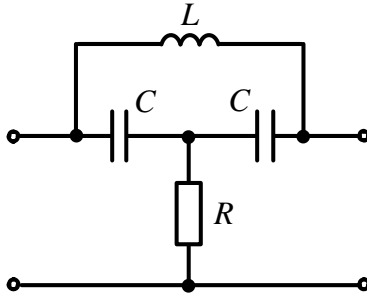


Рисунок 8.17

**Відповідь:** 1)  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 0,877 e^{j15,26^\circ}$ ,  $\underline{A}_{12} = 6,2 e^{j97,12^\circ}$  Ом,  $\underline{A}_{21} = 0,0832 e^{j33,7^\circ}$  См;

2) а)  $\frac{U_1}{U_2} = 0,877$ ,  $\beta_1 - \beta_2 = j15,26^\circ$ ;

б)  $\frac{U_1}{U_2} = 1,477$ ,  $\beta_1 - \beta_2 = j37,65^\circ$ .

**8.23** Відомі А-параметри симетричного чотирьополосника:  $\underline{A}_{11} = 1 - j0,5$ ,  $\underline{A}_{12} = 20 - j5$  Ом. Визначити, ємність чи індуктивність слід під'єднати до вихідних затискачів чотирьополосника, щоб на вході чотирьополосника спостерігався резонанс на частоті  $f = 50$  Гц. Розрахувати значення цього елемента.

**Відповідь:** необхідно під'єднати ємність значенням  $C = 318,3$  мкФ.

**8.24** Визначити значення індуктивності і ємності фільтра (рис. 8.18), якщо відомо, що гранична частота смуги пропускання  $\omega_2 = 5000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ , а характеристичний опір фільтра на частоті, яка удвічі менша від граничної, дорівнює 500 Ом.

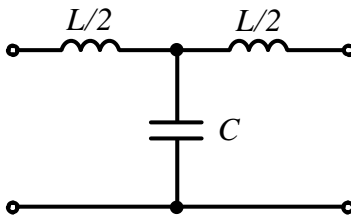


Рисунок 8.18

**Відповідь:**  $L = 0,23$  Гн,  $C = 0,7$  мкФ.



## Розділ 9

# ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ЗА НЕСИНУСОЇДНИХ НАПРУГ І СТРУМІВ

Основною відмінною рисою даних кіл є те, що на підставі принципу накладання розрахунок здійснюється для кожної гармоніки *окремо* з урахуванням *залежності опорів реактивних елементів* від частоти кожної з гармонік.

**9.1** Розкласти наведену на рис. 9.1 періодичну криву напруги  $u(t)$  в ряд Фур'є.

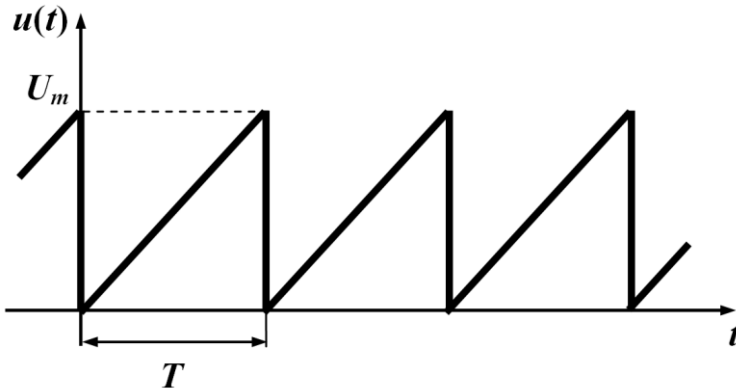


Рисунок 9.1

### Розв'язування

Періодичну несинусоїдну напругу можна подати рядом Фур'є:

$$u(t) = U_0 + U_{1ms} \sin \omega t + U_{1mc} \cos \omega t + U_{2ms} \sin 2\omega t + U_{2mc} \cos 2\omega t + \dots$$

Коефіцієнти ряду знаходяться за формулами

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad U_{kms} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(k\omega t) dt, \quad U_{kmc} = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(k\omega t) dt.$$

З графіка рис. 9.1 видно, що в інтервалі  $0 < t < T$  напруга  $u(t)$  як функція часу змінюється за лінійним законом

$$u(t) = \frac{U_m}{T} t,$$

тому для неї отримуємо

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m}{T} t dt = \frac{U_m}{2},$$

$$U_{kms} = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{U_m}{T} t \sin(k\omega t) dt = -\frac{U_m}{k\pi},$$

$$U_{kmc} = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{U_m}{T} t \cos(k\omega t) dt = 0.$$

Отже, ряд Фур'є для заданої форми напруги набуває вигляду

$$u(t) = \frac{U_m}{2} - \frac{U_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right).$$

Можна було заздалегідь передбачити, що в отриманому ряді складові з парними функціями (косинусами) будуть відсутніми. Дійсно, якщо вісь абсцис (див. рис. 9.1) підняти на рівень постійної складової, тобто на величину  $\frac{U_m}{2}$ , то функція напруги отримає симетрію відносно нової точки відліку координат, а це означає, що до ряду Фур'є входять виключно непарні функції.

**9.2** Визначити струми у вітках електричного кола, зображеного на рис. 9.2, якщо до його входу прикладається несинусоїдна періодична напруга, графік якої наведено в задачі 9.1. Амплітудне значення напруги  $U_m = 100$  В. Параметри кола для першої гармоніки:  $X_L^{(1)} = 4$  Ом (верхнім індексом позначено номер гармоніки),  $X_C^{(1)} = 12$  Ом,  $R = 8$  Ом. Розрахунок необхідно виконати включно до третьої гармоніки.

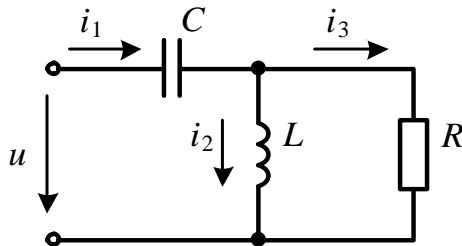


Рисунок 9.2

### Розв'язування

Розрахунок кола за несинусоїдною зовнішньою дією здійснюється для кожної гармоніки ряду Фур'є окремо. В результаті знаходяться миттєві значення струмів окремих гармонік, після чого на підставі принципу накладання результуючий несинусоїдний струм визначається як їхня алгебраїчна сума.

Отже, подамо прикладену напругу рядом Фур'є за умови, що  $U_m = 100$  В.

Тоді

$$u = 50 - (31,8 \sin \omega t + 15,9 \sin 2\omega t + 10,6 \sin 3\omega t + \dots) \text{ В.}$$

Більш зручно цей ряд записати без від'ємного знака перед дужкою, для чого змінимо початкові фази синусоїдних функцій на  $\pm 180^\circ$

$$u = 50 + 31,8 \sin(\omega t - 180^\circ) + 15,9 \sin(2\omega t - 180^\circ) + \\ + 10,6 \sin(3\omega t - 180^\circ) + \dots$$

1. Для *нульової* гармоніки частота дорівнює нулю, тому опір індуктивності  $X_L^{(0)} = \omega L = 0$ , а опір ємності  $X_C^{(0)} = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty$ , через що в усіх вітках даного кола нульові гармоніки струмів відсутні, тобто  $i_1^{(0)} = 0$ ,  $i_2^{(0)} = 0$ ,  $i_3^{(0)} = 0$ .

2. Для *першої* гармоніки опори реактивних елементів задані умовою задачі. Комплексне діюче значення вхідного струму першої гармоніки визначається за законом Ома символічним методом

$$\underline{I}_1^{(1)} = \frac{\underline{U}_1^{(1)}}{\underline{Z}_{\text{вх}}^{(1)}},$$

де  $\underline{Z}_{\text{вх}}^{(1)} = -jX_C^{(1)} + \frac{R jX_L^{(1)}}{R + jX_L^{(1)}} = -j12 + \frac{8j4}{8 + j4} = 8,944e^{-79,7^\circ}$  Ом – вхідний опір кола.

$$\text{Звідси } \underline{I}_1^{(1)} = \frac{31,8e^{-j180^\circ}}{8,944e^{-j79,7^\circ}} = 2,51e^{-j100,3^\circ} \text{ А.}$$

Миттєве значення струму першої гармоніки

$$i_1^{(1)} = 2,51\sqrt{2} \sin(\omega t - 100,3^\circ) \text{ А.}$$

Комплексні діючі значення струмів першої гармоніки в другій і третій вітках знаходимо за виразами

$$\underline{I}_2^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} \frac{R}{R + jX_L^{(1)}} = 2,25e^{-j126,9^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_3^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} \frac{jX_L^{(1)}}{R + jX_L^{(1)}} = 1,125e^{-j36,9^\circ} \text{ А.}$$

Тоді миттєві значення струмів

$$i_2^{(1)} = 2,25\sqrt{2} \sin(\omega t - 126,9^\circ) \text{ А,}$$

$$i_3^{(1)} = 1,125\sqrt{2} \sin(\omega t - 36,9^\circ) \text{ А.}$$

3. Аналогічно розраховуються струми *другої* гармоніки. Так,

$$\underline{I}_1^{(2)} = \frac{U_1^{(2)}}{\underline{Z}_{\text{ex}}^{(2)}},$$

де

$$\underline{Z}_{\text{ex}}^{(2)} = -jX_C^{(2)} + \frac{RjX_L^{(2)}}{R + jX_L^{(2)}},$$

а  $X_L^{(2)} = 2\omega L = 2X_L^{(1)} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_C^{(2)} = \frac{1}{2\omega C} = \frac{X_C^{(1)}}{2} = 6 \text{ Ом}$ .

Отже,

$$\underline{Z}_{\text{ex}}^{(2)} = -j6 + \frac{8j8}{8 + j8} = 4,47e^{-j26,6^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{I}_1^{(2)} = \frac{15,9e^{-j180^\circ}}{4,47e^{-j26,6^\circ}} = 2,52e^{-j153,4^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_2^{(2)} = 1,78e^{-j198,4^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_3^{(2)} = 1,78e^{-j108,4^\circ} \text{ А}.$$

Миттєві значення струмів другої гармоніки

$$i_1^{(2)} = 2,52\sqrt{2} \sin(2\omega t - 153,4^\circ) \text{ А},$$

$$i_2^{(2)} = 1,78\sqrt{2} \sin(2\omega t - 198,4^\circ) \text{ А},$$

$$i_3^{(2)} = 1,78\sqrt{2} \sin(2\omega t - 108,4^\circ) \text{ А}.$$

4. Для *третьої* гармоніки маємо

$$X_L^{(3)} = 3X_L^{(1)} = 12 \text{ Ом}, \quad X_C^{(3)} = \frac{X_C^{(1)}}{3} = 4 \text{ Ом},$$

тому

$$\underline{Z}_{\text{ex}}^{(3)} = -jX_C^{(3)} + \frac{RjX_L^{(3)}}{R + jX_L^{(3)}} = 5,55e^{-j3,2^\circ} \text{ Ом},$$

а комплексні діючі значення струмів

$$\underline{I}_1^{(3)} = 1,35e^{-j176,8^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_2^{(3)} = 0,75e^{-j233,1^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_3^{(3)} = 1,123e^{-j143,1^\circ} \text{ А}.$$

Миттєві значення струмів третьої гармоніки:

$$i_1^{(3)} = 1,35\sqrt{2} \sin(3\omega t - 176,8^\circ) \text{ А},$$

$$i_2^{(3)} = 0,75\sqrt{2} \sin(3\omega t - 233,1^\circ) \text{ А},$$

$$i_3^{(3)} = 1,123\sqrt{2} \sin(3\omega t - 143,1^\circ) \text{ А}.$$

5. Струми у вітках подаємо рядом Фур'є і записуємо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= 3,55 \sin(\omega t - 100,3^\circ) + 3,56 \sin(2\omega t - 153,4^\circ) + \\
 &\quad + 1,91 \sin(3\omega t - 176,8^\circ) \text{ A,} \\
 i_2 &= 3,18 \sin(\omega t - 126,9^\circ) + 2,52 \sin(2\omega t - 198,4^\circ) + \\
 &\quad + 1,06 \sin(3\omega t - 233,1^\circ) \text{ A,} \\
 i_3 &= 1,59 \sin(\omega t - 36,9^\circ) + 2,52 \sin(2\omega t - 108,4^\circ) + \\
 &\quad + 1,59 \sin(3\omega t - 143,1^\circ) \text{ A.}
 \end{aligned}$$

**9.3** За результатами розрахунку задачі 9.2 виконати такі завдання:

- 1) визначити діючі значення вхідної напруги і всіх струмів;
- 2) перевірити баланс активної і реактивної потужностей;
- 3) розрахувати коефіцієнт потужності.

### Розв'язування

1. Діюче значення несинусоїдного струму є середньоквадратичним від діючого значення струму окремих гармонік і визначається як корінь квадратний від суми їх квадратів, тобто

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sqrt{I_1^{(1)^2} + I_1^{(2)^2} + I_1^{(3)^2}} = \sqrt{\left(\frac{3,55}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3,56}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1,91}{\sqrt{2}}\right)^2} = 3,8 \text{ A,} \\
 I_2 &= \sqrt{I_2^{(1)^2} + I_2^{(2)^2} + I_2^{(3)^2}} = \sqrt{\left(\frac{3,18}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2,52}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1,06}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2,96 \text{ A,} \\
 I_3 &= \sqrt{I_3^{(1)^2} + I_3^{(2)^2} + I_3^{(3)^2}} = \sqrt{\left(\frac{1,59}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2,52}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1,59}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2,385 \text{ A.}
 \end{aligned}$$

Діюче значення напруги повинно враховувати постійну складову  $U^{(0)} = U_0$ , тому

$$\begin{aligned}
 U &= \sqrt{U^{(0)^2} + U^{(1)^2} + U^{(2)^2} + U^{(3)^2}} = \\
 &= \sqrt{50^2 + \left(\frac{31,8}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{15,9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10,6}{\sqrt{2}}\right)^2} = 56,46 \text{ В.}
 \end{aligned}$$

2. Активна потужність джерела у випадку несинусоїдних струмів визначається як сума активних потужностей окремих гармонік

$$\begin{aligned}
 P_{\text{дж}} &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots = \\
 &= \frac{31,8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3,55}{\sqrt{2}} \cos(-79,7^\circ) + \frac{15,9}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3,56}{\sqrt{2}} \cos(-26,6^\circ) +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{10,6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1,91}{\sqrt{2}} \cos(-3,2^\circ) = 45,5 \text{ Вт.}$$

Активна потужність в електричних колах споживається активними опорами, тому для нашої задачі

$$P_{cn} = I_3^2 R = 2,385^2 \cdot 8 = 45,5 \text{ Вт.}$$

Отже, баланс активних потужностей виконується.

Складемо баланс реактивних потужностей. Реактивна потужність джерела

$$Q_{дж} = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 + \dots = -68,75 \text{ вар.}$$

Реактивна потужність споживачів розраховується для кожної гармоніки окремо, оскільки опори реактивних елементів для різних гармонік є різними, через що

$$Q_{cn} = I_2^{(1)^2} X_L^{(1)} + I_2^{(2)^2} X_L^{(2)} + I_2^{(3)^2} X_L^{(3)} - I_1^{(1)^2} X_C^{(1)} - I_1^{(2)^2} X_C^{(2)} - I_1^{(3)^2} X_C^{(3)} = -68,75 \text{ ВАр.}$$

Відтак виконується і баланс реактивних потужностей.

3. Коefіцієнтом потужності зазвичай називають відношення активної потужності до повної

$$\alpha = \frac{P}{S}.$$

Активну потужність вже знайдено:  $P = 45,5 \text{ Вт}$ . Повна ж потужність в колах з несинусоїдними напругами і струмами дорівнює добутку діючих значень вхідних напруги і струму

$$S = UI = 56,46 \cdot 3,8 = 214,5 \text{ ВА.}$$

$$\text{Звідки коefіцієнт потужності } \alpha = \frac{45,515}{214,5} = 0,212.$$

**9.4** До електричного кола (рис. 9.3) прикладено несинусоїдну напругу

$$u = 120 \sin(\omega t + 20^\circ) + 90 \sin(2\omega t - 60^\circ) + 60 \sin 3\omega t \text{ В.}$$

Для першої гармоніки  $X_L^{(1)} = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_C^{(1)} = 18 \text{ Ом}$ ,  $R = 10 \text{ Ом}$ .

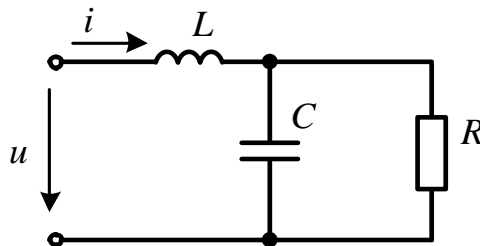


Рисунок 9.3

Необхідно:

- 1) визначити діюче значення вхідного струму, виконавши для цього розрахунок за кожною гармонікою окремо (точний розв'язок);
- 2) замінити несинусоїдну вхідну напругу еквівалентною синусоїдою і розрахувати діюче значення вхідного струму як синусоїдного (наближене рішення);
- 3) порівняти обидва розв'язки і оцінити похибку.

### Розв'язування

1. Знайдемо вхідний струм першої гармоніки, для чого визначимо вхідний опір кола за цією гармонікою

$$\underline{Z}_{ex}^{(1)} = jX_L^{(1)} + \frac{R(-jX_C^{(1)})}{R - jX_C^{(1)}} = 7,644e^{-j2^\circ} \text{ Ом.}$$

Тоді амплітудне комплексне значення вхідного струму першої гармоніки буде

$$\underline{I}_m^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{\underline{Z}_{ex}^{(1)}} = \frac{120e^{j20^\circ}}{7,644e^{-j2^\circ}} = 15,7e^{j22^\circ} \text{ А.}$$

Вхідний опір за другою гармонікою

$$\underline{Z}_{ex}^{(2)} = j8 + \frac{10(-j9)}{10 - j9} = 5,407e^{j34,1^\circ} \text{ Ом,}$$

а амплітудне комплексне значення струму другої гармоніки

$$\underline{I}_m^{(2)} = \frac{U_m^{(2)}}{\underline{Z}_{ex}^{(2)}} = \frac{90e^{-j60^\circ}}{5,407e^{j34,1^\circ}} = 16,64e^{-j94,1^\circ} \text{ А.}$$

Вхідний опір і амплітуда струму третьої гармоніки

$$\underline{Z}_{ex}^{(3)} = j12 + \frac{10(-j6)}{10 - j6} = 8,04e^{j70,77^\circ} \text{ Ом,}$$

$$\underline{I}_m^{(3)} = \frac{60}{8,04e^{j70,77^\circ}} = 7,59e^{-j70,77^\circ} \text{ А.}$$

Діюче значення вхідного струму

$$I = \sqrt{I^{(1)2} + I^{(2)2} + I^{(3)2}} = \sqrt{\left(\frac{15,7}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{16,64}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{7,59}{\sqrt{2}}\right)^2} = 17,04 \text{ А.}$$

2. Замінімо несинусоїдну вхідну напругу еквівалентною синусоїдою. Діюче значення цієї синусоїди розраховується як діюче значення несинусоїдної напруги, тобто

$$U_e = \sqrt{U^{(1)2} + U^{(2)2} + U^{(3)2}} = \sqrt{\left(\frac{120}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{90}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2} = 114,2 \text{ В.}$$

Вхідний опір для першої (основної) гармоніки вже визначено, тому наближене діюче значення вхідного струму

$$I_e = \frac{U_e}{Z_{ex}^{(1)}} = \frac{114,2}{7,644} = 14,94 \text{ А.}$$

3. Порівняємо отримані значення точного і наближеного результатів. Звертаємо увагу на те, що наближене значення менше, аніж точне, і похибка становить

$$\varepsilon = \frac{I - I_e}{I} \cdot 100\% = \frac{17,04 - 14,94}{17,04} \cdot 100\% = 14,1\% .$$

Необхідно зауважити, що похибка розрахунку, яка виникає внаслідок заміни реальної несинусоїдної напруги еквівалентною синусоїдою, залежить і від форми кривої напруги, і від структури та параметрів електричного кола, тому заздалегідь визначити ймовірну похибку неможливо.

**9.5** На вхід кола (рис. 9.4) подається несинусоїдна напруга

$$u_1 = 60 \sin \omega t + 40 \sin(3\omega t - 60^\circ) + 30 \sin(5\omega t + 30^\circ) \text{ В,}$$

де  $\omega = 1000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Між входом кола та опором навантаження  $R = 10 \text{ Ом}$  увімкнено

фільтр верхніх частот (ФВЧ) з граничною частотою  $\omega_1 = 5000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Потрібно розрахувати параметри цього фільтра та напругу навантаження.

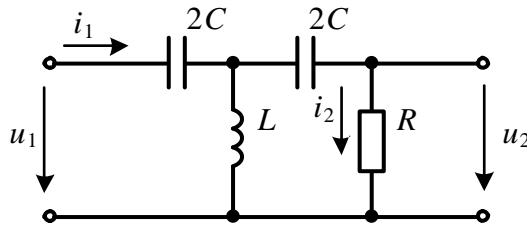


Рисунок 9.5

### Розв'язування

Параметри фільтра високої частоти розрахуємо за формулами

$$L = \frac{R}{2\omega_1} = \frac{10}{2 \cdot 5000} = 1 \text{ мГн,}$$

$$C = \frac{1}{2\omega_1 R} = \frac{1}{2 \cdot 5000 \cdot 10} = 10 \text{ мкФ.}$$

Подамо фільтр  $T$ -подібною схемою заміщення симетричного чотирьополусника і визначимо його  $A$ -параметри для кожної із заданих гармонік окремо.

Так, для довільної  $k$ -ої гармоніки маємо

$$\underline{A}_{11}^{(k)} = 1 + \frac{\underline{Z}_1^{(k)}}{\underline{Z}_0^{(k)}}, \quad \underline{A}_{12}^{(k)} = 2\underline{Z}_1^{(k)} + \frac{\underline{Z}_1^{(k)2}}{\underline{Z}_0^{(k)}},$$



де  $\underline{Z}_1^{(k)} = -j \frac{1}{2k\omega C}$ ,  $\underline{Z}_0^{(k)} = jk\omega L$ .

Підставимо опори  $\underline{Z}_1^{(k)}$  і  $\underline{Z}_0^{(k)}$  в  $\underline{A}_{11}^{(k)}$  і  $\underline{A}_{12}^{(k)}$ , внаслідок чого отримаємо

$$\underline{A}_{11}^{(k)} = 1 - \frac{1}{2k^2\omega^2 LC}, \quad \underline{A}_{12}^{(k)} = -j \frac{1}{k\omega C} \left( 1 - \frac{1}{4k^2\omega^2 LC} \right).$$

Якщо врахувати, що для високочастотних фільтрів гранична частота  $\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ , а характеристичний опір фільтра за умови  $\omega = \infty$  вважається рівним

опору навантаження  $R$ , тобто  $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , то після окремих перетворень для означених  $A$ -параметрів можна остаточно записати

$$\underline{A}_{11}^{(k)} = 1 - \frac{2}{(kv)^2}, \quad \underline{A}_{12}^{(k)} = -j \frac{2R}{kv} \left( 1 - \frac{1}{(kv)^2} \right),$$

де  $v = \frac{\omega}{\omega_1}$ .

Оскільки напруга і струм на виході фільтра пов'язані співвідношенням  $\underline{I}_2^{(k)} = \frac{\underline{U}_2^{(k)}}{R}$ , то нескладно виразити вихідну напругу через вхідну:

$$\underline{U}_2^{(k)} = \frac{\underline{U}_1^{(k)}}{\left( 1 - \frac{2}{(kv)^2} \right) - j \frac{2}{kv} \left( 1 - \frac{1}{(kv)^2} \right)}.$$

Отриманий вираз є узагальненим і дозволяє розрахувати напругу на виході фільтра для будь-якої частоти, що, в свою чергу, дає змогу побудувати його частотну характеристику.

Однак наша задача є дещо простішою, оскільки потрібно відшукати діюче значення вихідної напруги лише для трьох гармонік.

Для нашого прикладу  $v = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{1000}{5000} = 0,2$ , тому для першої гармоніки ( $k = 1$ )

маємо

$$\underline{U}_2^{(1)} = \frac{\frac{60}{\sqrt{2}}}{\left( 1 - \frac{2}{0,2^2} \right) - j \frac{2}{0,2} \left( 1 - \frac{1}{0,2^2} \right)} = 0,173e^{-j101,5^\circ} \text{ В},$$

для третьої ( $k = 3$ ) –

$$\underline{U}_2^{(3)} = \frac{\frac{40}{\sqrt{2}} e^{-j60^\circ}}{\left(1 - \frac{2}{0,6^2}\right) - j \frac{2}{0,6} \left(1 - \frac{1}{0,6^2}\right)} = 3,79 e^{172,4^\circ} \text{ В,}$$

а для п'ятої ( $k = 5$ ) –

$$\underline{U}_2^{(5)} = \frac{\frac{30}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ}}{\left(1 - \frac{2}{1^2}\right) - j \frac{2}{1} \left(1 - \frac{1}{1^2}\right)} = 21,21 e^{-j150^\circ} \text{ В.}$$

Тоді миттєва напруга навантаження запишеться рядом Фур'є:

$$u_2 = 0,245 \sin(\omega t - 101,5^\circ) + 5,36 \sin(3\omega t + 172,4^\circ) + \\ + 30 \sin(5\omega t - 150^\circ) \text{ В.}$$

Порівняння прикладеної напруги з отриманою напругою на навантаженні дозволяє дійти висновку, що напруга п'ятої гармоніки залишилася незмінною, перша ж гармоніка практично зникла, а амплітуда третьої гармоніки зазнала суттєвого зменшення (в 7,5 рази), що переконливо доводить функціональну спроможність фільтра верхніх частот.

**9.6** Розрахувати параметри низькочастотного фільтра, наведеного на рис. 9.5, якщо опір навантаження  $R = 15$  Ом, а прикладена напруга є періодичною несинусоїдною

$$u_1 = 150 \sin \omega t + 120 \sin 2\omega t + 80 \sin 3\omega t \text{ В.}$$

Знайти вихідну напругу  $u_2$  і порівняти коефіцієнти спотворення вхідної і вихідної напруг. Граничну частоту вважати рівною  $\omega_2 = 1,5\omega$ , де  $\omega = 500 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

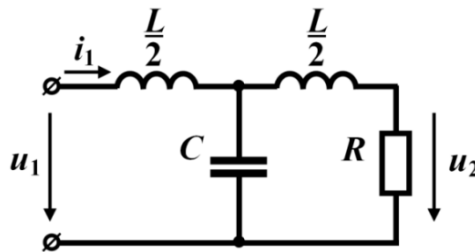


Рисунок 9.5

### Розв'язування

Параметри фільтра нижніх частот за заданої граничної частоти і опору навантаження визначаються за формулами

$$L = \frac{2R}{\omega_2}, \quad C = \frac{2}{\omega_2 R},$$

звідки  $L = 40$  мГн,  $C = 177,8$  мкФ.

Дану задачу розв'яжемо дещо в інший спосіб, аніж попередню, продемонструвавши таким чином існування різних підходів до розв'язування тієї чи іншої задачі та можливість оптимізації способів розв'язування.

Отже, за заданих параметрів кола визначимо вихідну напругу для кожної гармоніки окремо.

*Перша гармоніка.* Комплексний вхідний опір кола

$$\underline{Z}_{\text{ex}}^{(1)} = j \frac{X_L^{(1)}}{2} + \frac{(-jX_C^{(1)})(R + j \frac{X_L^{(1)}}{2})}{R + j(\frac{X_L^{(1)}}{2} - X_C^{(1)})} = 8,4e^{-j3,9^\circ} \text{ Ом},$$

де  $X_L^{(1)} = \omega L = 20$  Ом,  $X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega C} = 11,25$  Ом.

Вхідний струм  $\underline{I}_1^{(1)} = \frac{U_1^{(1)}}{\underline{Z}_{\text{ex}}^{(1)}} = 12,63e^{j3,9^\circ}$  А.

Комплексне діюче значення першої гармоніки вихідної напруги

$$\underline{U}_2^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} \frac{(-jX_C^{(1)})R}{R + j\left(\frac{X_L^{(1)}}{2} - X_C^{(1)}\right)} = 141,6e^{-j81,34^\circ} \text{ В},$$

відповідно її миттєве значення

$$u_2^{(1)} = 200 \sin(\omega t - 81,34^\circ) \text{ В}.$$

*Друга гармоніка.* Підставимо в формулу  $\underline{Z}_{\text{ex}}$  замість  $X_L^{(1)}$  і  $X_C^{(1)}$  опори

$X_L^{(2)} = 2X_L^{(1)}$  і  $X_C^{(2)} = \frac{X_C^{(1)}}{2}$ , відповідно, внаслідок чого отримаємо

$$\underline{Z}_{\text{ex}}^{(2)} = 13,37e^{j85,28^\circ} \text{ Ом}.$$

Тоді  $\underline{I}_1^{(2)} = 6,35e^{-j85,28^\circ}$  А, а  $\underline{U}_2^{(2)} = 25,8e^{j140,9^\circ}$  В.

Миттєве значення вихідної напруги другої гармоніки

$$u_2^{(2)} = 36,5 \sin(2\omega t + 140,9^\circ) \text{ В}.$$

*Третя гармоніка.* Підставляємо опори  $X_L^{(3)} = 3X_L^{(1)}$  і  $X_C^{(3)} = \frac{X_C^{(1)}}{3}$ , отримуємо

$\underline{Z}_{\text{ex}}^{(3)} = 25,85e^{j89,5^\circ}$  Ом,  $\underline{I}_1^{(3)} = 2,19e^{-j89,5^\circ}$  А, а  $\underline{U}_2^{(3)} = 4,07e^{j120,3^\circ}$  В.

Миттєве значення вихідної напруги третьої гармоніки

$$u_2^{(3)} = 5,75 \sin(3\omega t + 116,9^\circ) \text{ В.}$$

Отже, напруга на виході електричного кола

$$u_2 = 200 \sin(\omega t - 81,34^\circ) + 36,5 \sin(2\omega t + 140,9^\circ) + 5,75 \sin(3\omega t + 120,3^\circ) \text{ В.}$$

Безпосереднє зіставлення і порівняння спектрів вхідної і вихідної напруг показує, що питома вага вищих гармонік у спектрі останньої є значно меншою.

Порівняємо коефіцієнти спотворення. Виходячи з визначення цього коефіцієнта, враховуємо, що для синусоїди його значення дорівнює одиниці.

Для вхідної напруги

$$k_{cn1} = \frac{U_1^{(1)}}{\sqrt{U_1^{(1)2} + U_1^{(2)2} + U_1^{(3)2}}} = 0,72,$$

а для вихідної

$$k_{cn2} = \frac{U_2^{(1)}}{\sqrt{U_2^{(1)2} + U_2^{(2)2} + U_2^{(3)2}}} = 0,983.$$

Оскільки  $k_{cn2} > k_{cn1}$ , можна дійти висновку щодо функціональної дієздатності досліджуваного фільтра.

**9.7** Визначити миттєві значення прикладеної напруги  $u$ , якщо відомі за першою гармонікою параметри кола, показаного на рис. 9.6,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_1}^{(1)} = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_3}^{(1)} = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{C_2}^{(1)} = 12 \text{ Ом}$ , а також такі значення струмів:

- в першій вітці третя гармоніка  $i_1^{(3)} = 6 \sin(3\omega t - 45^\circ) \text{ А}$ ;
- в другій вітці перша гармоніка  $i_2^{(1)} = 8 \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ А}$ ;
- в третій вітці друга гармоніка  $i_3^{(2)} = 4 \sin 2\omega t \text{ А}$ .

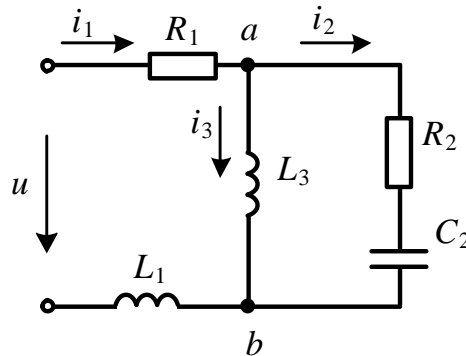


Рисунок 9.6

### Розв'язування

В даній задачі, як і у будь-якій іншій з несинусоїдними струмами, розрахунків потрібно здійснювати за кожною гармонікою окремо. Щоб розрахувати гармоніки прикладеної напруги, необхідно для кожної із них визначити вхідний струм і вхідний опір заданого кола.

Розглянемо *першу гармоніку*. Для цієї гармоніки відомим є електричний струм в другій вітці, що дозволяє розрахувати відповідну напругу цієї вітки

$$\underline{U}_{ab}^{(1)} = \underline{I}_2^{(1)} (R_2 - jX_{C_2}^{(1)}) = \frac{8}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ} (10 - j12) = 88,36 e^{j69,81^\circ} \text{ В.}$$

Другу і третю вітки з'єднано паралельно, через що струм в третій вітці легко визначити через знайдене значення  $\underline{U}_{ab}^{(1)}$

$$\underline{I}_3^{(1)} = \frac{\underline{U}_{ab}^{(1)}}{jX_{L_3}^{(1)}} = \frac{88,36 e^{j69,81^\circ}}{j5} = 17,67 e^{-j20,19^\circ} \text{ А.}$$

За першим законом Кірхгофа струм в першій вітці

$$\underline{I}_1^{(1)} = \underline{I}_2^{(1)} + \underline{I}_3^{(1)} = \frac{8}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ} + 17,67 e^{-j20,19^\circ} = 13,8 e^{-j5^\circ} \text{ А.}$$

Оскільки вхідний опір

$$\underline{Z}_{ex}^{(1)} = R_1 + jX_{L_1}^{(1)} + \frac{jX_{L_3}^{(1)} (R_2 - jX_{C_2}^{(1)})}{R_2 + j(X_{L_3}^{(1)} - X_{C_2}^{(1)})} = 11,35 e^{54^\circ} \text{ Ом,}$$

то вхідна напруга за першою гармонікою

$$\underline{U}^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} \underline{Z}_{ex}^{(1)} = 156,6 e^{j49^\circ} \text{ В,}$$

а її миттєве значення

$$u^{(1)} = 221,5 \sin(\omega t + 49^\circ) \text{ В.}$$

*Друга гармоніка*. Насамперед визначаємо напругу третьої вітки і здійснюємо це подібно до вищевказаного, враховуючи, що опір індуктивності  $X_L^{(k)} = kX_L^{(1)}$ ,

а ємності  $X_C^{(k)} = \frac{X_C^{(1)}}{k}$ :

$$\underline{U}_{ab}^{(2)} = \underline{I}_3^{(2)} jX_{L_3}^{(2)} = \frac{4}{\sqrt{2}} 10 e^{j90^\circ} = 28,3 e^{j90^\circ} \text{ В,}$$

Після цього знаходимо струм у другій вітці

$$\underline{I}_2^{(2)} = \frac{\underline{U}_{ab}^{(2)}}{R_2 - jX_{C_2}^{(2)}} = 2,43 e^{j121^\circ} \text{ А,}$$

а потім – і в першій  $\underline{I}_1^{(2)} = \underline{I}_2^{(2)} + \underline{I}_3^{(2)} = 3,45 e^{j37,1^\circ} \text{ А.}$

Тоді вхідна напруга

$$\underline{U}^{(2)} = I_1^{(2)} \left[ R_1 + jX_{L_1}^{(2)} + \frac{jX_{L_3}^{(2)} (R_2 - jX_{C_2}^{(2)})}{R_2 + j(X_{L_3}^{(2)} - X_{C_2}^{(2)})} \right] = 63,9e^{j79,75^\circ} \text{ В.}$$

Отже, миттєве значення вхідної напруги другої гармоніки

$$u^{(2)} = 90,4 \sin(2\omega t + 79,75^\circ) \text{ В.}$$

*Третя гармоніка.* Вхідний струм третьої гармоніки відомий, що дозволяє відразу розрахувати комплексне діюче значення вхідної напруги

$$\underline{U}^{(3)} = I_1^{(3)} \left[ R_1 + jX_{L_1}^{(3)} + \frac{jX_{L_3}^{(3)} (R_2 - jX_{C_2}^{(3)})}{R_2 + j(X_{L_3}^{(3)} - X_{C_2}^{(3)})} \right] = 84,2e^{-j4,84^\circ} \text{ В}$$

та її миттєве значення  $u^{(3)} = 119 \sin(3\omega t - 4,84^\circ) \text{ В.}$

Таким чином, для вхідної напруги отримуємо ряд:

$$u = 221,5 \sin(\omega t + 49^\circ) + 90,4 \sin(2\omega t + 79,75^\circ) + 119 \sin(3\omega t - 4,84^\circ) \text{ В.}$$

**9.8** До індуктивності приклали синусоїдну напругу  $u_1$ , діюче значення якої  $U_1 = 200 \text{ В}$ . За такої напруги діюче значення струму становить  $I_1 = 20 \text{ А}$ . Якщо ж до цієї індуктивності прикласти несинусоїдну напругу  $u_2$ , яка складається вже з двох гармонік – першої і третьої, але з тим самим діючим значенням  $U_2 = 200 \text{ В}$ , то діюче значення струму в індуктивності дещо зміниться і дорівнюватиме  $I_2 = 16 \text{ А}$ . Необхідно визначити діючі значення напруг і струмів кожної гармоніки несинусоїдної напруги  $u_2$ .

### Розв'язування

З першої умови визначимо опір індуктивності за першою гармонікою

$$X_L^{(1)} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{200}{20} = 10 \text{ Ом.}$$

Діюче значення несинусоїдної напруги можна записати через діючі значення її гармонік

$$U_2 = \sqrt{U_2^{(1)2} + U_2^{(3)2}} = 200 \text{ В.}$$

Тоді діюче значення несинусоїдного струму

$$I_2 = \sqrt{\left(\frac{U_2^{(1)}}{X_L^{(1)}}\right)^2 + \left(\frac{U_2^{(3)}}{3X_L^{(1)}}\right)^2} = 16 \text{ А.}$$

Останні два рівняння розв'язуємо спільно як систему відносно невідомих

$U_2^{(1)}$  і  $U_2^{(3)}$ , звідки спочатку визначаємо  $U_2^{(1)} = 154$  В, а потому і  $U_2^{(3)} = 127,3$  В.

Діючи значення першої і третьої гармонік струмів відповідно знаходимо як

$$I_2^{(1)} = \frac{U_2^{(1)}}{X_L^{(1)}} = 15,4 \text{ А}; \quad I_2^{(3)} = \frac{U_2^{(3)}}{3X_L^{(1)}} = 4,24 \text{ А}.$$

**9.9** В трифазному симетричному колі (рис. 9.7) фазні е.р.с. несинусоїдні. Так, е.р.с. фази  $A$  записується рядом:

$$e_A = 150\sin\omega t + 120\sin(3\omega t - 40^\circ) + 90\sin(5\omega t + 120^\circ) \text{ В}.$$

Параметри електричного кола для першої гармоніки  $X_L^{(1)} = 3$  Ом,  $R = 10$  Ом,  $X_{L_N}^{(1)} = 1$  Ом. Визначити миттєві значення струмів в фазах та нейтральному проводі для двох випадків: коли ключ  $K$  замкнуто і коли ключ  $K$  розімкнуто.

### Розв'язування

1. Якщо ключ замкнуто, в схемі з'являється нейтральний провід. В цьому випадку за умови з'єднання навантаження зіркою струми в фазах містять *всі* гармоніки.

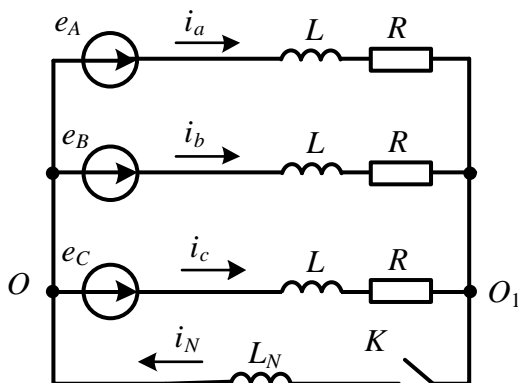


Рисунок 9.7

Струми гармонік, які *не кратні трьом*, розраховуються символічним методом для кожної гармоніки окремо. Потенціали точок  $O$  і  $O_1$  для цих гармонік внаслідок симетричного режиму є однаковими і тому

$$\underline{I}_a^{(1)} = \frac{\underline{E}_A^{(1)}}{R + jX_L^{(1)}} = \frac{150}{\sqrt{2}(10 + j3)} = 10,16e^{-j16,7^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_a^{(5)} = \frac{\underline{E}_A^{(5)}}{R + jX_L^{(5)}} = \frac{90e^{j120^\circ}}{\sqrt{2}(10 + j15)} = 3,53e^{j63,7^\circ} \text{ А}.$$

Струми інших фаз цих гармонік зсунуті один відносно одного на третину періоду основної (першої) гармоніки або ж на  $-120^\circ$ .

Таким чином, для першої гармоніки  $\underline{I}_b^{(1)} = 10,1e^{-j136,7^\circ}$  А,  $\underline{I}_c^{(1)} = 10,1e^{-j256,7^\circ}$  А.

Для п'ятої гармоніки цей зсув становить  $-600^\circ$ , що еквівалентно (з огляду на періодичність)  $-240^\circ$ , тому  $\underline{I}_b^{(5)} = 3,53e^{-j176,3^\circ}$  А,  $\underline{I}_c^{(5)} = 3,53e^{-j56,3^\circ}$  А.

Струми цих гармонік утворюють симетричну систему векторів, у зв'язку з чим струм в нейтральному проводі буде відсутнім.

Розрахунок струмів для гармонік, *кратних трьом*, відрізняється тим, що фазні струми цих гармонік мають однакову початкову фазу, тому нейтральним проводом тече струм, який втричі перевищує значення кожного з фазних струмів зазначених гармонік. Відтак змінюється і опір фазному струму, оскільки до опору фази необхідно додати ще потроєне значення опору нейтрального проводу. Отже,

$$\begin{aligned} \underline{I}_a^{(3)} = \underline{I}_b^{(3)} = \underline{I}_c^{(3)} &= \\ &= \frac{\underline{E}_A^{(3)}}{R + j(X_L^{(3)} + 3X_{L_N}^{(3)})} = \frac{120e^{-j40^\circ}}{\sqrt{2}[10 + j(9+9)]} = 4,12e^{-j100,1^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Запишемо миттєві значення струмів всіх фаз

$$i_a = 14,3 \sin(\omega t - 16,7^\circ) + 5,83 \sin(3\omega t - 100,1^\circ) + 5 \sin(5\omega t + 63,7^\circ) \text{ А,}$$

$$i_b = 14,3 \sin(\omega t - 136,7^\circ) + 5,83 \sin(3\omega t - 100,1^\circ) + 5 \sin(5\omega t - 176,3^\circ) \text{ А,}$$

$$i_c = 14,3 \sin(\omega t - 256,7^\circ) + 5,83 \sin(3\omega t - 100,1^\circ) + 5 \sin(5\omega t - 56,3^\circ) \text{ А.}$$

Миттєвий струм в нейтральному проводі  $i_N = 17,5 \sin(3\omega t - 100,1^\circ)$  А.

2. Якщо ключ розімкнено, то нейтральний провід зникає. Відтак зникають в фазних струмах ті гармоніки, які є кратними трьом:

$$i_a = 14,3 \sin(\omega t - 16,7^\circ) + 5 \sin(5\omega t + 63,7^\circ) \text{ А,}$$

$$i_b = 14,3 \sin(\omega t - 136,7^\circ) + 5 \sin(5\omega t - 176,3^\circ) \text{ А,}$$

$$i_c = 14,3 \sin(\omega t - 256,7^\circ) + 5 \sin(5\omega t - 56,3^\circ) \text{ А,}$$

через що миттєві значення фазних струмів зазнають зміни.

### Задачі для самостійного розв'язування

**9.10** Визначити покази амперметра електродинамічної системи (рис. 9.8) та розрахувати активну  $P$  і повну  $S$  потужності, якщо  $R=10$  Ом,  $L=0,05$  Гн,

$\omega = 100 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ , а вхідна напруга

$$u(t) = 80 + 200 \sin(\omega t - 60^\circ) - 100 \sin 2\omega t + 60 \sin(3\omega t + 80^\circ) \text{ В.}$$



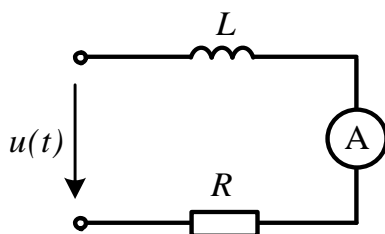


Рисунок 9.8

**Відповідь:** амперметр електродинамічної системи покаже діюче значення струму 16 А;  $P = 2546$  Вт;  $S = 2906$  ВА.

**9.11** Визначити показ амперметра електродинамічної системи (рис. 9.9) та розрахувати активну  $P$  і повну  $S$  потужності, якщо  $R = 15$  Ом,  $C = 400$  мкФ,  $\omega = 100 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ , а вхідна напруга

$$u(t) = 100 + 200 \sin \omega t - 120 \sin(2\omega t + 40^\circ) + 60 \sin(3\omega t - 120^\circ) \text{ В.}$$

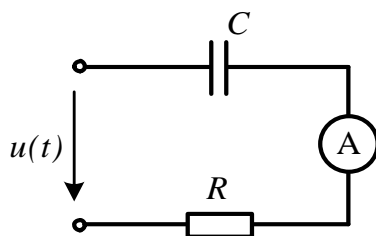


Рисунок 9.9

**Відповідь:** амперметр показує 7 А;  $P = 728$  Вт;  $S = 1382$  ВА.

**9.12** До деякого двополюсника прикладено електричну напругу

$$u(t) = 120 \sin(\omega t - 60^\circ) - 80 \sin 2\omega t + 60 \sin(3\omega t + 80^\circ) \text{ В,}$$

внаслідок чого через нього протікає струм

$$i(t) = 10 \sin(\omega t - 30^\circ) + 6 \sin(2\omega t - 60^\circ) + 4 \sin 3\omega t \text{ А.}$$

Необхідно розрахувати активну потужність і визначити, яка з функцій напруги  $u$  або струму  $i$  найменше відрізняється від синусоїди.

**Відповідь:**  $P = 752,4$  Вт; до синусоїди найближчою є крива струму, оскільки  $k_{cn}^{(u)} = 0,768$ , а  $k_{cn}^{(i)} = 0,811$ .

**9.13** Визначити покази амперметра електродинамічної системи в колі, наведеному на рис. 9.10, та розрахувати активну  $P$  і повну  $S$  потужності, якщо параме-

три кола  $R=10$  Ом,  $L=125$  мГн,  $C=100$  мкФ,  $\omega=200 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ , а вхідна напруга

$$u(t) = 50 + 120 \sin \omega t - 60 \sin(2\omega t - 30^\circ) + 40 \sin(3\omega t + 240^\circ) \text{ В.}$$

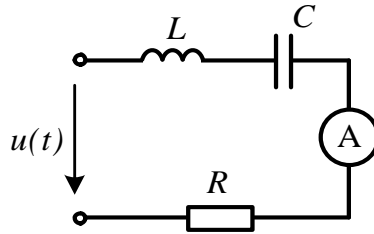


Рисунок 9.10

**Відповідь:** амперметр показує 3,56 А;  $P = 127$  Вт;  $S = 394$  ВА.

**9.14** На виході мостового випрямляча отримано напругу у вигляді додатних півхвиль синусоїди (рис. 9.11).

Розкласти зазначену напругу в ряд Фур'є. Коефіцієнти ряду визначити з урахуванням симетрії, притаманної заданій функції.

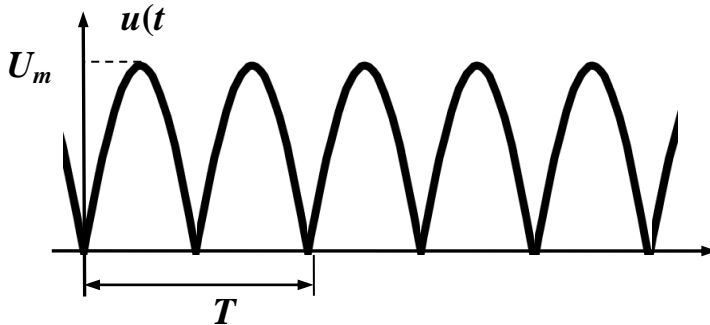


Рисунок 9.11

**Відповідь:** функція є симетричною відносно осі ординат, тому

$$u = \frac{4U_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right) \text{ В.}$$

**9.15** Для визначення параметрів котушки індуктивності за допомогою приладів електродинамічної системи провели вимірювання напруги  $U = 60$  В, струму  $I = 15$  А і активної потужності  $P = 225$  Вт. Відомо, що прикладена напруга несиноїдна і змінюється за законом  $u = U_m (\sin \omega t + 0,4 \sin 3\omega t)$ , де  $\omega = 2\pi f$ , а  $f = 50$  Гц. Розрахувати  $R$  і  $L$  котушки.

**Відповідь:**  $R = 1$  Ом;  $L = 11,5$  мГн.

**9.16** Розкласти наведену на рис. 9.12 напругу в ряд Фур'є.

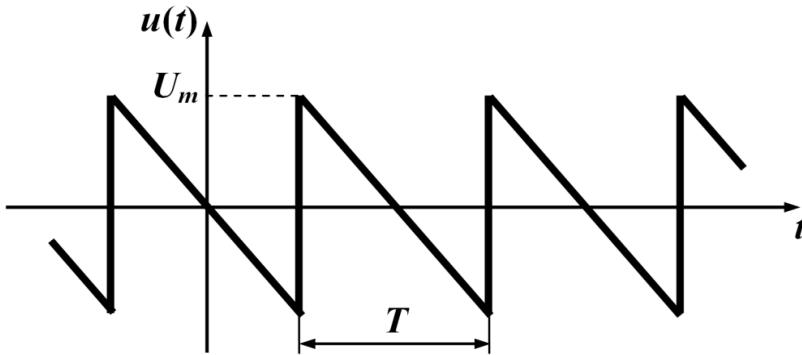


Рисунок 9.12

**Відповідь:** 
$$u = \frac{4U_m}{\pi} \left[ \sin(\omega t + 180^\circ) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t + 180^\circ) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t + 180^\circ) + \dots \right] \text{ В.}$$

**9.17** До кола (рис. 9.13) з параметрами  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_C^{(1)} = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_L^{(1)} = 4 \text{ Ом}$  прикладено несинусоїдну напругу, графік якої показано на рис. 9.12. Амплітудне значення напруги  $U_m = 150 \text{ В}$ . Скористатися визначеними в попередній задачі коефіцієнтами ряду Фур'є і розрахувати три перших (першу, третю і п'яту) гармоніки струмів  $i_C$  та  $i_L$ . Порівняти коефіцієнти спотворення вхідної напруги та цих струмів.

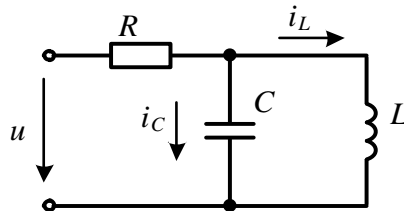


Рисунок 9.13

**Відповідь:** коефіцієнт спотворення для вхідної напруги становить 0,932, а для струмів в індуктивності і ємності 0,988 та 0,548, відповідно.

**9.18** До електричного кола, зображеного на рис. 9.14, прикладено несинусоїдну напругу

$$u(t) = 100 \sin(\omega t - 20^\circ) - 80 \sin 2\omega t + 60 \sin(3\omega t + 60^\circ) \text{ В.}$$

1. Визначити покази амперметра електродинамічної системи.
2. Визначити покази цього ж амперметра, якщо розраховувати коло методом еквівалентних синусоїд. Оцінити отриману при цьому похибку. Параметри кола для першої гармоніки:  $X_L^{(1)} = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_C^{(1)} = 12 \text{ Ом}$ ,  $R = 5 \text{ Ом}$ .

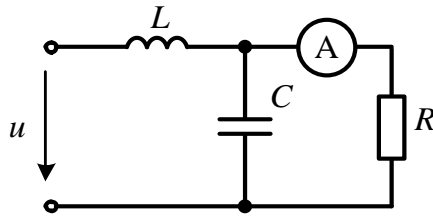


Рисунок 9.14

**Відповідь:** в першому випадку амперметр покаже значення 17,9 А, а в другому показав би 20,8 А. Похибка становить  $\varepsilon = 16\%$ .

**9.19** Провести подібний до попередньої задачі розрахунок електричного кола, наведеного на рис. 9.15, з параметрами, що відповідають задачі 9.18.

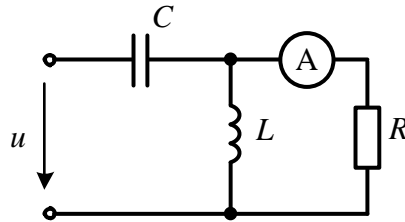


Рисунок 9.15

**Відповідь:** в першому випадку амперметр покаже значення 13,3 А, а в другому показав би 5,2 А. Похибка становить  $\varepsilon = 61\%$  і її велике значення пояснюється тим, що вітці з амперметром передус  $\Gamma$ -подібний фільтр верхніх частот, який суттєво спотворює форму кривої струму цієї вітки порівняно з формою прикладеної напруги.

**9.20** В симетричному трифазному колі (рис. 9.16) е.р.с. генератора є несинусоїдними. Так, е.р.с. фази А має вигляд:

$$e_A = 200\sin \omega t + 100\sin 3\omega t + 60\sin 5\omega t \text{ В.}$$

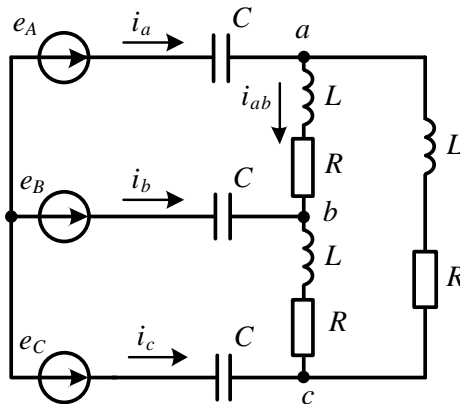


Рисунок 9.16

Потрібно визначити фазні і лінійні струми, якщо параметри кола за першою гармонікою відомі:  $X_L^{(1)} = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_C^{(1)} = 15 \text{ Ом}$ ,  $R = 9 \text{ Ом}$ .

**Відповідь:** лінійний струм  $i_a = 14 \sin(\omega t + 78^\circ) + 16,6 \sin(5\omega t + 33,7^\circ) \text{ А}$ ; фазний струм  $i_{ab} = 8,08 \sin(\omega t + 108^\circ) + 9,6 \sin(5\omega t - 3,7^\circ) \text{ А}$ .

**9.21** В симетричному трифазному колі фазна е.р.с. (рис. 9.17)

$$e_A = 250 \sin(\omega t - 60^\circ) + 100 \sin 3\omega t + 60 \sin(5\omega t + 25^\circ) \text{ В.}$$

Параметри кола:  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_H = 12 \text{ Ом}$ , опір ємності за першою гармонікою  $X_C^{(1)} = 19 \text{ Ом}$ , індуктивності  $X_L^{(1)} = 2 \text{ Ом}$ . Потрібно визначити миттєве і діюче значення напруги між точками  $b$  і  $c$ , а також коефіцієнт потужності кола.

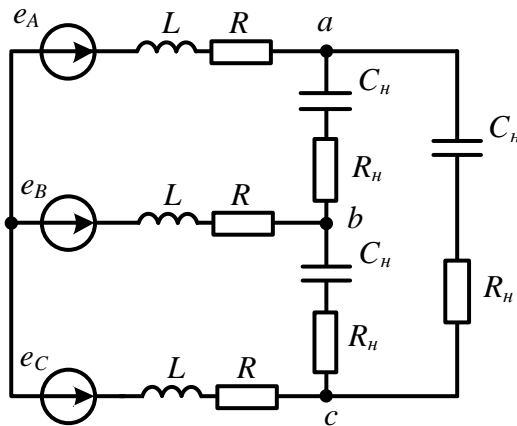


Рисунок 9.17

**Відповідь:** діюче значення напруги  $U_{bc} = 298 \text{ В}$ ; миттєве значення напруги

$$u_{bc} = 419 \sin(\omega t - 169^\circ) + 51,4 \sin(5\omega t + 42,35^\circ) \text{ В;}$$

коефіцієнт потужності  $\alpha = \frac{P}{S} = 0,46$ .

**9.22** Електрорушійні сили трифазного симетричного генератора з обмотками, з'єднаними зіркою, містять окрім головної ще третю та п'яту гармоніки. Діюче значення кожної е.р.с. дорівнює 150 В. Амплітуди вищих гармонік становить відповідно 40% і 20% від амплітуди напруги головної гармоніки. Знайти діючі значення е.р.с. кожної з гармонік та діюче значення лінійної напруги генератора.

**Відповідь:**  $E^{(1)} = 137 \text{ В}$ ;  $E^{(3)} = 54,8 \text{ В}$ ;  $E^{(5)} = 27,4 \text{ В}$ ;  $U_n = 242 \text{ В}$ .

**9.23** В симетричному трифазному колі (рис. 9.18) е.р.с. фази  $A$   
 $e_A = 300\sin\omega t + 80\sin(3\omega t - 60^\circ) + 40\sin(5\omega t + 30^\circ)$  В.

Опір фази навантаження першої гармоніки  $Z_H^{(1)} = 5 + j3$  Ом, а опір нейтрального проводу  $Z_N^{(1)} = 2 + j1$  Ом. Розрахувати струми в фазах і нейтральному проводі у випадку замкнутого і розімкнутого стану ключа  $K$ .

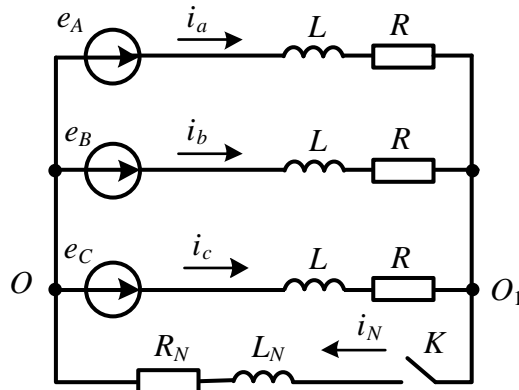


Рисунок 9.18

**Відповідь:** для розімкнутого ключа:

$$i_a = 51,5 \sin(\omega t - 31^\circ) + 2,53 \sin(5\omega t - 41,56^\circ) \text{ А,}$$

$$i_b = 51,5 \sin(\omega t - 151^\circ) + 2,53 \sin(5\omega t + 78,44^\circ) \text{ А,}$$

$$i_c = 51,5 \sin(\omega t + 89^\circ) + 2,53 \sin(5\omega t - 161,56^\circ) \text{ А.}$$

Для замкнутого ключа:

$$i_a = 51,5 \sin(\omega t - 31^\circ) + 3,82 \sin(3\omega t - 118,6^\circ) + 2,53 \sin(5\omega t - 41,56^\circ) \text{ А,}$$

$$i_b = 51,5 \sin(\omega t - 151^\circ) + 3,82 \sin(3\omega t - 118,6^\circ) + 2,53 \sin(5\omega t + 78,44^\circ) \text{ А,}$$

$$i_c = 51,5 \sin(\omega t + 89^\circ) + 3,82 \sin(3\omega t - 118,6^\circ) + 2,53 \sin(5\omega t - 161,56^\circ) \text{ А.}$$

Струм в нейтральному проводі:

$$i_N = 11,46 \sin(3\omega t + 118,6^\circ) \text{ А.}$$

## Розділ 10

### КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ В УСТАЛЕНОМУ РЕЖИМІ

Розглядаються приклади розрахунку і аналізу однорідних довгих ліній в усталеному режимі. Потрібно звернути увагу на те, що під час розв'язування подібних задач фазовий коефіцієнт  $\beta$  завжди залишається додатним числом, яке вимірюють в *радianaх на метр* або в *радianaх на кілометр*, тому добуток  $\beta l$ , що входить до складу гіперболічних чи тригонометричних функцій, подається в *радianaх*, а не *градусах*.

**10.1** Розрахувати вторинні параметри повітряної лінії, а також довжину хвилі і фазову швидкість її поширення за частоти  $f = 800$  Гц, якщо первинні параметри лінії становлять:

$$R_0 = 2,9 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, G_0 = 0,8 \frac{\text{мкСм}}{\text{км}}, L_0 = 2 \frac{\text{мГн}}{\text{км}}, C_0 = 6,25 \frac{\text{нФ}}{\text{км}}.$$

#### Розв'язування

До вторинних (чи характеристичних) параметрів однорідної лінії відносять *хвильовий* (або *характеристичний*) *опір*

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

та *коефіцієнт поширення*

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta,$$

де  $\alpha$  називають *коефіцієнтом загасання*, а  $\beta$  – *фазовим коефіцієнтом*.

Оскільки вторинні параметри безпосередньо виражені через первинні, то відразу ж знаходимо

$$\begin{aligned}\underline{Z}_C &= \sqrt{\frac{2,9 + j2\pi 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0,8 \cdot 10^{-6} + j2\pi 800 \cdot 6,25 \cdot 10^{-9}}} = 577e^{-j7,3^\circ} \text{ Ом}, \\ \underline{\gamma} &= \sqrt{(2,9 + j10)(0,8 \cdot 10^{-6} + j31,4 \cdot 10^{-6})} = \\ &= 0,28 \cdot 10^{-2} + j1,79 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{км}},\end{aligned}$$

звідки  $\alpha = 0,28 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Нп}}{\text{км}}$ ,  $\beta = 1,79 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{км}}$ .

*Фазова швидкість* поширення хвилі

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = 2,81 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

а довжина хвилі  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 351 \text{ км}$ .

**10.2** Лінія без втрат, довжиною  $l = 100 \text{ м}$ , з'єднує генератор з активним опором, який споживає потужність  $P_n = 3,5 \text{ Вт}$ . За частоти  $f = 1 \text{ МГц}$  хвильовий опір лінії  $Z_C = 650 \text{ Ом}$ . Необхідно розрахувати первинні параметри лінії, а також визначити струм на її початку, якщо фазова швидкість поширення хвилі  $v_{\phi} = 2,95 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , а коефіцієнт відбиття хвилі в кінці лінії  $N = -0,3$ .

### Розв'язування

Лінією без втрат називають лінію, в якій активними опором  $R_0$  і провідністю  $G_0$  можна знехтувати. Таке припущення суттєво не впливає на результати розрахунків, якщо лінією передавати високочастотний сигнал.

Для лінії без втрат хвильовий опір

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

є дійсним числом, коефіцієнт загасання  $\alpha = 0$ , а фазовий коефіцієнт  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ .

Насамперед визначимо первинні параметри лінії. Помножимо  $Z_C$  на  $\beta$ , враховуючи що  $\beta = \frac{\omega}{v_{\phi}}$ , отримаємо

$$L_0 = \frac{Z_C}{v_{\phi}} = \frac{650}{2,95 \cdot 10^8} = 2,2 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}, \quad C_0 = \frac{L_0}{Z_C^2} = \frac{2,2 \cdot 10^{-6}}{650^2} = 5,21 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}.$$

$$\text{Звідки } \beta = 0,0213 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Для знаходження струму на початку лінії запишемо для неї рівняння, які пов'язують вхідні комплексні напругу і струм з вихідними, водночас врахувавши відсутність втрат ( $\alpha = 0$ )

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{I}_2 Z_C \sin \beta l,$$

$$\underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2}{Z_C} \sin \beta l + \underline{I}_2 \cos \beta l.$$

За умовою задачі лінію навантажено активним опором  $R_n$ , тому відповідно до закону Ома

$$\underline{U}_2 = R_n \underline{I}_2.$$

Таким чином, для визначення струму  $\underline{I}_1$  необхідно розрахувати струм  $\underline{I}_2$ . Оскільки під час розв'язування задачі два із заданих параметрів (активна потуж-



ність  $P_H = 3,5$  Вт і коефіцієнт відбиття  $N$ ) ще не були задіяні, використаємо їх для знаходження  $\underline{I}_2$ .

Коефіцієнт відбиття лінії

$$\underline{N} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C}.$$

В нашій задачі і хвильовий опір, і опір навантаження є активними, тому коефіцієнт відбиття також є дійсним числом.

З останнього співвідношення визначаємо опір навантаження

$$R_H = \frac{Z_C(1+N)}{1-N} = 350 \text{ Ом},$$

а потім і струм  $I_2 = \sqrt{\frac{P_H}{R_H}} = 0,1$  А.

Відтак струм на початку лінії

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= j \frac{0,1 \cdot 350}{650} \sin(2,13 \cdot 10^{-2} \cdot 100) + 0,1 \cos(2,13 \cdot 10^{-2} \cdot 100) = \\ &= -0,053 + j0,0456 = 0,07e^{j139,3^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Під час знаходження струму  $\underline{I}_1$  було враховано, що початкова фаза струму  $\underline{I}_2$  прийнята нульовою, а аргумент тригонометричних функцій  $\beta l$  виражено в радіанах.

**10.3** На частоті  $f = 800$  Гц виміряли вхідні опори лінії в режимах холостого ходу  $\underline{Z}_{ex.xx} = 665e^{-j82^\circ}$  Ом і короткого замикання  $\underline{Z}_{ex.kz} = 478e^{j74^\circ}$  Ом. Необхідно визначити первинні параметри лінії, якщо її довжина  $l = 30$  км.

### Розв'язування

Вхідний опір лінії можна виразити через характеристичні параметри та опір навантаження за формулою

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_H \operatorname{th} \underline{\gamma} l}.$$

За режиму короткого замикання  $\underline{Z}_H = 0$ . Тоді вхідний опір лінії дорівнює

$$\underline{Z}_{ex.kz} = \underline{Z}_C \operatorname{th} \underline{\gamma} l.$$

В режимі холостого ходу, коли  $\underline{Z}_H = \infty$ , вхідний опір

$$\underline{Z}_{ex.xx} = \frac{\underline{Z}_C}{\operatorname{th} \underline{\gamma} l}.$$

З цих співвідношень видно, що

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_{ex.kz} \underline{Z}_{ex.xx}} = \sqrt{478e^{j74^\circ} \cdot 665e^{-j82^\circ}} = 564e^{-j4^\circ} \text{ Ом},$$

$$\text{а } th \underline{\gamma} l = \sqrt{\frac{Z_{\text{ex.кз}}}{Z_{\text{ex.хх}}}} = 0,848 e^{j78^\circ}.$$

Щоб визначити коефіцієнт поширення  $\underline{\gamma}$ , виразимо  $th \underline{\gamma} l$  через величину  $e^{2\underline{\gamma} l}$ . Отримасмо

$$th \underline{\gamma} l = \frac{e^{\underline{\gamma} l} - e^{-\underline{\gamma} l}}{e^{\underline{\gamma} l} + e^{-\underline{\gamma} l}} = \frac{e^{2\underline{\gamma} l} - 1}{e^{2\underline{\gamma} l} + 1},$$

$$\text{звідки } e^{2\underline{\gamma} l} = \frac{1 + th \underline{\gamma} l}{1 - th \underline{\gamma} l} = 1,231 e^{j80,37^\circ} \quad \text{або } e^{2\alpha l} e^{j2\beta l} = 1,231 e^{j80,37^\circ}.$$

$$\text{Отже, } \alpha = \frac{\ln 1,231}{2l} = 3,47 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Нп}}{\text{км}}, \quad \beta = \frac{1,403}{2l} = 23,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{км}}, \quad \text{а}$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = (3,47 + j23,4) \cdot 10^{-3} = 23,65 \cdot 10^{-3} e^{j81,56^\circ} \frac{1}{\text{км}}.$$

Якщо вторинні параметри  $Z_C$  і  $\underline{\gamma}$  відомі, через них легко визначити первинні параметри лінії.

$$\text{Оскільки } R_0 + j\omega L_0 = Z_C \underline{\gamma} = 13,34 e^{j77,52^\circ} = 2,9 + j13,03 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, \quad \text{то}$$

$$R_0 = 2,9 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, \quad L_0 = \frac{13,03}{2\pi \cdot 800} = 2,59 \frac{\text{мГн}}{\text{км}}.$$

Інші параметри лінії розраховуємо із співвідношення

$$G_0 + j\omega C_0 = \frac{\underline{\gamma}}{Z_C} = 41,93 \cdot 10^{-6} e^{j85,56^\circ} = (3,25 + j41,8) \cdot 10^{-6} \frac{\text{См}}{\text{км}},$$

$$\text{звідки } G_0 = 3,25 \frac{\text{мкСм}}{\text{км}}, \quad C_0 = \frac{41,8 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 800} = 8,32 \frac{\text{нФ}}{\text{км}}.$$

#### **10.4** Первинні параметри кабельної лінії:

$$R_0 = 18 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, \quad G_0 = 1,5 \frac{\text{мкСм}}{\text{км}}, \quad L_0 = 1,2 \frac{\text{мГн}}{\text{км}}, \quad C_0 = 20 \frac{\text{нФ}}{\text{км}}.$$

Потрібно знайти:

1) значення опору навантаження, який забезпечить *узгоджений* режим роботи лінії (відсутність зворотної хвилі) на частоті  $f = 800$  Гц;

2) величину напруги на початку лінії, активну потужність джерела та к.к.д. лінії довжиною  $l = 30$  км, якщо напруга на узгодженому навантаженні становить  $U_2 = 100$  В.

#### **Розв'язування**

Для відповіді на всі питання спочатку необхідно визначити вторинні параметри лінії:

- хвильовий опір

$$\begin{aligned}\underline{Z}_C &= \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{18 + j2\pi \cdot 800 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 20 \cdot 10^{-9}}} = \\ &= \sqrt{\frac{19e^{j18,5^\circ}}{100,5 \cdot 10^{-6} e^{j89,1^\circ}}} = 435e^{j35,3^\circ} \text{ Ом};\end{aligned}$$

- коефіцієнт поширення

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = 43,7 \cdot 10^{-3} e^{j53,8^\circ} = \\ &= (25,8 + j35,3) \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{км}}.\end{aligned}$$

1. В узгодженому режимі коефіцієнт відбиття дорівнює нулю і лінія має бути навантажена на опір, значення якого рівне хвильовому опорі лінії. Тому

$$\underline{Z}_n = \underline{Z}_C = 435e^{j35,3^\circ} = 355 + j251,4 \text{ Ом}.$$

2. Напругу на вході лінії можна відшукати через вторинні параметри лінії, скориставшись рівнянням

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\gamma} l.$$

Оскільки в узгодженому режимі лінію навантажено на опір, для якого  $\underline{Z}_n = \underline{Z}_C$ , то  $\underline{I}_2 \underline{Z}_C = \underline{U}_2$  і напруга

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 (\operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \operatorname{sh} \underline{\gamma} l) = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma} l}.$$

Прийmemo початкову фазу напруги на навантаженні рівною нулю, тоді вхідна напруга

$$\underline{U}_1 = 100e^{(25,8 + j35,3)10^{-3} \cdot 30} = 100e^{0,774} e^{j1,059} = 217e^{j60,7^\circ} \text{ В}.$$

В узгодженому режимі роботи вхідний опір лінії дорівнює її хвильовому опорі, через що вхідний струм

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} = \frac{217e^{j60,7^\circ}}{435e^{j35,3^\circ}} = 0,5e^{j25,4^\circ} \text{ А}.$$

Активна потужність джерела

$$P_{\text{дж}} = U_1 I_1 \cos(\beta_1 - \alpha_1) = 217 \cdot 0,5 \cos(60,7^\circ - 25,4^\circ) = 88,75 \text{ Вт}.$$

Для визначення к.к.д. потрібно знайти активну потужність навантаження  $P_n = I_2^2 R_n$ .

$$\text{Оскільки } I_2 = \frac{U_2}{Z_C}, \text{ то } P_n = \frac{U_2^2 R_n}{Z_C^2} = \frac{100^2 \cdot 355}{435^2} = 18,8 \text{ Вт}.$$

Тоді к.к.д. лінії

$$\eta = \frac{P_n}{P_{\text{дж}}} = \frac{18,8}{88,75} = 0,21.$$

**10.5** Первинні параметри повітряної лінії з мідними дротами:

$$R_0 = 3 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, \quad G_0 = 0,6 \frac{\text{мкСм}}{\text{км}}, \quad L_0 = 2 \frac{\text{мГн}}{\text{км}}, \quad C_0 = 6 \frac{\text{нФ}}{\text{км}}.$$

Довжина лінії становить  $l = 10$  км. Визначити:

- 1) напругу в кінці лінії за розімкнених вихідних затискачів, якщо напруга  $u_1 = 120 \sin(\omega t + 30^\circ)$  В, а частота  $f = 5$  кГц;
- 2) параметри  $\Pi$ -подібної схеми заміщення лінії за тієї ж частоти.

### Розв'язування

Визначасмо вторинні параметри лінії:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{3 + j2\pi 5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0,6 \cdot 10^{-6} + j2\pi 5 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}} = 577,6 e^{-j1,28^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = 0,109 e^{j88,54^\circ} = 0,0028 + j0,109 \frac{1}{\text{км}}.$$

1. З рівняння, що пов'язує вхідні та вихідні величини в режимі холостого ходу ( $I_2 = 0$ ), знаходимо:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{ch \underline{\gamma} l} = \frac{120 e^{j30^\circ}}{\sqrt{2} ch(0,109 e^{j88,54^\circ} \cdot 10)} = 183,3 e^{j26,9^\circ} \text{ В}.$$

Ще раз нагадаємо. Якщо на калькуляторі відсутня операція обчислення гіперболічних функцій від комплексної змінної, то її можна вирахувати через показникові функції за формулами:

$$ch \underline{\gamma} l = ch(\alpha l + j\beta l) = \frac{e^{\alpha l} e^{j\beta l} + e^{-\alpha l} e^{-j\beta l}}{2},$$

$$sh \underline{\gamma} l = sh(\alpha l + j\beta l) = \frac{e^{\alpha l} e^{j\beta l} - e^{-\alpha l} e^{-j\beta l}}{2}.$$

Звідси для даної задачі отримуємо:

$$ch \underline{\gamma} l = ch\left(1,09 e^{j88,54^\circ}\right) = ch(0,028 + j1,09) =$$

$$= \frac{e^{0,028} e^{j1,09} + e^{-0,028} e^{-j1,09}}{2} = \frac{1,028 e^{j1,09} + 0,9724 e^{-j1,09}}{2} = 0,463 e^{j3,1^\circ}.$$

Таким чином, миттєва напруга на виході лінії дорівнює

$$u_2 = 259 \sin(\omega t + 26,9^\circ) \text{ В}.$$

2. Параметри  $\Pi$ -подібної схеми заміщення лінії можна розрахувати так само, як і параметри симетричного чотириполосника, пам'ятаючи про те, що  $A$ -параметри лінії як чотириполосника, визначаються через гіперболічні функції за виразами:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \underline{A}_{22} = ch \underline{\gamma} l = 0,463 e^{3,1^\circ} = 0,463 + j0,025, \\ \underline{A}_{12} &= \underline{Z}_C sh \underline{\gamma} l = 577,6 e^{-j1,28^\circ} 0,887 e^{j89,16^\circ} = 512 e^{j87,9^\circ} \text{ Ом}, \\ \underline{A}_{21} &= \frac{sh \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_C} = \frac{0,887 e^{j89,16^\circ}}{577,6 e^{-j1,28^\circ}} = 1,53 \cdot 10^{-3} e^{j90,44^\circ} \text{ См}. \end{aligned}$$

За відомих  $A$ -параметрів, опори  $\Pi$ -подібної схеми заміщення лінії знайдемо за відомими виразами:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_0 &= \underline{A}_{12} = 512 e^{j87,9^\circ} = 18,8 + j511,6 \text{ Ом}, \\ \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} - 1} = \frac{512 e^{j87,9^\circ}}{0,463 + j0,024 - 1} = -j954 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\underline{Z}_0 = R_0 + jX_{L_0}$ , а  $\underline{Z}_1 = -jX_{C_1}$ , то індуктивність і ємність, відповідно,  $L_0 = \frac{X_{L_0}}{2\pi f} = 16,3 \text{ мГн}$  та  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2\pi f X_{C_1}} = 33,4 \text{ нФ}$ .

Схему заміщення показано на рис. 10.1.

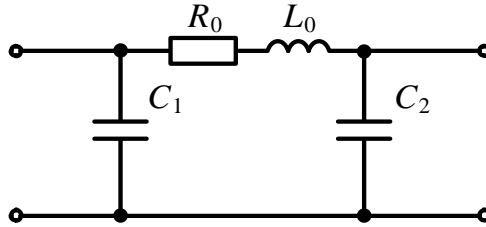


Рисунок 10.1

**10.6** Лінія електропередачі, яка з'єднує підстанцію зі споживачем (підприємством) складається з двох ділянок. Перша з них – це кабельна лінія довжиною  $l_1 = 1 \text{ км}$ , яка проходить дном річки, що розділяє ці два об'єкти. Друга – повітряна лінія довжиною  $l_2 = 15 \text{ км}$  від річки до підприємства (рис. 10.2). Первинні параметри кабельної лінії:

$$R_0 = 12 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, G_0 = 1 \frac{\text{мкСм}}{\text{км}}, L_0 = 0,5 \frac{\text{мГн}}{\text{км}}, C_0 = 40 \frac{\text{нФ}}{\text{км}},$$

а повітряної:

$$R_0 = 4 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, G_0 = 0,5 \frac{\text{мкСм}}{\text{км}}, L_0 = 2 \frac{\text{мГн}}{\text{км}}, C_0 = 6 \frac{\text{нФ}}{\text{км}}.$$

Середня величина активної потужності, яку споживає підприємство з коефіцієнтом потужності  $\cos \varphi = 0,9$  ( $\varphi > 0$ ), становить  $P_2 = 250 \text{ кВт}$ , напруга  $10 \text{ кВ}$ , частота  $50 \text{ Гц}$ .

Потрібно визначити напругу на виході підстанції та розрахувати к.к.д. лінії

електропередачі.

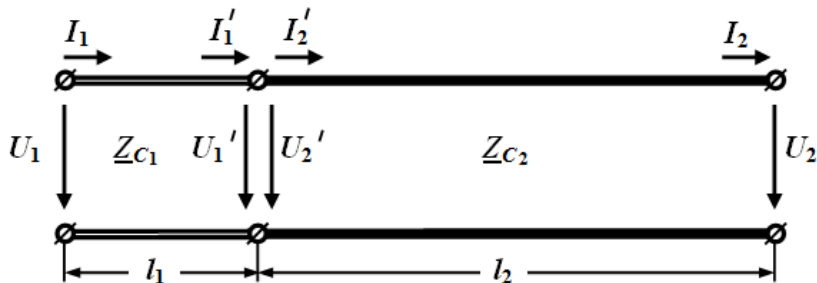


Рисунок 10.2

### Розв'язування

Розрахуємо вторинні параметри повітряної лінії

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = 4,05 e^{j8,9^\circ} \text{ Ом}, \quad \underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = 1,95 e^{j75,1^\circ} \text{ мкСм};$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = 1440 e^{-j33^\circ} \text{ Ом}, \quad \underline{\gamma}_2 = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = 2,81 \cdot 10^{-3} e^{j42^\circ} \frac{1}{\text{км}}$$

та кабельної лінії

$$\underline{Z}_0 = 12 e^{j0,7^\circ} \text{ Ом}, \quad \underline{Y}_0 = 12,6 e^{j85,4^\circ} \text{ мкСм};$$

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = 976 e^{-j42,3^\circ} \text{ Ом}, \quad \underline{\gamma}_1 = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = 12,3 \cdot 10^{-3} e^{j43^\circ} \frac{1}{\text{км}}.$$

Визначасмо значення струму  $I_2$  приймача, оскільки відомими є потужність, напруга і косинус кута зсуву фаз навантаження

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi} = \frac{250 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 \cdot 0,9} = 27,8 \text{ А.}$$

Початкову фазу напруги  $U_2$  приймаємо рівною нулю. Тоді, через відставання струму від напруги на кут  $\varphi = \arccos 0,9 = 25,8^\circ$ , його комплексне діюче значення дорівнюватиме  $\underline{I}_2 = 27,8 e^{-j25,8^\circ} \text{ А.}$

Опір навантаження

$$\underline{Z}_H = \frac{U_2}{I_2} = \frac{10000}{27,8} = 360 \text{ Ом},$$

а повний комплексний опір навантаження  $\underline{Z}_H = 360 e^{j25,8^\circ} \text{ Ом.}$

Тепер можна визначити напругу і струм на вході повітряної лінії

$$\begin{aligned} \underline{U}'_1 &= \underline{U}_2 \text{ch } \underline{\gamma}_2 l_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_{C2} \text{sh } \underline{\gamma}_2 l_2 = 10^4 \text{ch}(2,81 \cdot 10^{-3} e^{j42^\circ} \cdot 15) + \\ &+ 27,8 e^{-j25,8^\circ} \cdot 1440 e^{-j33^\circ} \text{sh}(2,81 \cdot 10^{-3} e^{j42^\circ} \cdot 15) = 11625 e^{-j2,4^\circ} \text{ В,} \end{aligned}$$

$$\underline{I}'_1 = \frac{U_2}{Z_{C2}} sh \gamma_2 l_2 + \underline{I}_2 ch \gamma_2 l_2 = 27,74 e^{-j25,2^\circ} \text{ А.}$$

Як видно з рис. 10.2, вхідні напруга і струм повітряної лінії одночасно є вихідними напругою і струмом кабельної лінії, тобто

$$\underline{U}'_2 = \underline{U}'_1, \underline{I}'_2 = \underline{I}'_1,$$

тому для вхідних величин кабельної лінії можна записати

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 = \underline{U}'_2 ch \gamma_1 l_1 + \underline{I}'_2 Z_{C1} sh \gamma_1 l_1 = 1,1625 \cdot 10^4 e^{-j2,4^\circ} ch(9 + j8,4) 10^{-3} + \\ + 27,74 e^{-j25,2^\circ} \cdot 976 e^{-j42,3^\circ} sh(9 + j8,4) \cdot 10^{-3} = 11556 \text{ В,} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{U'_2}{Z_{C1}} sh \gamma_1 l_1 + \underline{I}'_2 ch \gamma_1 l_1 = 28 e^{-j25,7^\circ} \text{ А.}$$

Активна потужність, яку віддає підстанція

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 11556 \cdot 28 \cos 25,7^\circ = 291,5 \text{ кВт.}$$

$$\text{К.к.д. лінії } \eta = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100\% = 85,8\% .$$

**10.7** Однорідна лінія довжиною  $l = 100 \text{ км}$  перебуває під дією синусоїдної напруги, яка змінюється з частотою  $f = 10^4 \text{ Гц}$ . Її вторинні параметри:

$$\underline{Z}_C = 550 e^{-j1^\circ} \text{ Ом, } \alpha = 4,7 \frac{\text{мНп}}{\text{км}}, \beta = 0,21 \frac{\text{рад}}{\text{км}} .$$

Необхідно визначити:

1) величину індуктивностей котушок, які необхідно увімкнути вздовж лінії через кожні 10 км, щоб та передавала сигнали без спотворення;

2) к.к.д. неспотворюючої лінії за трьох значень коефіцієнта відбиття  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 0,25$ ,  $N_3 = -0,25$ .

### Розв'язування

1. Лінія передає сигнали без спотворення, якщо виконується рівність

$$L_0 G_0 = C_0 R_0 ,$$

тому для розв'язування першої частини задачі насамперед потрібно визначити первинні параметри лінії. Для цього помножимо  $\underline{Z}_C$  на  $\underline{\gamma}$

$$\underline{Z}_C \underline{\gamma} = R_0 + j\omega L_0 = 550 e^{-j1^\circ} (0,0047 + j0,21) = (4,6 + j115,4) \text{ Ом,}$$

$$\text{звідки } R_0 = 4,6 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}, L_0 = \frac{115,4}{2\pi \cdot 10^4} = 1,84 \frac{\text{мГн}}{\text{км}} .$$

Тепер  $\underline{\gamma}$  поділимо на  $\underline{Z}_C$

$$\frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_C} = G_0 + j\omega C_0 = \frac{0,0047 + j0,21}{550 e^{-j1,5^\circ}} = 1,865 \cdot 10^{-6} + j381,8 \cdot 10^{-6} \text{ См,}$$

звідси  $G_0 = 1,865 \cdot 10^{-6} \frac{\text{См}}{\text{км}}$ , а  $C_0 = 6,08 \frac{\text{нФ}}{\text{км}}$ .

Визначимо значення індуктивності  $L'_0$ , яку повинна мати лінія, щоб стати неспотворюючою

$$L'_0 = \frac{C_0 R_0}{G_0} = \frac{6,08 \cdot 10^{-9} \cdot 4,6}{1,865 \cdot 10^{-6}} = 15 \frac{\text{мГн}}{\text{км}}.$$

Як бачимо, це значення набагато перевищує власну індуктивність лінії  $L_0$ , тому через кожний кілометр необхідно увімкнути додаткові індуктивності

$$\Delta L_0 = L'_0 - L_0 = 13,16 \frac{\text{мГн}}{\text{км}},$$

що для всієї лінії становить  $\Delta L = \Delta L_0 l = 1,316 \text{ Гн}$ .

Якщо ж додаткові котушки розташовувати через кожні 10 км лінії, враховуючи і місце навантаження, то в кожній з десяти точок потрібно увімкнути котушки з індуктивністю в 0,1316 Гн.

2. Для знаходження к.к.д. за різних режимів роботи лінії насамперед необхідно розрахувати її вторинні параметри. Оскільки

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L'_0 = 942 e^{j89,72^\circ} \frac{\text{Ом}}{\text{км}},$$

$$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = 381,8 \cdot 10^{-6} e^{j89,72^\circ} \frac{\text{См}}{\text{км}},$$

то

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = 2466 \text{ Ом},$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = 0,6 e^{j89,72^\circ} = 0,0029 + j0,6 \frac{1}{\text{км}}.$$

а) Якщо коефіцієнт відбиття дорівнює нулю, то лінія працює в узгодженому режимі і опір навантаження дорівнює хвильовому, тому  $\underline{U}_2 = I_2 \underline{Z}_C$ .

Для лінії без спотворень хвильовий опір є суто активним, через що активна потужність, яку споживає навантаження, становить  $P_2 = U_2 I_2$ .

Щоб визначити активну потужність джерела, потрібно виразити струм і напругу на початку лінії через напругу і струм на навантаженні  $U_2$  та  $I_2$ , скориставшись рівняннями

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch } \underline{\gamma} l + I_2 \underline{Z}_C \text{sh } \underline{\gamma} l,$$

$$I_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \text{sh } \underline{\gamma} l + I_2 \text{ch } \underline{\gamma} l.$$

Прийнявши початкову фазу вихідної напруги  $\underline{U}_2$  рівною нулю, знаходимо:



$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2(ch \underline{\gamma}l + sh \underline{\gamma}l) = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma}l} = \underline{U}_2 e^{\alpha l} e^{j\beta l} = \underline{U}_2 e^{0,29} e^{j60} = 1,336 \cdot \underline{U}_2 e^{j197,7^\circ},$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 e^{\underline{\gamma}l} = 1,336 \cdot \underline{I}_2 e^{j197,7^\circ}.$$

Добуток  $\beta l = 60$ , який подається в радіанах, можна переписати в градусах, одночасно відкинувши числові значення кута, що кратні  $360^\circ$ .

За узгодженого режиму вхідний опір, а для нашої задачі він є активним, дорівнює хвильовому, тому вхідні струм і напруга збігається за фазою і, таким чином,

$$P_1 = U_1 I_1 = 1,336^2 U_2 I_2,$$

звідки коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{1,336^2} = 0,56.$$

б) Визначимо к.к.д. лінії за умови, коли коефіцієнт відбиття  $N_2 = 0,25$ .

Із співвідношення

$$N_2 = \frac{\underline{Z}_{H_2} - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_{H_2} + \underline{Z}_C}$$

розраховуємо опір навантаження, враховуючи, що і  $\underline{Z}_{H_2}$ , і  $\underline{Z}_C$  є дійсними числами. В цьому випадку

$$\underline{Z}_{H_2} = R_{H_2} = Z_C \frac{1 + N_2}{1 - N_2} = 2466 \cdot \frac{1 + 0,25}{1 - 0,25} = 4110 \text{ Ом.}$$

Активна потужність приймача  $P_2 = I_2^2 R_{H_2} = 4110 I_2^2$ .

Вхідні напругу і струм виразимо через струм  $I_2$ , враховуючи, що

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 R_{H_2}.$$

Тоді

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_2 R_{H_2} ch \underline{\gamma}l + \underline{I}_2 Z_C sh \underline{\gamma}l = \underline{I}_2 [4110 ch(0,29 + j60) + 2466 sh(0,29 + j80)] = 4904 e^{-j166^\circ} \underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \left( \frac{R_{H_2}}{Z_C} sh \underline{\gamma}l + ch \underline{\gamma}l \right) = 1,566 e^{-j157^\circ} \underline{I}_2.$$

Вважаючи початкову фазу струму  $\underline{I}_2$  рівною нулю, отримаємо активну потужність джерела

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 4904 \cdot 1,566 \cos[-166^\circ - (-157^\circ)] = 7585 I_2^2.$$

Звідси к.к.д. лінії  $\eta = \frac{P_2}{P_1} = 0,542$ .

в) В третьому випадку, коли коефіцієнт відбиття  $N_3 = -0,25$ , застосуємо розрахунки аналогічні попереднім і отримуємо  $R_{\mu_3} = 1480$  Ом, а також

$$\underline{U}_1 = I_2 [1480 \operatorname{ch}(0,29 + j60) + 2466 \operatorname{sh}(0,29 + j60)] = 2344 e^{-j157^\circ} I_2,$$

$$I_1 = I_2 \left[ \frac{1480}{2466} \operatorname{sh}(0,29 + j60) + \operatorname{ch}(0,29 + j60) \right] = 1,193 e^{-j166^\circ} I_2.$$

Активні потужності:

- приймача  $P_2 = 1480 I_2^2$ ;

- джерела  $P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 2762 I_2^2$ .

Звідки к.к.д.  $\eta = \frac{P_2}{P_1} = 0,536$ .

Отже, за заданих параметрів лінії к.к.д. в узгодженому режимі її роботи є максимальним.

**10.8** Повітряна лінія довжиною  $l = 120$  км навантажена на хвильовий опір  $\underline{Z}_C = 860 e^{-j6^\circ}$  Ом. В точці  $a$ , яка знаходиться на відстані  $l_1 = 20$  км від кінця лінії, миттєве значення напруги  $u_a = 266 \sin(314t - 4,6^\circ)$  В, а в точці  $b$ , що розташована вже на відстані  $l_2 = 80$  км від початку лінії, комплексне діюче значення струму в лінії  $\underline{I}_b = 0,24 e^{j2,8^\circ}$  А. Визначити:

- 1) коефіцієнт поширення;
- 2) миттєві значення струму і напруги на початку лінії.

### Розв'язування

1. Задля знаходження розв'язку задачі скористаємося системою рівнянь для розрахунку напруги та струму в будь-якій точці лінії

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + I_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \gamma y,$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \gamma y + I_2 \operatorname{ch} \gamma y,$$

де  $y$  – відстань від кінця лінії.

Відомо, що навантаженням лінії є хвильовий опір, тому  $\underline{U}_2 = I_2 \underline{Z}_C$  і з першого рівняння отримуємо рівняння в точці  $a$  ( $y = l_1$ )  $\underline{U}_a = \underline{U}_2 e^{\gamma l_1}$ , звідки

$$\underline{U}_a = \frac{266}{\sqrt{2}} e^{-j4,6^\circ} = 188 e^{-j4,6^\circ} \text{ В.}$$

З другого рівняння системи для струму в точці  $b$  ( $y = l - l_2$ ) маємо  $\underline{I}_b \underline{Z}_C = \underline{U}_2 e^{\gamma(l-l_2)}$ . Поділимо один на одного два отриманих вирази, тоді

$$\frac{\underline{I}_b \underline{Z}_C}{\underline{U}_a} = e^{\gamma(l-l_2-l_1)} \text{ або } e^{\gamma \cdot 20} = \frac{0,24e^{j2,8^\circ} \cdot 860e^{-j6^\circ}}{188e^{-j4,6^\circ}} = 1,098e^{j1,4^\circ}, \text{ звідки для коефіцієнта}$$

та поширення запишемо

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \frac{1}{20} \ln 1,098e^{j0,0244} = \frac{0,0934 + j0,0244}{20} = \\ &= 0,00467 + j0,00122 \frac{1}{\text{км}}. \end{aligned}$$

2. Тепер можемо розрахувати напругу і струм в кінці лінії:

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{U}_a e^{-\gamma l_1} = 188e^{-j4,6^\circ} e^{-(0,00467 + j0,00122)20} = \\ &= 188e^{-0,0934} e^{-j6^\circ} = 171e^{-j6^\circ} \text{ В}, \end{aligned}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} = \frac{171e^{-j6^\circ}}{860e^{-j6^\circ}} = 0,2 \text{ А},$$

після чого – і на її початку. Так, вхідна напруга становить:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 e^{\gamma l} = 171e^{-j6^\circ} e^{(0,00467 + j0,00122)120} = \\ &= 171e^{-j6^\circ} \cdot 1,751e^{j8,4^\circ} = 300e^{j2,4^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

За узгодженого навантаження ( $\underline{Z}_n = \underline{Z}_C$ ) вхідний опір лінії дорівнює хвильовому, тому для вхідного струму маємо

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} = \frac{300e^{j2,4^\circ}}{860e^{-j6^\circ}} = 0,35e^{j8,4^\circ} \text{ А}.$$

Миттєві значення напруги і струму на початку лінії:

$$u_1 = 424 \sin(\omega t + 2,4^\circ) \text{ В}.$$

$$i_1 = 0,49 \sin(\omega t + 8,4^\circ) \text{ А}.$$

**10.9** Лінія без втрат, довжина якої  $l = \frac{\lambda}{8}$ , працює в режимі короткого замикання. За частоти  $f = 1 \text{ МГц}$  довжина хвилі становить  $\lambda = 300 \text{ м}$ . Потрібно знайти вхідний опір лінії, якщо  $L_0 = 2 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$ .

### Розв'язування

Рівняння, які пов'язують вхідні струм і напругу з вихідними для лінії без втрат, мають вигляд

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{I}_2 \underline{Z}_C \sin \beta l,$$

$$\underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta l + \underline{I}_2 \cos \beta l.$$

За короткого замикання лінії напруга  $\underline{U}_2 = 0$ , тому її вхідний опір

$$\underline{Z}_{\text{вх.к}} = \frac{\underline{U}_{1\text{к}}}{\underline{I}_{1\text{к}}} = j \underline{Z}_C \operatorname{tg} \beta l.$$

Для лінії без втрат  $\underline{Z}_C = Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ ,  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ .

Враховуючи, що  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ , з останніх співвідношень випливає

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi f \sqrt{L_0 C_0}.$$

Звідки знаходимо

$$C_0 = \frac{1}{\lambda^2 f^2 L_0} = \frac{1}{300^2 \cdot (10^6)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 5,56 \frac{\text{пФ}}{\text{м}},$$

$$Z_C = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{5,56 \cdot 10^{-12}}} = 600 \text{ Ом.}$$

Оскільки  $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$ , вхідний опір лінії становить

$$\underline{Z}_{\text{вх.к}} = j600 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = j600 \text{ Ом.}$$

**10.10** Лінія без втрат довжиною  $l = 100 \text{ м}$  з'єднує генератор з активним опором, який споживає потужність  $P_n = 20 \text{ Вт}$ . Визначити за частоти  $f = 1 \text{ МГц}$  струм і напругу на початку лінії, якщо коефіцієнт відбиття в кінці лінії  $N = 0,3$ , фазова швидкість поширення хвилі  $v = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ , а  $C_0 = 5 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$ .

### Розв'язування

Для визначення напруги  $\underline{U}_1$  та струму  $\underline{I}_1$  на початку лінії потрібно знати її хвильовий опір  $\underline{Z}_C$ , фазовий коефіцієнт  $\beta$ , а також напругу і струм в кінці лінії, оскільки для лінії без втрат

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{I}_2 \underline{Z}_C \sin \beta l,$$

$$\underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta l + \underline{I}_2 \cos \beta l.$$

Окрім цього відомо, що для лінії без втрат  $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ , звідки знаходимо

$$L_0 = \frac{1}{v^2 C_0} = \frac{1}{(3 \cdot 10^8)^2 5 \cdot 10^{-12}} = 2,22 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

В формулі фазова швидкість подається в  $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ , а  $C_0$  – в  $\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ .

Тепер можна визначити хвильовий опір лінії

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2,22 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-12}}} = 667 \text{ Ом}$$

і фазовий коефіцієнт

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 2,094 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Опір навантаження визначаємо через хвильовий опір і коефіцієнт відбиття. Дійсно,

$$N = \frac{Z_H - Z_C}{Z_H + Z_C},$$

звідки

$$Z_H = R_H = Z_C \frac{1+N}{1-N} = 667 \cdot \frac{1+0,3}{1-0,3} = 1238 \text{ Ом}.$$

Тоді струм в кінці лінії

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_H}{R_H}} = \sqrt{\frac{20}{1238}} = 0,127 \text{ А},$$

а напруга  $U_2 = I_2 R_H = 157 \text{ В}$ .

Навантаження лінії активне, тому початкові фази напруги і струму в кінці лінії збігаються. Якщо задати їх рівними нулю, то для вхідних напруги і струму

$$\underline{U}_1 = 157 \cos 2,094 + j0,127 \cdot 667 \sin 2,094 = 107 e^{j137^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{I}_1 = j \frac{157}{667} \sin 2,094 + 0,127 \cos 2,094 = 0,214 e^{j108^\circ} \text{ А}.$$

**10.11** Якої найменшої довжини  $l_1$  лінію без втрат, розімкнену на кінці, потрібно увімкнути між точками 1 і 2 електричного кола (рис. 10.3), щоб за частоти  $f = 80 \text{ МГц}$  це коло перебувало в резонансному режимі. Параметри електричного

кола:  $L = 0,6 \text{ мкГн}$ ,  $R = 700 \text{ Ом}$ , а параметри лінії:  $L_0 = 2,3 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$ ,  $C_0 = 5 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$ .

### Розв'язування

Для забезпечення роботи кола в резонансному режимі між точками 1 і 2 потрібно увімкнути ємність  $C$ . Її значення можна знайти з умови резонансу, якщо уявну частину комплексного вхідного опору кола прирівняти його до нуля.

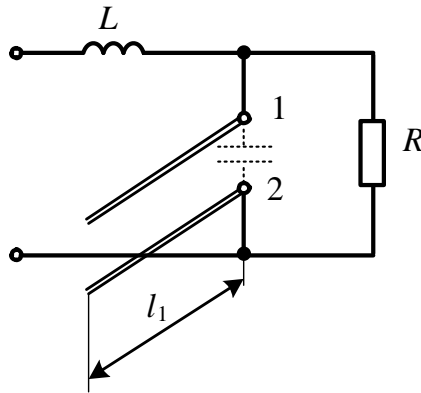


Рисунок 10.3

Так, вхідний опір для заданого електричного кола становить

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ex} &= \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} + jX_L = \frac{R(-jX_C)(R + jX_C)}{R^2 + X_C^2} + jX_L = \\ &= \frac{RX_C^2}{R^2 + X_C^2} + j \left( X_L - \frac{R^2 X_C}{R^2 + X_C^2} \right). \end{aligned}$$

Підставимо в уявну частину цього виразу числові значення:  $R = 700$  Ом та  $X_L = \omega L = 2\pi \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6} = 300$  Ом. Прирівнявши уявну частину до нуля, отримуємо квадратне рівняння

$$300X_C^2 - 49 \cdot 10^4 X_C + 147 \cdot 10^6 = 0,$$

коренями якого є:

$$X_{C_1} = 1240 \text{ Ом } (C_1 = 160 \text{ пФ});$$

$$X_{C_2} = 396 \text{ Ом } (C_2 = 496 \text{ пФ}).$$

Вхідний опір лінії без втрат за холостого ходу носить ємнісний характер, коли довжина лінії лежить в інтервалі  $0 < l < \frac{\lambda}{4}$ . Значення цього опору буде тим більшим, чим меншою буде довжина лінії  $l$ . Тому з-поміж  $X_{C_1}$  і  $X_{C_2}$  вибираємо перше значення.

Комплексне значення вхідного опору лінії без втрат за холостого ходу на відстані  $l$  від її кінця

$$\underline{Z}_{ex} = -jZ_C \operatorname{ctg} \beta l.$$

Отже, маємо умову

$$X_{C_1} = Z_C \operatorname{ctg} \beta l_1,$$

звідки

$$l_1 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arcctg} \frac{X_{C_1}}{Z_C}.$$

Розрахуємо вторинні параметри лінії

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2,3 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-12}}} = 678 \text{ Ом},$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 80 \cdot 10^6 \sqrt{2,3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-12}} = 1,70 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Таким чином, значенням шуканої довжини є

$$l_1 = \frac{1}{1,7} \operatorname{arcctg} \frac{1240}{678} = 0,3 \text{ м}.$$

### Задачі для самостійного розв'язування

**10.12** Первинні параметри лінії на частоті  $f = 1000$  Гц становлять:

$R_0 = 5 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}$ ,  $L_0 = 2,2 \frac{\text{мГн}}{\text{км}}$ ,  $C_0 = 6 \frac{\text{нФ}}{\text{км}}$ ,  $G_0 = 1,7 \frac{\text{мкСм}}{\text{км}}$ . Відшукати вторинні параметри лінії, фазову швидкість поширення хвилі та довжину хвилі.

**Відповідь:**  $Z_C = 624e^{-j8,65^\circ}$  Ом;  $\alpha = 4,58 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Нп}}{\text{км}}$ ;  $\beta = 23,05 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{км}}$ ;  $\lambda = 272$  км;

$$v_\phi = 272 \frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

**10.13** Лінія довжиною  $l = 200$  м працює в узгодженому режимі. Потрібно визначити напругу і струм в кінці та на початку лінії, її к.к.д., якщо хвильовий опір лінії  $Z_C = 600$  Ом, коефіцієнт загасання  $\alpha = 0,2 \frac{\text{Нп}}{\text{км}}$ , активна потужність навантаження за умови  $\cos \varphi_2 = 1$   $P_2 = 2,4$  кВт.

**Відповідь:**  $U_2 = 1200$  В;  $I_2 = 2$  А;  $U_1 = 1250$  В;  $I_1 = 2,08$  А;  $\eta = 0,923$ .

**10.14** Для розрахунку первинних параметрів кабельної лінії довжиною  $l = 100$  км за частоти  $f = 50$  Гц провели досліди холостого ходу і короткого замикання. Результатами дослідів є:

- за холостого ходу:  $U_{1x} = 10$  кВ,  $I_{1x} = 3,4$  А,  $P_{1x} = 11,3$  кВт,  $\varphi_{1x} < 0$ ;

- за короткого замикання:  $U_{1к} = 3$  кВ,  $I_{1к} = 10,2$  А,  $P_{1к} = 30$  кВт,  $\varphi_{1к} > 0$ .

**Відповідь:**  $R_0 = 2,87 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}$ ;  $L_0 = 2,2 \frac{\text{мГн}}{\text{км}}$ ;  $C_0 = 10,4 \frac{\text{нФ}}{\text{км}}$ ;  $G_0 = 1,01 \frac{\text{мкСм}}{\text{км}}$ .

**10.15** Лінія, довжина якої  $l = 100$  км, з первинними параметрами, наведеними

в задачі 10.14, працює в узгодженому режимі. Робоча частота  $f = 50$  Гц. Напряга на початку лінії  $U_1 = 200$  В. Як зміниться напряга в кінці лінії, якщо відімкнути навантаження і створити режим холостого ходу?

**Відповідь:** в узгодженому режимі  $U_2 = 159$  В ; за холостого ходу  $U_2 = 200$  В .

**10.16** Телефонна лінія довжиною  $l = 80$  км має хвильовий опір  $Z_C = 577e^{-j1,3^\circ}$  Ом. Коефіцієнт поширення лінії становить  $\underline{\gamma} = 20,2 \cdot 10^{-3} e^{j82^\circ} \frac{1}{\text{км}}$ . Визначити параметри  $\Pi$ -подібної схеми заміщення лінії та розрахувати вихідний струм за умови короткого замикання лінії, якщо вхідна напряга становить  $U_1 = 50$  В, а робоча частота  $f = 800$  Гц.

**Відповідь:**  $Z_0 = 10 + j591,3$  Ом;  $Z_1 = Z_2 = 111 - j550$  Ом;  $I_{2к} = 0,169$  А.

**10.17** Лінія без втрат довжиною  $l = 100$  м з'єднує генератор з навантаженням  $R_n = 500$  Ом, яке споживає потужність  $P_n = 5$  Вт. На частоті  $f = 1$  МГц лінія має хвильовий опір  $Z_C = 400$  Ом. Знайти первинні параметри лінії, а також напрягу і струм на початку лінії, якщо довжина хвилі  $\lambda = 300$  м.

**Відповідь:** первинні параметри лінії:  $L_0 = 1,333 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$ ;  $C_0 = 8,333 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$ ; вхідні напряга та струм:  $U_1 = 42,8e^{j126^\circ}$  В;  $I_1 = 0,12e^{j115^\circ}$  А .

**10.18** Лінія без втрат довжиною  $l = 100$  м з'єднує генератор з навантаженням  $R_n = 600$  Ом, яке споживає потужність  $P_n = 6$  Вт. На частоті  $f = 1$  МГц лінія має хвильовий опір  $Z_C = 500$  Ом. Розрахувати первинні параметри лінії, а також напрягу і струм на початку лінії, якщо вхідний опір лінії за холостого ходу  $Z_{вх.хх} = j2165$  Ом.

*Підказка.* Під час розв'язування задачі слід враховувати, що фазовий коефіцієнт  $\beta$  завжди додатне число.

**Відповідь:** первинні параметри лінії:  $L_0 = 2,32 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$ ;  $C_0 = 9,28 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$ ; вхідні напряга та струм:  $U_1 = 59,5e^{j169^\circ}$  В;  $I_1 = 0,101e^{j164,5^\circ}$  А .

**10.19** Лінія без втрат довжиною  $l = 100$  м з'єднує генератор з активним опором, який споживає потужність  $P_n = 15$  Вт. На частоті  $f = 1$  МГц лінія має хвильовий опір  $Z_C = 500$  Ом. Визначити первинні параметри лінії та напрягу і струм на початку лінії, якщо швидкість поширення хвилі  $\nu = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ , а коефіцієнт



відбиття хвилі в кінці лінії  $N = 0,5$ .

**Відповідь:** первинні параметри лінії:  $L_0 = 1,7 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$ ;  $C_0 = 6,78 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$ ; вхідні напруга та струм:

$$U_1 = 90,2e^{j152^\circ} \text{ В}; \quad I_1 = 0,26e^{j102^\circ} \text{ А}.$$

**10.20** Лінія без втрат з параметрами  $L_0 = 1,4 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$ ,  $C_0 = 7,94 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$  довжиною  $l = 100$  м з'єднує генератор з активним опором, який споживає потужність  $P_H = 10$  Вт. Розрахувати напругу і струм на початку лінії, а також довжину хвилі і її фазову швидкість на частоті  $f = 1$  МГц, якщо коефіцієнт відбиття в кінці лінії  $N = -0,1$ .

**Відповідь:**  $U_1 = 68,4e^{j115^\circ}$  В;  $I_1 = 0,148e^{j125^\circ}$  А;  $\lambda = 300$  м;  $v = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

**10.21** Лінія без втрат з  $L_0 = 4 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$  довжиною  $l = 100$  м з'єднує генератор з активним опором, який споживає потужність  $P_H = 10$  Вт. Визначити напругу і струм на початку лінії, якщо коефіцієнт відбиття в кінці лінії  $N = -0,5$ , довжина хвилі  $\lambda = 300$  м, а робоча частота  $f = 1$  МГц.

**Відповідь:**  $U_1 = 167e^{j101^\circ}$  В;  $I_1 = 0,091e^{j150^\circ}$  А.

**10.22** Електричне коло складається з послідовно з'єднаних активного опору  $R = 10$  Ом і ємності  $C = 5$  пФ. Яким має бути послідовно увімкнений в коло відрізок лінії без втрат – короткозамкнутий чи розімкнутий і якої найменшої довжини, щоб за частоти  $f = 100$  МГц електричне коло увійшло в стан резонансу напруг? Первинні параметри лінії:  $L_0 = 2,6 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$ ,  $C_0 = 4,3 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$ .

**Відповідь:** короткозамкнута лінія довжиною  $l = 18,5$  см.

**10.23** Паралельно вітці з активним опором  $R = 10$  Ом і ємністю  $C = 10$  пФ вмикають відрізок лінії без втрат з параметрами  $L_0 = 2,9 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$ ,  $C_0 = 3,86 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$ . Визначити характер (короткозамкнутий чи розімкнутий) і найменшу довжину відрізка цієї лінії, за яких електричне коло буде перебувати в стані резонансу на частоті  $f = 100$  МГц.

**Відповідь:** короткозамкнута лінія довжиною  $l = 8,7$  см.

## Розділ 11

# ЕЛЕМЕНТИ СИНТЕЗУ ЛІНІЙНИХ ДВОПОЛЮСНИКІВ

Розглянуто задачі з визначення структури і параметрів простих двополюсних кіл за заданими частотними і часовими характеристиками з використанням виключно методів Кауера і Фостера. Звертаємо увагу на те, що параметри елементів кіл здебільшого задано в безрозмірних відносних одиницях.

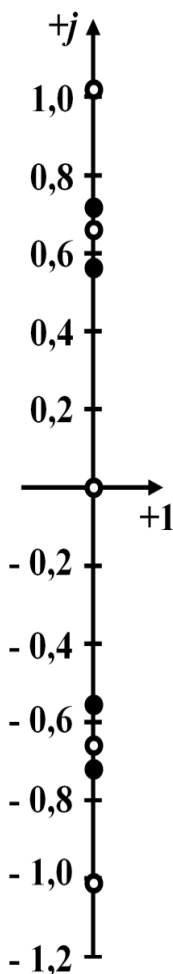


Рисунок 11.1

**11.1** За заданою функцією вхідного опору двополюсника

$$Z(p) = \frac{12p^5 + 19p^3 + 6p}{6p^4 + 5p^2 + 1}$$

з'ясувати, чи є цей двополюсник реактивним. Скласти для нього декілька еквівалентних схем.

### Розв'язування

Двополюсник є суто реактивним лише тоді, коли одночасно:

- 1) вхідна функція  $Z(p)$  (або  $Y(p)$ ) є відношенням двох поліномів, один з яких містить виключно парні, а інший – тільки непарні степені  $p$ ;
- 2) всі нулі і полюси розташовані в площині  $p$  на осі уявних чисел і є простими (некратними);
- 3) нулі та полюси вздовж осі уявних чисел послідовно чергуються.

Стосовно нашої задачі, першої умови дотримано, оскільки в поліном чисельника входять лише непарні степені змінної  $p$ , а в поліном, розташований в знаменнику, – тільки парні.

Для перевірки другої і третьої умов розв'яжемо два рівняння:

$$12p^5 + 19p^3 + 6p = 0 \quad \text{і} \quad 6p^4 + 5p^2 + 1 = 0.$$

В першому випадку знаходимо нулі функції  $Z(p)$ :

$$p'_1 = 0; \quad p'_{2,3} = \pm j0,66; \quad p'_{4,5} = \pm j1,071,$$

а в другому – її полюси:

$$p_{1,2} = \pm j0,577; \quad p_{3,4} = \pm j0,707.$$

Як бачимо, і нулі, і полюси є простими, належать виключно уявній осі та послідовно по черзі вздовж цієї осі змінюють один одного (рис. 1.11, а).

Таким чином, заданий двополюсник суто реактивний і його фізична реалізація є можливою.

Необхідно зауважити, що розв'язання задачі синтезу, на відміну від задачі аналізу, неоднозначне і може мати декілька розв'язків. Це означає, що ту ж саму вхідну функцію здатна мати не одна, а декілька різних електричних схем, еквівалентних одна одній. Вибір конкретної схеми з-поміж отриманих залежить від багатьох факторів, наприклад, від числа елементів в електричному колі, від конфігурації цього кола, від числових значень параметрів елементів тощо.

Розв'яжемо другу частину задачі і побудуємо декілька двополюсних схем, що мають задану функцію вхідного опору  $Z(p)$ . Для цього скористаємося двома методами – методом Кауера і методом Фостера та застосуємо їх у різний спосіб.

1. Розкладемо вхідну функцію  $Z(p)$  в неперервний (східчастий) дріб послідовним діленням – *метод Кауера* (рис. 11.2).

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 12p^5 + 19p^3 + 6p \\
 - 12p^5 + 10p^3 + 2p \\
 \hline
 6p^4 + 5,000p^2 + 1 \\
 - 6p^4 + 2,667p^2 \\
 \hline
 9p^3 + 4,000p \\
 - 9p^3 + 3,857p \\
 \hline
 2,333p^2 + 1 \\
 - 2,333p^2 \\
 \hline
 0,143p \\
 - 0,143p \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{r}
 6p^4 + 5p^2 + 1 \\
 9p^3 + 4p \\
 2,333p^2 + 1 \\
 0,143p \\
 1
 \end{array} \right.
 \begin{array}{r}
 \boxed{2p} \\
 \boxed{0,667p} \\
 \boxed{3,86p} \\
 \boxed{16,33p} \\
 \boxed{0,143p}
 \end{array}
 \end{array}$$

Рисунок 11.2

В результаті задану функцію  $Z(p)$  вхідного опору можемо переписати таким чином

$$Z(p) = 2p + \frac{1}{0,667p + \frac{1}{3,86p + \frac{1}{16,33p + \frac{1}{0,143p}}}}$$

Отриманому співвідношенню відповідає електричне коло, яке наведено на рис. 11.3, а. Нагадаємо, що значення всіх параметрів задано в безрозмірних відносних одиницях.

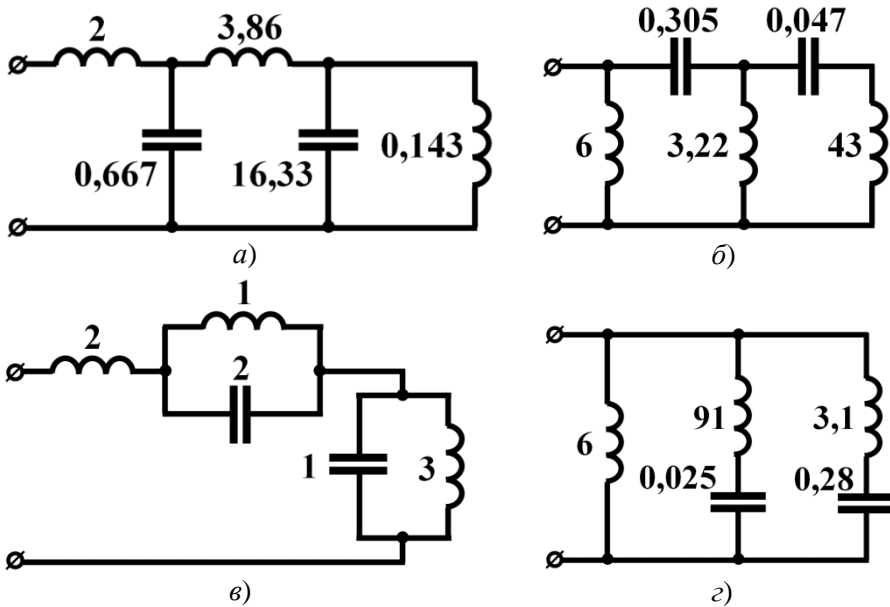


Рисунок 11.3

2. Подамо вхідний опір двополюсника у вигляді суми простих дробів – *метод Фостера*. Для цього необхідно, щоб найвищий степінь змінної  $p$  чисельника був меншим, аніж найвищий степінь  $p$  знаменника. В нашому випадку задля виконання даної умови чисельник один раз поділимо на знаменник, внаслідок чого за відомих уявних коренів знаменника можемо записати:

$$Z(p) = 2p + \frac{9p^3 + 4p}{6p^4 + 5p^2 + 1} = 2p + \frac{A(p)}{B(p)} = 2p + \frac{A_1 p}{p^2 + 0,333} + \frac{A_2 p}{p^2 + 0,5}.$$

За такого розкладання невідомі коефіцієнти в чисельниках простих дробів

знаходимо за виразами  $A_k = \frac{2A(p_k^2)}{B'(p_k^2)}$ . Тоді, оскільки

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0,5,$$

для функції вхідного опору можна записати

$$Z(p) = 2p + \frac{p}{p^2 + 0,333} + \frac{0,5p}{p^2 + 0,5}.$$

Таким чином, шукана схема має складатися з трьох послідовно з'єднаних частин, перша з яких – індуктивність, а дві інші – паралельно з'єднані індуктивність та ємність, як це показано на рис. 11.3, в.

3. Запишемо вираз для вхідної провідності двополюсника

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{6p^4 + 5p^2 + 1}{12p^5 + 19p^3 + 6p}$$

та застосуємо метод Кауера для отримання схеми двополюсника. Незавжди помітити, що в цьому випадку операція послідовного ділення стає можливою лише тоді, коли поліноми розташувати за зростаючими степенями  $p$ , як це і показано на рис. 11.4.

$$\begin{array}{r}
 1 + 5,00p^2 + 6p^4 \overline{) 6p + 19p^3 + 12p^5} \\
 \underline{1 + 3,17p^2 + 2p^4} \\
 6p + 19,00p^3 + 12p^5 \\
 \underline{6p + 13,09p^3} \\
 1,83p^2 + 4,00p^4 \\
 \underline{1,83p^2 + 3,72p^4} \\
 5,91p^3 + 12p^5 \\
 \underline{5,91p^3} \\
 0,28p^4 \\
 \underline{0,047p + 43p} \\
 12p^5 \\
 \underline{12p^5} \\
 0
 \end{array}$$

Рисунок 11.4

В результаті ділення отримуємо ланцюговий дріб

$$Y(p) = \frac{1}{6p} + \frac{1}{\frac{1}{0,305p} + \frac{1}{\frac{1}{3,22p} + \frac{1}{\frac{1}{0,047p} + 43p}}}}$$

який дозволяє долучити до вже отриманих ще одну схему із заданою умовою задачі функцією вхідного опору (див. рис. 11.3, б).

4. Для побудови четвертої схеми знову скористаємося методом Фостера, але

застосуємо його до вхідної провідності  $Y(p)$ . Розкладемо дану функцію на прості дроби, скориставшись для цього раніше віднайденими коренями її знаменника

$$p'_1 = 0, \quad p'_{2,3} = \pm j0,66, \quad p'_{4,5} = \pm j1,071.$$

Тоді

$$Y(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2 p}{p^2 + 0,436} + \frac{A_3 p}{p^2 + 1,147},$$

звідки після знаходження коефіцієнтів  $A_k$  отримуємо

$$Y(p) = \frac{0,167}{p} + \frac{0,0105 p}{p^2 + 0,436} + \frac{0,323 p}{p^2 + 1,147}.$$

Електричне коло, якому відповідає задана провідність, має складатися з трьох паралельних віток. Перша вітка містить лише один елемент – індуктивність, а дві інших – по два послідовно з'єднаних ємнісних та індуктивних елементи, як це показано на рис. 11.3, з.

**11.2** Перевірити, чи можливо фізично реалізувати двополюсник з вхідною функцією:

$$F(p) = \frac{18p^2 + 19p + 4}{6p^2 + 5p + 1}.$$

### Розв'язування

Двополюсник можливо фізично реалізувати тоді і тільки тоді, коли його вхідна функція, що подана відношенням двох поліномів

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

де  $A(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0$ ;  $B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0$ , має задовольняти п'ять необхідних та достатніх вимог. Останні називають умовами реалізації:

- 1) всі коефіцієнти поліномів  $a_k$  і  $b_k$  мають бути дійсними і додатними;
- 2) найвищі степені обох поліномів  $m$  і  $n$  не повинні відрізнятися один від одного більше, аніж на одиницю;
- 3) всі нулі та полюси вхідної функції мають бути розташованими в лівій півплощині, тобто дійсні частини коренів поліномів  $A(p)$  і  $B(p)$  не можуть бути додатними;
- 4) у разі, якщо вхідна функція має нулі і полюси, що розташовані на уявній осі, то всі вони повинні бути простими (некратними);
- 5) дійсна частина вхідної функції за суто уявних значень  $p$  не повинна бути від'ємною, тобто  $F(p) \geq 0$ , якщо  $p = j\omega$ .

Відтак функція, яка задовольняє ці умови, називається *додатною дійсною функцією* (ДДФ).

Перевірка перших двох умов для довільної вхідної функції не викликає труднощів. В нашому випадку всі коефіцієнти обох поліномів є додатними, а різниця між  $m=2$  і  $n=2$  дорівнює нулю. Отже, для заданої функції перші дві умови виконуються.

Стосовно наступних двох умов, то їх також неважко перевірити, оскільки обидва поліноми другого порядку і коренями для полінома

$$A(p) = 18p^2 + 19p + 4$$

є  $p_1 = -0,765$ ,  $p_2 = -0,29$ , а для полінома

$$B(p) = 6p^2 + 5p + 1$$

$p_1 = -0,5$ ,  $p_2 = -0,333$ , відповідно.

Всі корені поліномів від'ємні, внаслідок чого третя і четверта умови також виконуються.

Для перевірки п'ятої умови відшукаємо дійсну частину вхідної функції, прийнявши  $p = j\omega$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{18(j\omega)^2 + 19j\omega + 4}{6(j\omega)^2 + 5j\omega + 1} = \frac{(4 - 18\omega^2) + j19\omega}{(1 - 6\omega^2) + j5\omega} = \\ &= \frac{[(4 - 18\omega^2) + j19\omega][(1 - 6\omega^2) - j5\omega]}{(1 - 6\omega^2)^2 + 25\omega^2} = \\ &= \frac{(108\omega^4 + 53\omega^2 + 4) - j\omega(24\omega^2 + 1)}{(1 - 6\omega^2)^2 + 25\omega^2}. \end{aligned}$$

З цього співвідношення видно, що дійсна частина вхідної функції для суто уявних коренів  $p = j\omega$

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = \frac{108\omega^4 + 53\omega^2 + 4}{(1 - 6\omega^2)^2 + 25\omega^2}$$

є завжди додатною, незалежно від значень частоти  $\omega$ , яка в загальному випадку може змінюватися від 0 до  $\infty$ .

Таким чином, задана вхідна функція є додатною дійсною функцією, а відтак двополіусник з такою вхідною функцією може бути фізично реалізованим.

### **11.3** Вхідний опір двополіусника задано функцією

$$Z(p) = \frac{18p^2 + 19p + 4}{6p^2 + 5p + 1}.$$

Скласти щонайменше дві електричні схеми цього двополіусника.

### Розв'язування

1. Шукаємо розв'язок способом формування функції  $Z(p)$  у вигляді неперервного дроби (метод Кауера), як це показано на рис. 11.5.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 18p^2 + 19p + 4 \\
 - 18p^2 + 15p + 3 \\
 \hline
 6p^2 + 5,0p + 1 \\
 - 6p^2 + 1,5p \\
 \hline
 3,5p + 1,000 \\
 - 3,5p + 0,875 \\
 \hline
 4p + 1 \\
 - 4p \\
 \hline
 0,125 \\
 \hline
 32p + 8 \\
 \hline
 1 \\
 - 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 6p^2 + 5p + 1 \\
 4p + 1 \\
 1,5p + 0,875 \\
 0,125 \\
 32p + 8
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \boxed{3} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

Рисунок 11.5

Таким чином, заданий вхідний опір двополюсника можемо переписати у вигляді

$$Z(p) = 3 + \frac{1}{1,5p + 0,875 + \frac{1}{32p + 8}}$$

Всі коефіцієнти неперервного дроби додатні, тому такому вхідному опору відповідає коло, електрична схема якого наведена на рис. 11.6, а. Параметри елементів схеми задано у відносних одиницях.

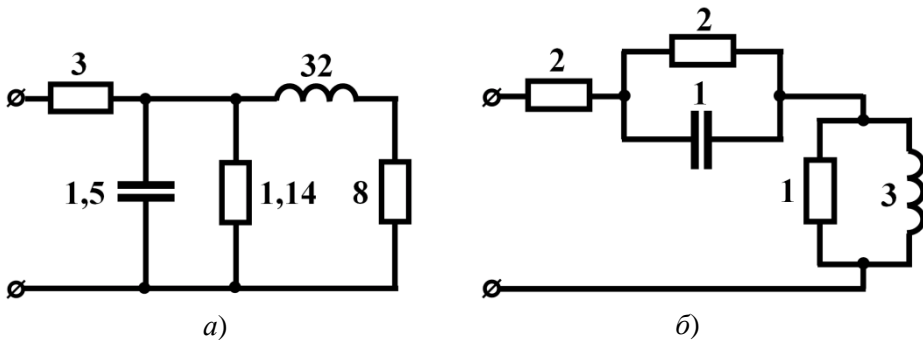


Рисунок 11.6



2. Розв'яжемо задачу у спосіб розкладання вхідної функції на прості дроби (метод Фостера).

Знаходимо корені знаменника

$$p_1 = -0,5; p_2 = -0,333$$

і запишемо заданий вхідний опір у вигляді

$$Z(p) = \frac{18p^2 + 19p + 4}{6(p+0,5)(p+0,333)} = A_0 + \frac{A_1}{p+0,5} + \frac{A_2 p}{p+0,333}$$

з поки що невідомими коефіцієнтами  $A_0, A_1, A_2$ . Для їх знаходження зведемо до спільного знаменника праву частину отриманого співвідношення і прирівняємо коефіцієнти з однаковими степенями  $p$ . В результаті отримуємо систему трьох рівнянь

$$\begin{cases} A_0 + A_2 = 3, \\ 0,833A_0 + A_1 + 0,5A_2 = 3,167, \\ 0,167A_0 + 0,333A_2 = 0,666. \end{cases}$$

Звідки маємо  $A_0 = 2; A_1 = 1; A_2 = 1$ .

Таким чином, функцію опору остаточно запишемо у вигляді

$$Z(p) = 2 + \frac{1}{p+0,5} + \frac{p}{p+0,333},$$

що дозволяє скласти ще одну електричну схему для заданого двополюсника (рис. 11.6, б).

3. Тепер запишемо вхідну провідність двополюсника

$$Y(p) = \frac{6p^2 + 5p + 1}{18p^2 + 19p + 4}$$

та спробуємо подати її у вигляді неперервного дроби, як це наведено на рис. 11.7.

$$\begin{array}{r|l} 6p^2 + 5p + 1 & 18p^2 + 19p + 4 \\ - & \hline 6p^2 + \frac{19}{3}p + \frac{4}{3} & \boxed{\frac{1}{3}} \\ \hline & -\frac{4}{3}p - \frac{1}{3} \end{array}$$

Рисунок 11.7

Як бачимо, під час розкладання з'явилися від'ємні коефіцієнти. У зв'язку з цим операцію ділення можна припинити, оскільки фізично реалізувати таку схему у множині лінійних кіл принципово неможливо.

Всі інші спроби реалізувати задане коло методами Кауера і Фостера за його вхідною провідністю також будуть невдалими.

**11.4** Перевірити, чи буде вхідна функція

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{12p^4 + 10p^3 + 15p^2 + 8p + 2}{4p^3 + 2p^2 + 3p + 1}$$

додатною дійсною.

**Розв'язування**

Дана задача розв'язується аналогічно попереднім. Виконання перших двох умов реалізації очевидне, оскільки всі коефіцієнти обох поліномів додатні, а їх найвищі степені  $m=4$  і  $n=3$ , звідки  $m-n=1$ , тобто не відрізняються більше, ніж на одиницю.

Для перевірки третьої і четвертої умов, аби уникнути необхідності пошуку коренів поліномів високих степенів, зазвичай використовують більш загальний підхід. Розглянемо його.

Поліноми, корені яких задовольняють третю і четверту умови, називаються *поліномами Гурвіца*. Щоб виявити, чи є заданий поліном поліномом Гурвіца, необхідно здійснити такі операції.

Спочатку дослідимо поліном  $A(p)$ . Виділимо в ньому складові з парними та непарними степенями  $p$ . Позначимо їх як

$$M_1(p) = 12p^4 + 15p^2 + 2 \text{ і } N_1(p) = 10p^3 + 8p.$$

Тепер подамо відношення поліномів  $\frac{M_1(p)}{N_1(p)}$  у вигляді ланцюгового дроби, виконавши для цього операцію послідовного ділення (рис. 11.8).

$$\begin{array}{r} \frac{12p^4 + 15p^2 + 2}{12p^4 + 9,6p^2} \Big| \frac{10p^3 + 8p}{1,2p} \\ \hline \frac{10p^3 + 8,0p}{10p^3 + 3,7p} \Big| \frac{5,4p^2 + 2}{1,85p} \\ \hline \frac{5,4p^2 + 2}{5,4p^2} \Big| \frac{4,3p}{1,26p} \\ \hline \frac{4,3p}{4,3p} \Big| \frac{2}{2,15p} \\ \hline 0. \end{array}$$

Рисунок 11.8

Таким чином, відношення  $\frac{M_1(p)}{N_1(p)}$  у вигляді ланцюгового (або неперервного) дроби буде мати вигляд

$$\frac{M_1(p)}{N_1(p)} = 1,2p + \frac{1}{1,85p + \frac{1}{1,26p + \frac{1}{2,15p}}}.$$

Якщо всі коефіцієнти такого дроби виявляться додатними, то досліджуваний поліном буде поліномом Гурвіца.

В нашому випадку поліном  $A(p)$  є поліномом Гурвіца.

Для дослідження полінома  $B(p)$  також відшукаємо відношення

$$\frac{N_2(p)}{M_2(p)} = \frac{4p^3 + 3p}{2p^2 + 1}$$

у вигляді неперервного дроби:

$$\frac{N_2(p)}{M_2(p)} = 2p + \frac{1}{2p + \frac{1}{p}},$$

де, як бачимо, всі коефіцієнти також додатні. Це означає, що і поліном  $B(p)$  є поліномом Гурвіца.

Перевірку вхідної функції  $F(p)$  на виконання п'ятої умови реалізації в загальному випадку здійснюють за допомогою *функції Штурма*.

Визначимо *першу* функцію Штурма. Для цього знайдемо проміжну функцію

$$f(p) = M_1(p)M_2(p) - N_1(p)N_2(p)$$

та здійснимо в ній послідовно дві заміни:  $p = j\omega$  і  $x = \omega^2$ .

В нашому випадку

$$\begin{aligned} f(p) &= (12p^4 + 15p^2 + 2)(2p^2 + 1) - (10p^3 + 8p)(4p^3 + 3p) = \\ &= -16p^6 - 20p^4 - 5p^2 + 2. \end{aligned}$$

Внаслідок першої заміни ( $p = j\omega$ ) з урахуванням, що  $(j\omega)^2 = -\omega^2$ ,  $(j\omega)^4 = \omega^4$ ,  $(j\omega)^6 = -\omega^6$ , ..., отримуємо функцію

$$f(\omega) = 16\omega^6 - 20\omega^4 + 5\omega^2 + 2,$$

з якої після другої заміни ( $x = \omega^2$ ) визначаємо *першу* функцію Штурма

$$f_1(x) = 16x^3 - 20x^2 + 5x + 2.$$

*Друга* функція Штурма є похідною першої функції, тому

$$f_2(x) = f_1'(x) = 48x^2 - 40x + 5.$$

*Третю* функцію Штурма знаходять як узятий з протилежним знаком залишок від ділення першої функції Штурма на другу. При цьому операцію ділення здійснюють до тих пір, поки найвищий степінь  $x$  залишку не стане на одиницю

меншим за найвищий степінь другої функції Штурма  $f_2(x)$ , як це продемонстровано на рис. 11.9.

$$\begin{array}{r|l} 16x^3 - 20,00x^2 + 5,00x + 2 & 48x^2 - 40x + 5 \\ \hline 16x^3 - 13,33x^2 + 1,67x & 0,333x - 0,139 \\ \hline -6,67x^2 + 3,33x + 2,00 & \\ -6,67x^2 + 5,56x - 0,69 & \\ \hline -2,23x + 2,69 & \end{array}$$

Рисунок 11.9

Отже, третя функція Штурма має вигляд

$$f_3(x) = 2,23x - 2,69.$$

Четверту функцію Штурма отримуємо аналогічно – у спосіб ділення другої функції Штурма на третю (рис. 11.10).

$$\begin{array}{r|l} 48x^2 - 40,0x + 5 & 2,23x - 2,69 \\ \hline 48x^2 - 57,8x & 21,5x + 8 \\ \hline 17,8x + 5,0 & \\ -17,8x - 21,5 & \\ \hline 26,5 & \end{array}$$

Рисунок 11.10

Звідки  $f_4(x) = -26,5$ .

Тепер складемо таблицю, де вкажемо знаки всіх отриманих функцій Штурма за двох значень  $x$ :  $x_1 = 0$  та  $x_2 = \infty$  і кількість змін знака  $W_1$  і  $W_2$  для кожного з цих значень (див. табл. 11.1).

Таблиця 11.1

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Кількість змін знака
$x_1 = 0$	+	+	-	-	$W_1 = 1$
$x_2 = \infty$	+	+	+	-	$W_2 = 1$

Якщо різниця числа змін знака для різних значень  $x$  дорівнює нулю  $W_1 - W_2 = 0$  і водночас перша функція Штурма  $f_1(x)$  для  $x_1 = 0$  є додатною  $f_1(0) > 0$ , то  $n$ 'ята умова реалізації виконується.

Відтак в нашому випадку задана вхідна функція задовольняє всі п'ять умов реалізації, а тому є додатною дійсною і двополюсник з такою вхідною функцією можливо фізично реалізувати.

**11.5** Побудувати схему двополюсника з вхідним опором

$$Z(p) = \frac{12p^4 + 10p^3 + 15p^2 + 8p + 2}{4p^3 + 2p^2 + 3p + 1}.$$

**Розв'язування**

Як було доведено в попередній задачі, задана вхідна функція є додатною дійсною. Це дозволяє фізично реалізувати двополюсник і для побудови його схеми скористаємося методом подання функції  $Z(p)$  неперервним дробом.

Послідовним діленням чисельника заданого вхідного опору на його знаменник визначаємо коефіцієнти неперервного дроби (рис. 11.11).

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 12p^4 + 10p^3 + 15p^2 + 8p + 2 \\
 - (3p+1)(4p^3 + 2p^2 + 3p + 1) \\
 \hline
 4p^3 + 6p^2 + 5p + 2 \\
 - 4p^3 + 2p^2 + 3p + 1 \\
 \hline
 4p^3 + 2p^2 + 3p + 1 \\
 - (p)(4p^2 + 2p + 1) \\
 \hline
 4p^2 + 2p + 1 \\
 - (2p)(4p^2 + 2p) \\
 \hline
 2p + 1 \\
 - (1)(2p + 1) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Рисунок 11.11

За знайденими коефіцієнтами записуємо і сам неперервний дріб:

$$Z(p) = 3p + 1 + \frac{1}{p + \frac{1}{2p + \frac{1}{2p + 1}}}.$$

Схему реалізації двополюсника наведено на рис. 11.12.

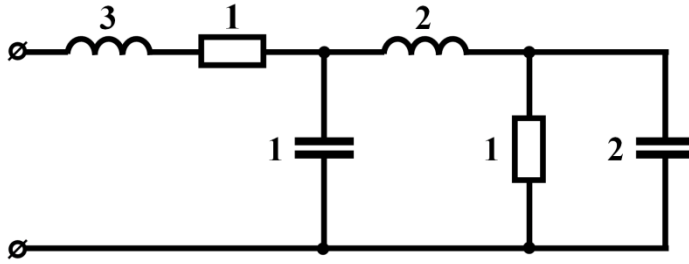


Рисунок 11.12

**11.6** Скласти таку схему двополюсника, в якому б за умови підключення до нього джерела напруги  $u(t) = 10(1 - e^{-50t})$  В та за нульових початкових умов вхідний струм змінювався за законом  $i(t) = 20t$  А (рис. 11.13).

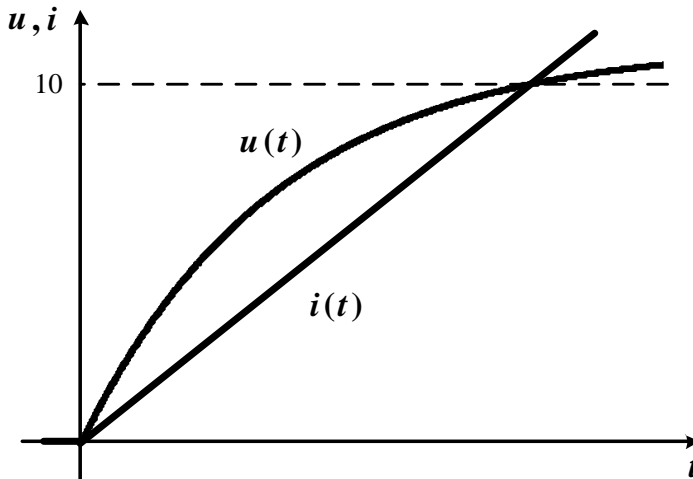


Рисунок 11.13

**Розв'язування**

Запишемо зображення заданої напруги джерела

$$U(p) = \frac{500}{p(p+50)}$$

та вхідного струму

$$I(p) = \frac{20}{p^2}.$$

Тоді операторний вхідний опір шуканого двополюсника відповідно до закону Ома дорівнюватиме

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{25p}{p+50}.$$

Нескладно довести, що такій функції вхідного опору відповідає електричне коло з параметрами  $L=0,6$  Гн і  $R=25$  Ом, схема якого наведена на рис. 11.14.

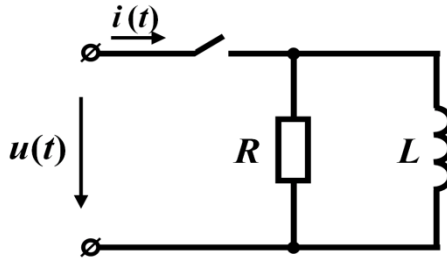


Рисунок 11.14

**11.7** Пасивний двополюсник з нульовими початковими умовами вмикають до джерела постійної напруги  $U=5$  В. Вхідний струм двополюсника під час перехідного процесу змінюється за законом  $i(t)=2(1+e^{-200t})$  А. Скласти одну або кілька електричних схем двополюсника та визначити параметри його елементів.

**Розв’язування**

1. Застосуємо інтегральне перетворення Лапласа і запишемо напругу та струм в операторній формі  $U(p) = \frac{5}{p}$ ;  $I(p) = 2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+200}\right) = \frac{4p+400}{p(p+200)}$ , звідки операторний вхідний опір двополюсника набуває вигляду

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{5p+1000}{4p+400}.$$

Складемо першу схему двополюсника, задля чого подамо функцію вхідного опору у вигляді ланцюгового дроби (рис. 11.15).

$$\begin{array}{r|l} 5p+1000 & 4p+400 \\ \hline 5p+500 & \boxed{1,25} \\ \hline 4p+400 & 500 \\ \hline 4p & \boxed{0,008p+1,25} \\ \hline & 400 \\ & \hline & 400 \\ & \hline & 0. \end{array}$$

Рисунок 11.15

Тоді

$$Z(p) = 1,25 + \frac{1}{0,008p + 1,25}.$$

Схему такого двополюсника зображено на рис. 11.16, а.

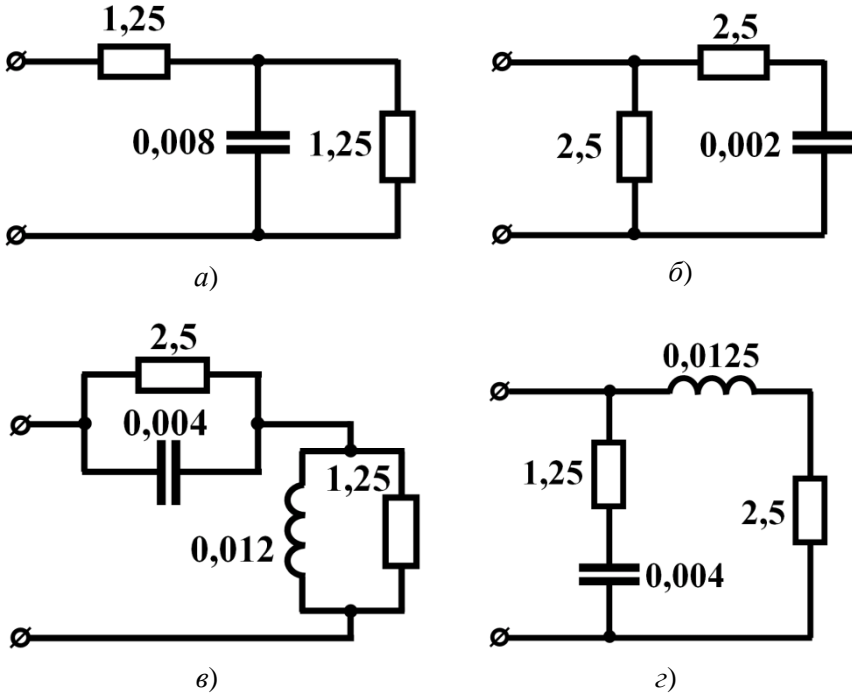


Рисунок 11.16

2. Другу схему складемо, скориставшись вхідною провідністю двополюсника

$$Y(p) = \frac{4p + 400}{5p + 1000}.$$

Розкладемо цю функцію у вигляді неперервного дробу

$$Y(p) = 0,4 + \frac{1}{2,5 + \frac{1}{0,002p}}.$$

Електричну схему, яка відповідає такому розкладанню, наведено на рис. 11.16, б.

Отримаємо ще дві еквівалентні схеми.

3. Запишемо вхідний опір двополюсника у вигляді суми двох складових, тобто



$$Z(p) = \frac{5p}{4p + 400} + \frac{1000}{4p + 400}.$$

Такому запису вхідного опору відповідає схема, яка наведена на рис. 11.16, в.

4. Останню схему складемо аналогічно, якщо запишемо функцію вхідної провідності двополюсника як суму двох складових

$$Y(p) = \frac{4p}{5p + 1000} + \frac{400}{5p + 1000}.$$

Такому запису вхідної функції провідності відповідає схема, зображена на рис. 11.16, з.

Всі параметри отримано в стандартних одиницях вимірювання.

**11.8** Вхідний струм деякого пасивного двополюсника з нульовими початковими умовами після підмикання його до джерела постійної напруги  $U = 10$  В знає зміни у часі за законом  $i(t) = 8 + 20e^{-20t} \sin(100t - 10^\circ)$  А. Побудувати електричну схему двополюсника та визначити параметри його елементів.

### Розв'язування

Спочатку, для зручності знаходження операторного зображення, перетворимо задану формулу миттєвого значення струму

$$\begin{aligned} i(t) &= 8 + 20e^{-20t} \frac{e^{j(100t-10^\circ)} - e^{-j(100t-10^\circ)}}{2j} = \\ &= 8 + 10 \left[ e^{(-20+j100)t} e^{-j100^\circ} - e^{-(20+j100)t} e^{-j80^\circ} \right] \text{ А,} \end{aligned}$$

на підставі якої і запишемо зображення струму

$$I(p) = \frac{8}{p} + \frac{10e^{-j100^\circ}}{(p+20) - j100} - \frac{10e^{-j80^\circ}}{(p+20) + j100}.$$

Після нескладних перетворень остаточно отримуємо

$$I(p) = \frac{4,5p^2 + 2200p + 83200}{p(p^2 + 40p + 10400)}.$$

Зображення прикладеної напруги

$$U(p) = \frac{10}{p},$$

тоді вхідний опір двополюсника

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{10p^2 + 400p + 104000}{4,5p^2 + 2200p + 83200}.$$

Перевірка на умови реалізації, яка в даній задачі не наводиться, показує, що двополюсник із заданим вхідним опором реалізувати фізично можливо.

Для побудови схеми визначимо вхідну провідність двополюсника

$$Y(p) = \frac{4,5p^2 + 2200p + 83200}{10p^2 + 400p + 104000}$$

і у спосіб послідовного ділення подамо її як неперервний дріб

$$Y(p) = 0,45 + \frac{1}{0,005p + 0,11 + \frac{1}{0,02p + 0,36}}$$

Електрична схема, яка відповідає отриманому виразу, і її параметри в стандартних одиницях наведені на рис. 11.17.

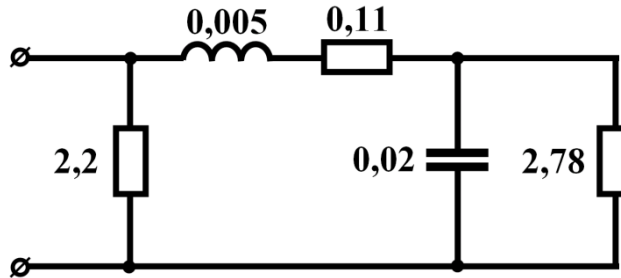


Рисунок 11.17

**11.9** Відшукати електричні схеми, які будуть еквівалентними колу, зображеному на рис. 11.18.

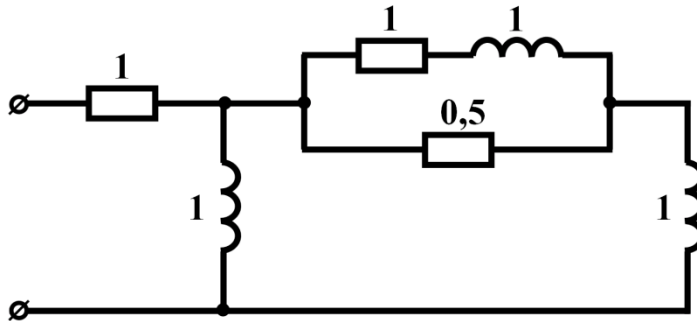


Рисунок 11.18

### Розв'язування

Запишемо функцію вхідного опору кола з урахуванням способу з'єднань окремих елементів у ньому

$$Z(p) = 1 + \frac{p \left( \frac{(p+1)0,5}{p+1+0,5} + p \right)}{p + \frac{(p+1)0,5}{p+1+0,5} + p}$$

Після нескладних перетворень отримуємо

$$Z(p) = \frac{p^3 + 4p^2 + 4p + 0,5}{2p^2 + 3,5p + 0,5}.$$

Послідовним діленням подамо цю функцію у вигляді неперервного дробу

$$Z(p) = 0,5p + \frac{1}{0,889 + \frac{1}{13,5p + \frac{1}{0,0555 + \frac{1}{108p + 18}}}},$$

що дозволяє скласти схему (рис. 11.19), еквівалентну заданій.

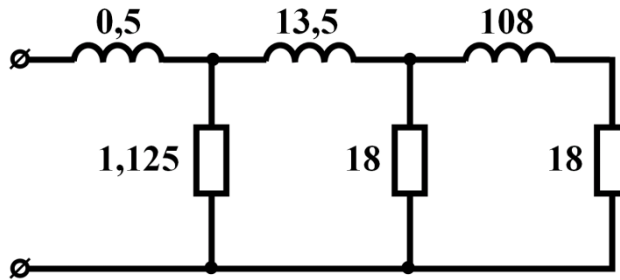


Рисунок 11.19

Ще один варіант еквівалентної схеми можна отримати, якщо під час операції ділення розташувати складові в поліномах за зростаючими степенями  $p$ . Тоді:

$$Z(p) = \frac{0,5 + 4p + 4p^2 + p^3}{0,5 + 3,5p + 2p^2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{0,11p} + \frac{1}{\frac{50}{3} + 10p}}}}}.$$

Схема, отримана у такий спосіб зображена на рис. 11.20.

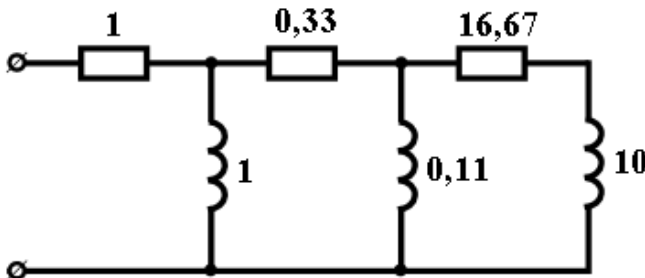


Рисунок 11.20

**Задачі для самостійного розв'язування**

**11.10** Визначити, чи належить функція  $F(p) = \frac{6p^2 + 9p}{6p^2 + 5p + 3}$  до класу додатних дійсних функцій.

**Відповідь:** так, належить.

**11.11** З'ясувати, які з наведених нижче функцій не є додатними дійсними функціями:

1)  $Z(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{p^2 + p + 1}$ ; 2)  $Z(p) = \frac{p^2 + p + 5}{p^2 + p + 1}$ ; 3)  $Z(p) = \frac{p^2 + 0,5p + 3}{p^2 + p + 1}$ .

**Відповідь:** друга та третя.

**11.12** Скориставшись методами Кауера і Фостера, побудувати електричні схеми за заданою функцією вхідного опору

$$Z(p) = \frac{p^2 + 5,5p + 6}{p^2 + 4p + 3}$$

**Відповідь:** схема, складена за методом Кауера, наведена на рис. 11.21, а, а за методом Фостера – на рис. 11.21, б.

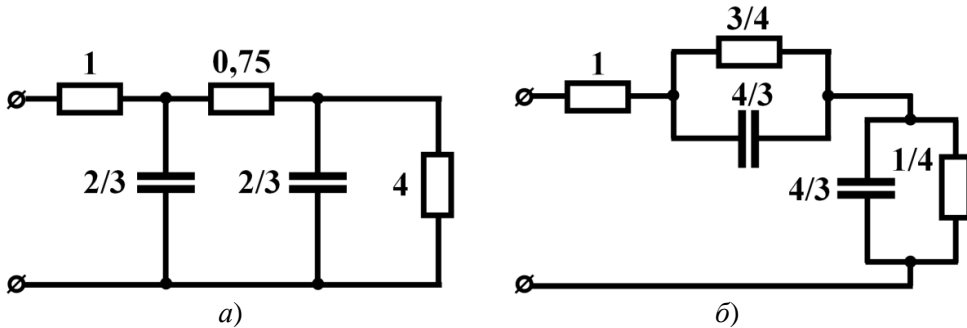


Рисунок 11.21

**11.13** Скориставшись методами Кауера і Фостера, побудувати дві еквівалентні схеми для двополосника, зображеного на рис. 11.22.

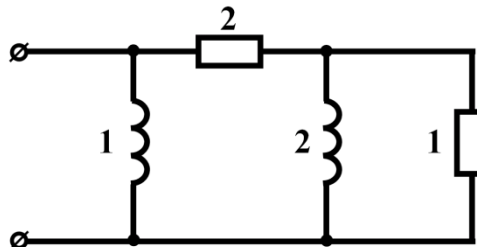


Рисунок 11.22

**Відповідь:** еквівалентні схеми показано на рис. 11.23, а і б.

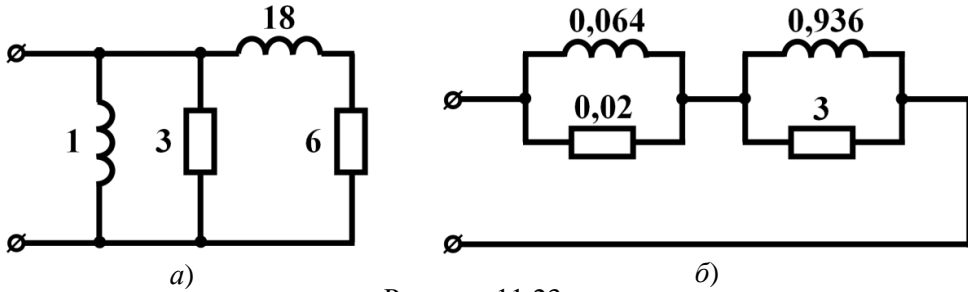


Рисунок 11.23

**11.14** Знеструмлений пасивний двополусник підмикають до джерела напруги  $u(t) = 20(2 - e^{-40t})$  В. Якою має бути його схема, щоб вхідний струм змінювався у часі за законом  $i(t) = (2e^{100t} + 2e^{-40t})$  А?

*Підказка.* Потрібно спочатку записати напругу і струм в операторній формі, відшукати вхідний опір двополусника, а потім застосувати метод Фостера.

**Відповідь:** шукану схему наведено на рис. 11.24. Її параметри:  $C = 1750$  мкФ,  $L = 44,3$  мГн,  $R_1 = 4,69$  Ом,  $R_2 = 0,31$  Ом.

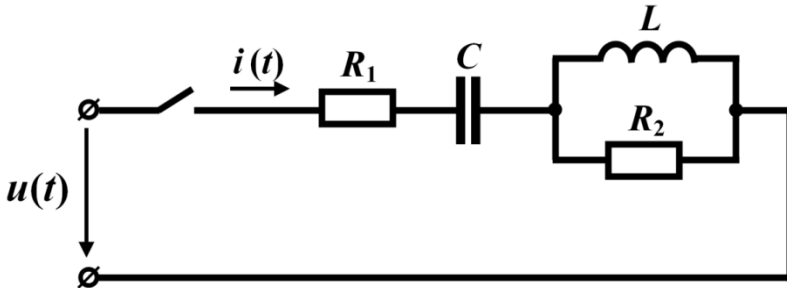


Рисунок 11.24

**11.15** Вхідна функція реактивного двополусника є відомою і дорівнює:

$$F(p) = \frac{22p^4 + 13p^2 + 1}{12p^5 + 11p^3 + p}$$

Застосувавши методи Кауера і Фостера, необхідно визначити схему і параметри двополусника, якщо функція  $F(p)$  є його:

- 1) вхідним опором;
- 2) вхідною провідністю.

**Відповідь:**

1. Якщо функція  $F(p)$  є вхідним опором двополусника, то реалізовані за методом Кауера схеми наведено на рис. 11.25, а і б, а за методом Фостера – на рис. 11.25, в і г.

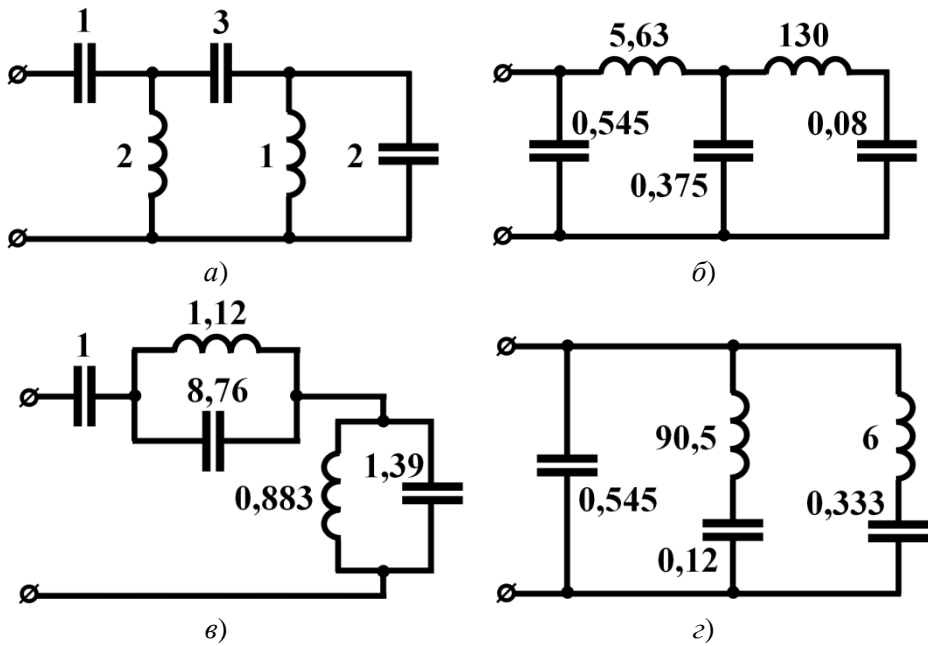


Рисунок 11.25

2. Якщо функція  $F(p)$  є вхідною провідністю двополосника, то реалізовані за методом Кау-єра схеми наведено на рис. 11.26, а і б, а за методом Фостера – на рис. 11.26, в і г.

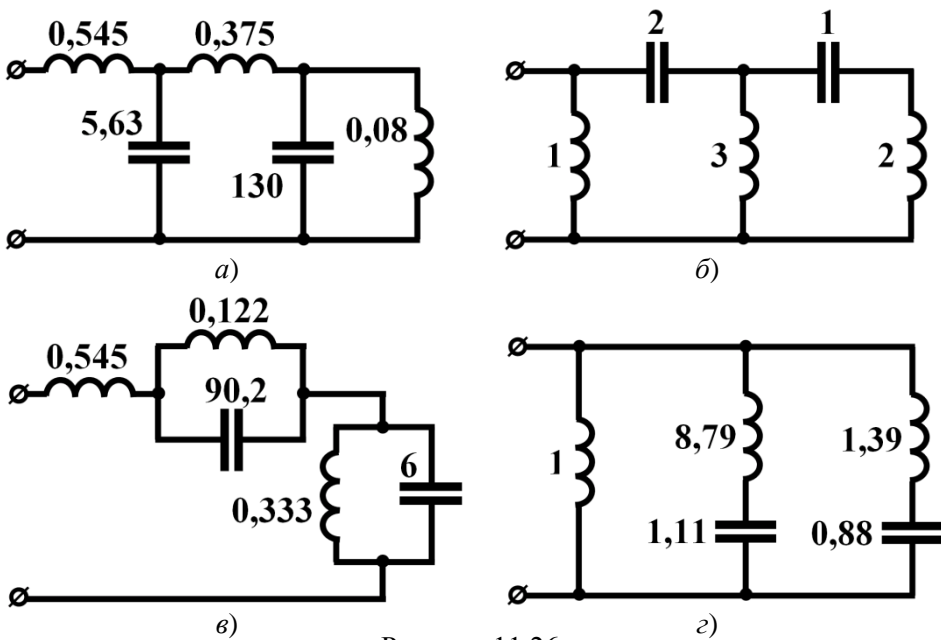


Рисунок 11.26

На всіх схемах вказано параметри елементів у відносних одиницях.

**11.16** Внаслідок підмикання пасивного двополюсника до джерела постійної напруги  $U = 20$  В за нульових початкових умов в ньому з'являється струм, який змінюється у часі за законом  $i(t) = 2 - 2,4e^{-100t} + 0,4e^{-400t}$  А. Необхідно скласти електричну схему даного двополюсника і визначити параметри її елементів.

**Відповідь:** шукану схему наведено на рис. 11.27.

Параметри схеми:  $C = 100$  мкФ,  $L = 0,25$  Гн,  $R = 20$  Ом.

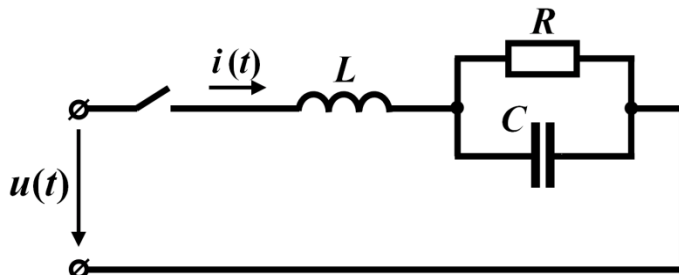


Рисунок 11.27

## Розділ 12

# КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ

Показано способи отримання диференціальних рівнянь, що описують перехідні процеси в лінійних колах, а також методи складання характеристичних рівнянь та прийоми знаходження сталих інтегрування. В наведених прикладах розглядається розрахунок електричних кіл, перехідні процеси в яких описуються диференціальними рівняннями не вище другого порядку.

**12.1** Визначити, як буде змінюватися в часі струм  $i$  внаслідок розмикання ключа в колі, зображеному на рис. 12.1. Параметрами кола є  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $C = 200$  мкФ. До кола прикладено постійну напругу  $U = 50$  В. Необхідно також розрахувати практичну тривалість перехідного процесу.

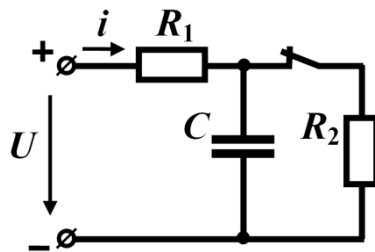


Рисунок 12.1

### Розв'язування

Загальний підхід до розв'язування задач з перехідних процесів класичним методом полягає в тому, що спочатку записується система диференціальних рівнянь для миттєвих значень напруг і струмів, складених за законами Кірхгофа для післякомутаційного стану кола. Зв'язок між струмами і напругами на елементах кола задається компонентними співвідношеннями:

- для активних опорів  $u = Ri$  ;

- для індуктивності  $u = L \frac{di}{dt}$  ;

- для ємності  $u = \frac{1}{C} \int idt$  .

В заданому колі після розмикання ключа (комутації) залишається тільки один контур, для якого записуємо рівняння за другим законом Кірхгофа



$$R_1 i + \frac{1}{C} \int i dt = U .$$

Отримане рівняння не є диференціальним через наявність в ньому інтеграла. Окрім того, змінною в цьому рівнянні є струм, який не підлягає законам комутації. Тому значно зручніше складати диференціальне рівняння відносно струму в індуктивності або напруги на ємності, на які поширюється дія законів комутації.

В нашому випадку замість одного рівняння запишемо систему з двох рівнянь

$$\begin{cases} R_1 i + u_C = U, \\ i = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases}$$

З цієї системи шляхом підстановки отримуємо одне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку відносно  $u_C$

$$R_1 C \frac{du_C}{dt} + u_C = U .$$

Розв'язок такого рівняння записується у вигляді суми двох складових – *примусової* та *вільної*

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cв} .$$

Перша є частинним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння і залежить від параметрів кола та вигляду функції, що утворює праву частину цього рівняння, друга – загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння, права частина якого дорівнює нулю.

Примусову складову зручно розраховувати в новому усталеному режимі, коли перехідний процес вже завершено. В даній задачі в новому усталеному режимі коло складається з джерела постійної напруги і послідовно з'єднаних активного опору  $R_1$  і ємності  $C$ . В усталеному режимі за постійної напруги на ємності

$u_{Cnp} = const$  струм через неї  $i = C \frac{du_{Cnp}}{dt} = 0$ , що еквівалентно розриву вітки, в

якій ця ємність знаходиться. За відсутності струму відсутньою буде і напруга на опорі  $R_1$ . Тому, відповідно до другого закону Кірхгофа, в новому усталеному режимі напруга на ємності  $u_{Cnp} = U$ .

Вільною складовою для диференціального рівняння першого порядку завжди є функція часу

$$u_{Cв} = Ae^{pt} ,$$

де  $A$  – стала інтегрування;  $p$  – корінь характеристичного рівняння.

Характеристичне рівняння можна отримати з вихідного диференціального рівняння

$$R_1 Cp + 1 = 0 ,$$

звідки  $p = -\frac{1}{R_1 C} = -\frac{1}{20 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = -250 \frac{1}{c}$ .

Загальний розв'язок з врахуванням отриманих примусової і вільної складо-

вих має вигляд

$$u_C = U + Ae^{-250t}.$$

Наступним етапом розв'язування задачі є визначення сталої інтегрування  $A$ . Для цього використовуємо початкові умови, тобто визначаємо напругу на ємності  $u_C(0)$  в момент початку перехідного процесу ( $t=0$ ), скориставшись законами комутації. Напруга на ємності підлягає другому з цих законів, тобто  $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ . Це означає, що вказана напруга на початок перехідного процесу ( $t=0_+$ ) дорівнює напрузі, яку ємність мала в момент часу, що безпосередньо передував комутації ( $t=0_-$ ). Таким чином, початкові умови знаходимо, розраховуючи коло до комутації. Такий розрахунок, особливо в розгалужених колах, набагато зручніше виконувати, скориставшись, допоміжною схемою кола до комутації з урахуванням того, що ємність можна подати розривом вітки (рис. 12.2).

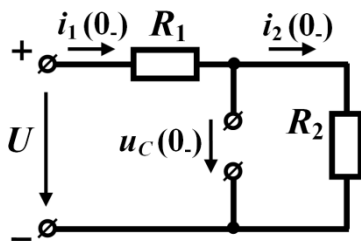


Рисунок 12.2

З цього рисунка видно, що напруга на ємності та опорі  $R_2$  однакова, оскільки вони з'єднані паралельно. Тому

$$u_C(0_-) = i_2(0_-)R_2.$$

Очевидно, що  $i_2(0_-) = i_1(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2}$ , звідки напруга на ємності

$$u_C(0_-) = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} = \frac{50 \cdot 30}{20 + 30} = 30 \text{ В}.$$

Таким чином, для нашої задачі початковою умовою є числове значення:  $u_C(0_+) = 30 \text{ В}$ .

Підставимо це значення напруги в загальний розв'язок, враховуючи, що  $t = 0$

$$30 = 50 + Ae^{-250 \cdot 0},$$

звідки маємо  $A = -20 \text{ В}$ .

Отже, напруга на ємності під час перехідного процесу змінюється за законом

$$u_C = 50 - 20e^{-250t} \text{ В}.$$

За умовою задачі потрібно визначити струм. Для цього використовуємо компонентне співвідношення

$$i = C \frac{du_C}{dt} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{d}{dt} [50 - 20e^{-250t}] =$$

$$= 2 \cdot 10^{-4} (-20)(-250)e^{-250t} = 1 \cdot e^{-250t} \text{ А.}$$

Практична тривалість перехідного процесу залежить від сталої часу  $\tau$  і становить приблизно

$$t_{np} \approx 4,5\tau.$$

Оскільки  $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{R_1 C} = 0,004$  с, то  $t_{np} = 18 t_{np} = 18$  мс.

**12.2** В електричному колі (рис. 12.3) з параметрами  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $U = 30$  В через час  $t_1 = 0,03$  с після замикання ключа струм в колі зріс удвічі. Потрібно визначити значення індуктивності  $L$ .

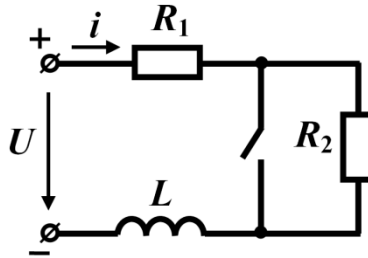


Рисунок 12.3

### Розв'язування

Після замикання ключа складемо рівняння за другим законом Кірхгофа

$$L \frac{di}{dt} + R_1 i = U.$$

Загальний розв'язок запишемо у вигляді суми двох складових  $i = i_{np} + i_g$ .

Першу складову (примусову) визначасмо з нового усталеного режиму в колі. За замкнутого ключа струм протікає тільки через два елементи – опір  $R_1$  та індуктивність  $L$ . Опір останньої постійному струму дорівнює нулю, через що

$$i_{np} = \frac{U}{R_1} = \frac{30}{5} = 6 \text{ А.}$$

Вільна складова струму  $i_g = Ae^{pt}$ , тому загальний розв'язок

$$i = 6 + Ae^{pt}.$$

Для визначення сталої інтегрування  $A$  скористаємося законом комутації щодо струму в індуктивності. Згідно з цим законом

$$i(0_+) = i(0_-) = i(0).$$

У вихідному стані ключ розімкнено, тому струм до комутації дорівнює

$$i(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2} = 2 \text{ А.}$$

Підставимо початкову умову в рівняння загального розв'язку, тобто за умови  $t = 0$ ,  $i(0) = 2 \text{ А}$ , що дає рівність  $2 = 6 + A$ , звідки  $A = -4$ .

Тоді  $i = 6 - 4e^{pt}$ .

Для знаходження  $p$  складемо характеристичне рівняння з відомого диференціального, тобто

$$Lp + R_1 = 0.$$

Звідси  $p = -\frac{R_1}{L}$ .

Враховуючи умову задачі, за якою в момент часу  $t = t_1 = 0,03 \text{ с}$  струм вдвічі більший початкового, тобто  $i(t_1) = 2i(0) = 4 \text{ А}$ , підставляємо це значення для заданого моменту часу в загальний розв'язок. В результаті отримуємо  $4 = 6 - 4e^{p \cdot 0,03}$  або

$$e^{p \cdot 0,03} = 0,5,$$

звідки  $0,03p = \ln 0,5 = -0,693$  і

$$p = -\frac{0,693}{0,03} = -23,1 \frac{1}{\text{с}}.$$

Відтак шукана індуктивність

$$L = -\frac{R_1}{p} = -\frac{5}{-23,1} = 0,216 \text{ Гн.}$$

**12.3** Електричне коло (рис. 12.4) підмикають до джерела постійної напруги  $E = 200 \text{ В}$ . Напруга на першій котушці безпосередньо після комутації  $u_1(0_+) = 200 \text{ В}$ , а на другій в момент часу  $t_1 = 0,02 \text{ с}$  становить  $u_2(t_1) = 186,5 \text{ В}$ . Струм в новому усталеному режимі  $i_{np} = 10 \text{ А}$ . Стала часу  $\tau = 0,01 \text{ с}$ . Визначити:

- 1) параметри котушок  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $R_2$ ,  $L_2$ ;
- 2) момент часу  $t_2$ , коли напруги на обох котушках зрівняються.

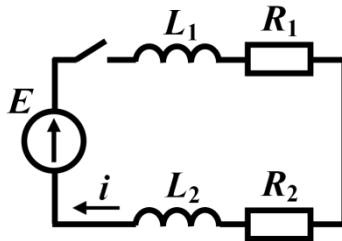


Рисунок 12.4

## Розв'язування

1. Диференціальне рівняння, що описує перехідний процес в колі, має вигляд

$$(L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i = E.$$

Його загальний розв'язок

$$i = i_{np} + i_g = 10 + Ae^{pt},$$

де  $p = -\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} = -100 \frac{1}{c}$ , оскільки  $|p| = \frac{1}{\tau}$ .

Примусову складову струму, як це видно з схеми рис. 12.4, можна розрахувати за співвідношенням

$$i_{np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{300}{R_1 + R_2},$$

звідки випливає  $R_1 + R_2 = 30$  Ом, а  $L_1 + L_2 = 0,3$  Гн.

Оскільки початкові умови є нульовими  $i(0_+) = i(0_-) = 0$ , то  $A = -10$  і  $i = 10 - 10e^{-100t}$  А.

З метою визначення параметрів котушок складемо ще два рівняння. Напряга на першій котушці становить

$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt} + R_1 i = 1000L_1 e^{-100t} + 10R_1 - 10R_1 e^{-100t}.$$

За умовою задачі ця напряга для моменту часу  $t = 0_+$  дорівнює 200 В, тому  $200 = 1000L_1$ , звідки  $L_1 = 0,2$  Гн, а  $L_2 = 0,1$  Гн.

Напряга другої котушки

$$u_2 = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i = 1000L_2 e^{-100t} + 10R_2 - 10R_2 e^{-100t}$$

і за умовою задачі для моменту  $t_1 = 0,02$  с має дорівнювати  $u_2(t_1) = 186,5$  В.

Таким чином,

$$186,5 = 100e^{-100 \cdot 0,02} + 10R_2 - 10R_2 e^{-100 \cdot 0,02}$$

або  $173 = 8,65R_2$ . Звідси  $R_2 = 20$  Ом,  $R_1 = 10$  Ом.

2. Напряги  $u_1$  і  $u_2$  в момент часу  $t_2$  стають рівними. Тобто у вказаний момент часу буде виконуватись рівність

$$1000L_1 e^{-100t_2} + 10R_1 - 10R_1 e^{-100t_2} = 1000L_2 e^{-100t_2} + 10R_2 - 10R_2 e^{-100t_2}.$$

Після підстановки відомих числових значень і нескладних математичних перетворень отримуємо  $200e^{-100t_2} = 100$ , звідки  $t_2 = 0,00693$  с.

Отже, напряга на котушках в цей момент часу дорівнюватиме

$$u_1 = u_2 = 200e^{-0,693} + 100 - 100e^{-0,693} = 150 \text{ В.}$$

**12.4** Трансформатор без осердя в режимі холостого ходу в момент часу  $t = 0$  підмикають до джерела синусоїдної напруги  $u_1 = 120\sin(314t - 75^\circ)$  В (рис. 12.5). Записати миттєве значення напруги  $u_2$ , якщо  $R = 20$  Ом,  $L_1 = 0,3$  Гн,  $L_2 = 0,5$  Гн,  $M = 0,3$  Гн.

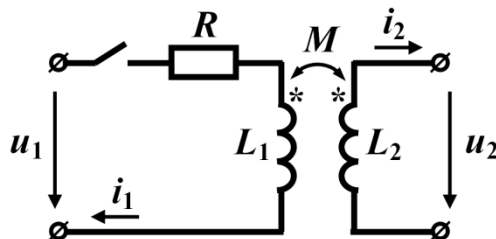


Рисунок 12.5

### Розв'язування

Перш ніж шукати вихідну напругу трансформатора, необхідно знайти струм в його первинному контурі.

Вторинні затискачі трансформатора розімкнуті (режим холостого ходу), внаслідок чого струм  $i_2$  дорівнює нулю. Тому складаємо одне рівняння для первинного контуру

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + Ri_1 = U_m \sin(\omega t + \beta).$$

Загальний розв'язок для струму  $i_1$  записується як сума примусової і вільної складових  $i_1 = i_{1np} + i_{1в}$ .

Примусову складову струму  $i_{1np}$  визначаємо, розглянувши коло в новому усталеному режимі. Ця складова є синусоїдною функцією

$$i_{1np} = I_m \sin(\omega t + \alpha),$$

де  $I_m = \frac{U_m}{Z_1}$ ,  $\alpha = \beta - \varphi$ , а  $Z_1 = \sqrt{R^2 + (\omega L_1)^2} = 96,3$  Ом,  $\varphi = \arctg \frac{\omega L_1}{R} = 78^\circ$ ,

$U_m = 120$  В,  $\beta = -75^\circ$ .

В кінцевому вигляді

$$i_{1np} = 1,246 \sin(\omega t - 153^\circ) \text{ А.}$$

Вільна складова  $i_{1в} = Ae^{pt}$ , де  $p = -\frac{R}{L_1} = -\frac{20}{0,3} = -66,67 \text{ с}^{-1}$  – корінь характе-

ристичного рівняння  $L_1 p + R = 0$ .

Отже, загальний розв'язок рівняння

$$i_1 = 1,246 \sin(\omega t - 153^\circ) + Ae^{-66,67t}.$$

Оскільки для  $t = 0$  струм  $i_1(0) = i_1(0_+) = i_1(0_-) = 0$ , стала інтегрування

$$A = -1,246 \sin(-153^\circ) = 0,566$$

і, таким чином,

$$i_1 = 1,246 \sin(\omega t - 153^\circ) + 0,566 e^{-66,67t} \text{ А.}$$

Напряга  $u_2$  на виході трансформатора з'являється тільки внаслідок взаємної індукції між індуктивностями  $L_1$  і  $L_2$ . Її можна визначити, враховуючи задані напрямки струмів (зустрічне вмикання), за формулою

$$\begin{aligned} u_2 &= -M \frac{di_1}{dt} = -0,3 \left[ 1,246 \omega \cos(\omega t - 153^\circ) + (-66,67) \cdot 0,566 e^{-66,67t} \right] = \\ &= 117,4 \sin(\omega t + 117^\circ) + 11,3 e^{-66,67t} \text{ В.} \end{aligned}$$

**12.5** В електричному колі (рис. 12.6, а) напруга джерела є синусоїдною  $u = U_m \sin(314t + \beta)$ . Перемикач  $K$  замикає контакт  $a$  в момент часу  $t = 0$ , коли напруга джерела становить 100 В, а через  $t_1 = 0,01$  с миттєво перемикається в положення  $b$ . Необхідно визначити, як буде змінюватися в часі напруга на ємності, якщо  $R_1 = R_2 = 50$  Ом,  $C = 100$  мкФ,  $U_m = 150$  В, а напруга на ємності до комутації дорівнювала  $U_0 = 40$  В.

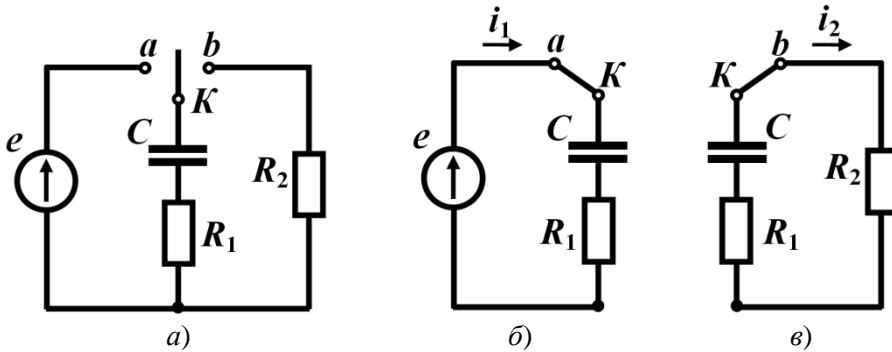


Рисунок 12.6

### Розв'язування

Напругу на ємності як функцію часу в даній задачі необхідно розраховувати для двох часових інтервалів:

- від моменту замикання ключем контакта  $a$  ( $t = 0$ ) до моменту перемикання ключа в положення  $b$  ( $t = t_1$ );
- від моменту замикання ключем контакта  $b$  до настання нового усталеного режиму ( $t \rightarrow \infty$ ).

1. Розглянемо перший інтервал  $0 < t < t_1$ .

Насамперед встановимо початкову фазу  $\beta$  прикладеної напруги. Оскільки для  $t = 0$  напруга  $u = 100$  В, тобто  $100 = 150 \sin \beta$ , то початкова фаза

$$\beta = \arcsin \frac{100}{150} = 41,8^\circ.$$

Тоді напруга джерела  $u = 150 \sin(\omega t + 41,8^\circ)$  В.

Після замикання ключа в положення  $a$  (рис. 12.6, б) перехідний процес в утвореному контурі описується диференціальним рівнянням

$$R_1 C \frac{du_C}{dt} + u_C = U_m \sin(\omega t + \beta).$$

Звернемо увагу на таку обставину. Незважаючи на те, що в даному контурі усталений режим так і не настає (оскільки в момент часу  $t = t_1$  ключ розриває контур), примусову складову напруги на ємності знайдемо з розрахунку усталеного режиму в цьому ж контурі.

З таких міркувань комплексна діюча примусова напруга на ємності

$$\underline{U}_{Cnp} = I_1 (-jX_C) = \frac{U}{R_1 - jX_C} (-jX_C) = 57 e^{-j15,7^\circ} \text{ В.}$$

Тоді її миттєве значення

$$u_{Cnp} = 80,6 \sin(\omega t - 15,7^\circ) \text{ В.}$$

Вільна складова  $u_{C\epsilon} = A e^{p_1 t}$ , де  $p_1 = -\frac{1}{R_1 C} = -200 \text{ c}^{-1}$  – корінь характеристичного рівняння  $R_1 C p + 1 = 0$ .

Таким чином, загальний розв'язок:

$$u_C = 80,6 \sin(\omega t - 15,7^\circ) + A e^{-200t}.$$

Постійну інтегрування визначаємо з початкових умов, застосувавши закон комутації. В момент часу  $t = 0$  напруга на ємності становить

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = U_0 = 40 \text{ В,}$$

тому маємо співвідношення

$$40 = 80,6 \sin(-15,7^\circ) + A,$$

звідки  $A = 61,8$  В.

Відтак напруга на ємності в досліджуваному інтервалі часу

$$u_C = 80,6 \sin(314t - 15,7^\circ) + 61,8 e^{-200t} \text{ В.}$$

2. Тепер розглянемо другий інтервал часу  $t > t_1$ .

В момент  $t_1$  відбувається відмикання джерела від ємності. На цей момент часу ємність виявилася зарядженою до напруги

$$u_C(t_1) = 80,6 \sin(314 \cdot 0,01 - 15,7^\circ) + 61,8 e^{-200 \cdot 0,01} = 30,2 \text{ В.}$$



Відтепер конденсатор починає розряджатися на два послідовно з'єднаних опори  $R_1$  і  $R_2$  (рис. 12.6, в). Цей процес описується диференціальним рівнянням

$$(R_1 + R_2)C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

В новому усталеному режимі напруга на ємності дорівнює нулю, примусова складова відсутня, тому розв'язок складається тільки з вільної складової

$$u_C = u_{Cв} = A_2 e^{p_2(t-t_1)},$$

де  $p_2 = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} = -100 \text{ с}^{-1}$  – корінь характеристичного рівняння

$$(R_1 + R_2)Cp + 1 = 0,$$

а в показнику степені експоненціальної функції замість змінної  $t$  записано  $t - t_1$ , оскільки перехідний процес в схемі рис. 12.6, в розпочинається із затримкою на відрізок часу  $t_1$ .

З початкової умови, а саме для  $t = t_1 = 0,01 \text{ с}$  напруга на ємності становить

$$u_C(t_{1+}) = u_C(t_{1-}) = u_C(t_1) = 30,2 \text{ В},$$

визначаємо постійну інтегрування  $A_2 = 30,2 \text{ В}$ .

Таким чином, розв'язок даної задачі

$$u_C(t) = \begin{cases} 80,6 \sin(314t - 15,7^\circ) + 61,8 e^{-200t} \text{ В}, & 0 < t < t_1, \\ 30,2 e^{-100(t-t_1)} \text{ В}, & t > t_1. \end{cases}$$

Графічна залежність  $u_C(t)$  наведена на рис. 12.7.

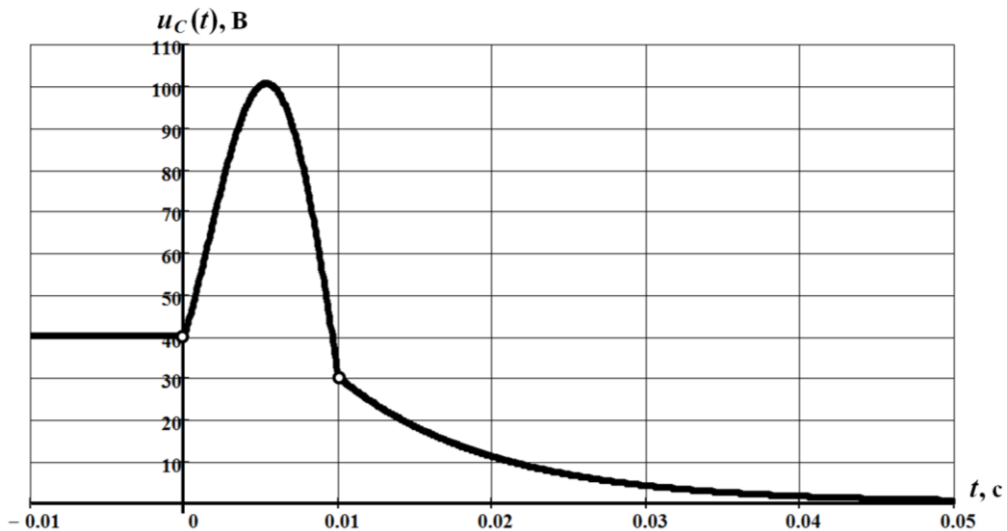


Рисунок 12.7

**12.6** Визначити струм  $i_1$  після комутації в електричному колі (рис. 12.8) з параметрами  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 30$  Ом,  $C = 200$  мкФ. Прикладена напруга  $U = 120$  В є постійною.

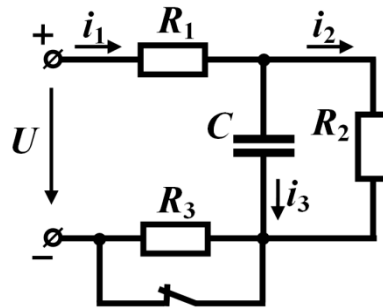


Рисунок 12.8

### Розв'язування

Для розрахунку перехідних процесів в розгалужених колах спочатку необхідно скласти систему рівнянь за законами Кірхгофа для *післякомутаційного* стану кола

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ (R_1 + R_3)i_1 + u_C = U, \\ u_C - R_2i_2 = 0, \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases}$$

Подібні задачі зазвичай можна розв'язувати у різний спосіб. Розглянемо кожен з них окремо.

1. Спершу визначимо напругу на ємності  $u_C(t)$ , використовуючи незалежну початкову умову, а потім відшукаємо  $i_1(t)$ .

З системи рівнянь виразимо струми  $i_1$ ,  $i_2$  та  $i_3$  через змінну  $u_C$ , щоб сформулювати відносно неї одне диференціальне рівняння.

З третього рівняння системи маємо  $i_2 = \frac{u_C}{R_2}$ .

Оскільки струм  $i_3 = C \frac{du_C}{dt}$ , то з першого рівняння отримаємо

$$i_1 = \frac{u_C}{R_2} + C \frac{du_C}{dt}.$$

Підставимо значення струму  $i_1$  в друге рівняння системи і отримуємо

$$\frac{(R_1 + R_3)}{R_2} u_C + (R_1 + R_3) C \frac{du_C}{dt} + u_C = U$$

або

$$(R_1 + R_3) C \frac{du_C}{dt} + \left(1 + \frac{R_1 + R_3}{R_2}\right) u_C = U .$$

Як наслідок, отримуємо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Підставимо в нього числові значення

$$8 \cdot 10^{-3} \frac{du_C}{dt} + 3u_C = 120$$

і запишемо загальний розв'язок рівняння

$$u_C = u_{Cnp} + u_{C\epsilon} .$$

Примусову складову знайдемо, розрахувавши коло в новому усталеному режимі. Для більшої наочності наведемо схему після перехідного процесу (рис. 12.9, а), враховуючи, що за постійної напруги опір ємності нескінченно великий. З цієї схеми видно, що

$$u_{Cnp} = i_{2np} R_2 \quad u_{Cnp} = i_{2np} R_2 ,$$

а

$$i_{2np} = i_{1np} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{120}{60} = 2 \text{ A} ,$$

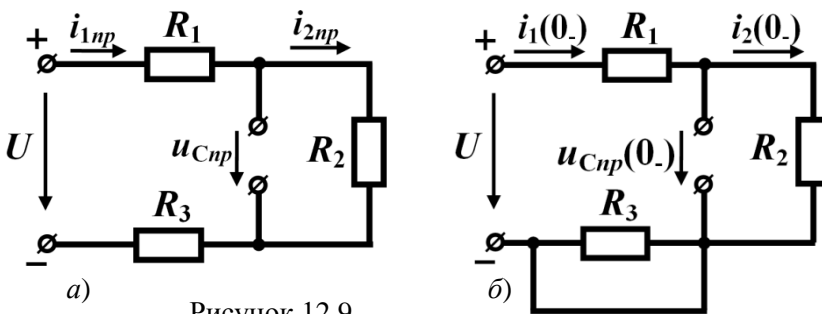
тому примусова складова напруги становить  $u_{Cnp} = 40 \text{ В}$ .

Вільна складова напруги для кола першого порядку  $u_{C\epsilon} = A_1 e^{pt}$ . Характеристичне рівняння

$$8 \cdot 10^3 p + 3 = 0 ,$$

звідки його корінь  $p = -375 \text{ с}^{-1}$ .

Отже, напруга на ємності  $u_C = 40 + A_1 e^{-375t}$ .



Закон комутації стверджує, що в момент часу  $t = 0$

$$u_C(0) = u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Напругу на ємності безпосередньо перед комутацією  $u_C(0_-)$  визначимо за допомогою докомутаційної схеми, зображеної на рис. 12.9, б. З цієї схеми видно, що напруга

$$u_C(0_-) = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} = 80 \text{ В.}$$

Підставимо початкову умову в загальний розв'язок для моменту часу  $t = 0$  і отримаємо  $80 = 40 + A_1$ , звідки стала інтегрування  $A_1 = 40 \text{ В.}$

Отже, напруга на ємності під час перехідного процесу змінюється за законом

$$u_C = 40 + 40e^{-375t} \text{ В.}$$

Струм  $i_1$  знаходимо із співвідношення

$$i_1 = \frac{u_C}{R_2} + C \frac{du_C}{dt}$$

або

$$i_1 = 2 + 2e^{-375t} + 200 \cdot 10^{-6} \frac{d}{dt}(40 + 40e^{-375t}) = 2 - e^{-375t} \text{ А.}$$

2. У випадку розв'язування задачі у вищенаведений спосіб із безпосереднім застосуванням *незалежної* початкової умови, доводиться виконувати додаткову роботу – спочатку знаходити напругу на ємності, а вже потім визначати шукану величину – струм  $i_1$ .

Розглянемо спосіб, де за допомогою *залежної* початкової умови шукану змінну можна розрахувати одразу.

Скористаємося вихідною системою рівнянь і виразимо всі змінні через шуканий струм  $i_1$ . Так, з другого рівняння системи маємо

$$u_C = U - (R_1 + R_3)i_1,$$

з третього –

$$i_2 = \frac{u_C}{R_2} = \frac{U}{R_2} - \frac{R_1 + R_3}{R_2}i_1,$$

а з четвертого –

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = -C(R_1 + R_3) \frac{di_1}{dt}.$$

Підставимо отримані значення струмів в перше рівняння системи. Тоді

$$i_1 = \frac{U}{R_2} - \frac{R_1 + R_3}{R_2}i_1 - C(R_1 + R_3) \frac{di_1}{dt}$$

і після нескладних перетворень отримуємо диференціальне рівняння, складене відносно струму  $i_1$

$$C(R_1 + R_3) \frac{di_1}{dt} + \left(1 + \frac{R_1 + R_3}{R_2}\right) i_1 = \frac{U}{R_2}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння

$$i_1 = i_{1np} + i_{1\epsilon}.$$

Примусову складову було визначено в пункті 1 і вона дорівнює  $i_{1np} = 2$  А.

Вільна складова диференціального рівняння 1-го порядку  $i_{1\epsilon} = A_2 e^{pt}$ , де  $p = -375 \text{ с}^{-1}$  – корінь характеристичного рівняння, який є таким же, як і для напруги  $u_C$ . До речі, звернемо увагу на те, що для всіх змінних одного й того ж кола і характеристичне рівняння, і його корені є однаковими.

Відтак для шуканого струму маємо  $i_1 = 2 + A_2 e^{-375t}$ .

Наступним етапом є розрахунок сталої інтегрування через *залежну* початкову умову, оскільки відносно струму  $i_1$  жодний із законів комутації не діє. Залежні початкові умови зазвичай визначають з вихідної системи рівнянь, записаної для моменту часу  $t = 0_+$  і доповненої законами комутації. Для розв'язування даної задачі достатньо перших трьох рівнянь, які набувають вигляду

$$\begin{cases} i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+), \\ (R_1 + R_3)i_1(0_+) + u_C(0_+) = U, \\ u_C(0_+) - R_2 i_2(0_+) = 0. \end{cases}$$

Якщо тільки доповнити цю систему законом комутації

$$u_C(0) = u_C(0_+) = u_C(0_-) = 80 \text{ В},$$

з'являється можливість розрахувати будь-яку залежну початкову умову.

Дійсно, з другого рівняння системи маємо

$$i_1(0_+) = \frac{U - u_C(0_+)}{R_1 + R_3} = 1 \text{ А},$$

з третього –  $i_2(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_2} = 4$  А, а з першого –  $i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = -3$  А.

Підставимо залежну початкову умову в загальне рівняння для струму  $i_1$  і знайдемо значення  $A_2 = -1$  А.

Таким чином, шуканий струм

$$i_1 = 2 - e^{-375t} \text{ А}.$$

3. Процес формування одного диференціального рівняння з системи рівнянь не завжди є простим і тому виникає питання щодо доцільності такої процедури. Якщо уважно проаналізувати етапи розв'язування задачі, то можна помітити, що диференціальне рівняння необхідне тільки для запису характеристичного рівняння. Але останнє може бути отримане і у інший спосіб, зокрема методом вхідного

опору. Суть *методу вхідного опору* полягає в тому, що для післякомутаційного стану кола визначають його комплексний вхідний опір для синусоїдного струму, після чого в отриманому виразі змінюють  $j\omega$  на  $p$  і перетворюють його таким чином, щоб звести до відношення двох поліномів від змінної  $p$ . Після того чисельник виразу прирівнюють до нуля. Отримане співвідношення і буде характеристичним рівнянням заданого кола.

Отже, якщо уявити, що на вхід кола (рис. 12.8) подається синусоїдна напруга, то його комплексним вхідним опором буде

$$\underline{Z}(j\omega) = R_1 + R_3 + \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Замінімо  $j\omega$  на  $p$ . У зв'язку з цим звертаємо увагу, що під час знаходження комплексного опору доцільно уявну одиницю  $j$  і частоту  $\omega$  не відокремлювати, а записувати разом. Після проведеної заміни отриманий вираз перетворюємо до вигляду відношення двох поліномів

$$Z(p) = R_1 + R_3 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{(R_1 + R_3)R_2 Cp + R_1 + R_3 + R_2}{R_2 Cp + 1}.$$

Прирівнюємо чисельник до нуля і у такий спосіб отримуємо характеристичне рівняння для заданого кола

$$(R_1 + R_3)R_2 Cp + R_1 + R_3 + R_2 = 0,$$

що дозволяє розрахувати його корені.

**12.7** В електричному колі (рис. 12.10) необхідно знайти струм  $i_3$  після комутації. Відомо, що вхідна напруга постійна  $U = 100\text{В}$ , а  $R_1 = 10\text{ Ом}$ ,  $R_3 = 40\text{ Ом}$ ,  $C = 250\text{ мкФ}$ ,  $L = 0,1\text{ Гн}$ .

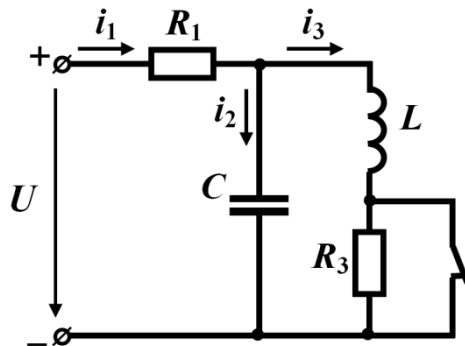


Рисунок 12.10

### Розв'язування

Складаємо систему рівнянь для післякомутаційного стану кола за законами Кірхгофа

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ u_C - R_3 i_3 - L \frac{di_3}{dt} = 0, \\ R_1 i_1 + L \frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 = U, \\ i_2 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases} \quad (12.1)$$

Дану задачу розв'яжемо двома способами.

1. В першому випадку використаємо лише незалежні початкові умови. Для цього складемо диференціальне рівняння відносно струму  $i_3$ , виразивши за допомогою вихідної системи (12.1) всі інші змінні через цей струм

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{U}{R_1} - \frac{L}{R_1} \frac{di_3}{dt} - \frac{R_3 i_3}{R_1}, \\ u_C &= L \frac{di_3}{dt} + R_3 i_3, \\ i_2 &= C \frac{du_C}{dt} = CL \frac{d^2 i_3}{dt^2} + CR_3 \frac{di_3}{dt}. \end{aligned}$$

Підставимо отримані значення змінних в перше рівняння системи (12.1)

$$\frac{U}{R_1} - \frac{L}{R_1} \frac{di_3}{dt} - \frac{R_3 i_3}{R_1} = CL \frac{d^2 i_3}{dt^2} + CR_3 \frac{di_3}{dt} + i_3.$$

Після нескладних перетворень отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння *другого порядку*

$$CL \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \left( CR_3 + \frac{L}{R_1} \right) \frac{di_3}{dt} + \left( 1 + \frac{R_3}{R_1} \right) i_3 = \frac{U}{R_1}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння, як і в попередніх задачах, також подаємо у вигляді

$$i_3 = i_{3np} + i_{3e}.$$

Примусову складову знайдемо з розрахунку нового усталеного режиму заданого кола (рис. 12.11, а).

В схемі враховано, що за постійної напруги опір ємності дорівнює нескінченності, а опір індуктивності постійному струму – нулю. Як видно з схеми, примусова складова струму

$$i_{3np} = \frac{U}{R_1 + R_3} = \frac{100}{50} = 2 \text{ А.}$$

Якщо перехідний процес в колі описується диференціальним рівнянням дру-

ного порядку, то перш ніж записувати вільну складову, необхідно скласти характеристичне рівняння і відшукати його корені, оскільки форма запису вільної складової залежить від їх виду. Можливі три випадки:

- корені є комплексно спряженими  $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$  і тоді вільна складова записується у вигляді

$$x_e = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t);$$

- корені дійсні різні  $p_1 < 0$  і  $p_2 < 0$ , тоді вільна складова

$$x_e = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

- корені є дійсними, але однаковими  $p_1 = p_2 = p < 0$ , тоді

$$x_e = (A_1 + A_2 t) e^{p t}.$$

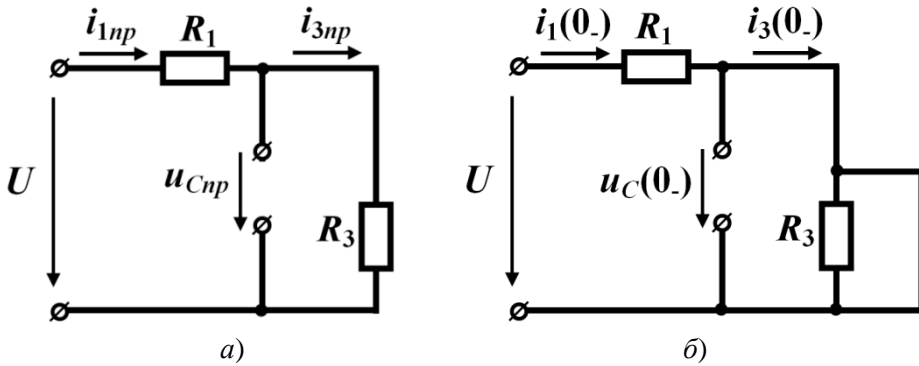


Рисунок 12.11

Складемо характеристичне рівняння

$$CLp^2 + \left( CR_3 + \frac{L}{R_1} \right) p + \left( 1 + \frac{R_3}{R_1} \right) = 0,$$

підставимо числові значення

$$25 \cdot 10^{-6} p^2 + 0,02 p + 5 = 0$$

та знайдемо його корені

$$p_1 = -400 + j200 \text{ c}^{-1}, \quad p_2 = -400 - j200 \text{ c}^{-1}.$$

Отже, в нашому випадку корені є комплексно-спряженими  $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ , де  $\delta = 400 \text{ c}^{-1}$ , а  $\omega_0 = 200 \text{ c}^{-1}$ .

Здійснимо перевірку, склавши характеристичне рівняння ще й методом вхідного опору:

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = R_1 + \frac{(R_3 + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R_3 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$



Замінімо  $j\omega$  на  $p$ :

$$Z_{\text{ex}}(p) = R_1 + \frac{(R_3 + pL) \frac{1}{pC}}{R_3 + pL + \frac{1}{pC}}$$

і зведемо до вигляду відношення двох поліномів

$$Z_{\text{ex}}(p) = \frac{R_1 L C p^2 + (R_1 R_3 C + L) p + R_1 + R_3}{L C p^2 + R_3 C p + 1}.$$

Якщо прирівняти чисельник до нуля і поділити обидві частини на  $R_1$ , то маємо характеристичне рівняння в такому ж вигляді, що і попереднє.

За комплексних коренів вільною складовою струму буде

$$i_{3e} = e^{-400t} (A_1 \sin 200t + A_2 \cos 200t).$$

Тоді для загального розв'язку маємо

$$i_3 = 2 + e^{-400t} (A_1 \sin 200t + A_2 \cos 200t).$$

Для визначення сталих інтегрування використаємо першу незалежну початкову умову, яку розрахуємо за допомогою схеми, складеної для докомутаційного стану кола (див. рис. 12.11, б) та скористаємось законом комутації відносно струму через індуктивність. Отже, для моменту  $t = 0$  струм в індуктивності

$$i_3(0_+) = i_3(0) = i_3(0_-) = \frac{U}{R_1} = 10 \text{ А}.$$

Цю початкову умову підставимо в загальний розв'язок, звідки отримаємо  $A_2 = 8 \text{ А}$ . Для знаходження іншої сталої інтегрування, скористаємось другою незалежною початковою умовою, яка пов'язана з напругою на ємності. Оскільки дана напруга підпорядковується закону комутації, то для моменту часу  $t = 0$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = 0,$$

як це і видно із схеми. Однак, щоб можна було цю початкову умову застосувати для визначення  $A_1$ , необхідно попередньо виразити  $u_C$  через шукані сталі інтегрування. Вище було доведено, що напруга

$$u_C = L \frac{di_3}{dt} + R_3 i_3.$$

Підставимо в цей вираз загальний розв'язок струму  $i_3$  та отримаємо:

$$\begin{aligned} u_C = & 0,1 \frac{d}{dt} \left[ 2 + e^{-400t} (A_1 \sin 200t + 8 \cos 200t) \right] + 40 \left[ 2 + e^{-400t} \times \right. \\ & \left. \times (A_1 \sin 200t + 8 \cos 200t) \right] = -40 e^{-400t} (A_1 \sin 200t + 8 \cos 200t) + \\ & + e^{-400t} (20 A_1 \cos 200t - 160 \sin 200t) + 40 \left[ 2 + e^{-400t} \times \right. \\ & \left. \times (A_1 \sin 200t + 8 \cos 200t) \right]. \end{aligned}$$

Перепишемо формулу для моменту часу  $t = 0$  і використаємо початкову

умову

$$0 = -320 + 20A_1 + 80 + 320,$$

звідки отримуємо  $A_1 = -4$  А.

Отже, для струму  $i_3$  остаточно маємо

$$i_3 = 2 + e^{-400t} (-4 \sin 200t + 8 \cos 200t) \text{ А.}$$

2. Інколи замість другої незалежної початкової умови виявляється більш зручно скористатися *залежною* початковою умовою, а саме, значенням похідної струму  $i_3$  для моменту  $t = 0_+$ . З цією метою використаємо друге рівняння вихідної системи, з якого отримаємо:

$$\left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{u_C(0_+)}{L} - \frac{R_3 i_3(0_+)}{L} = -4000 \frac{\text{А}}{\text{с}}.$$

Загальний розв'язок струму  $i_3$  з поки що невідомою сталою інтегрування  $A_1$  продиференціюємо за часом

$$\begin{aligned} \frac{di_3}{dt} = & -400e^{-400t} (A_1 \sin 200t + 8 \cos 200t) + e^{-400t} \times \\ & \times (200A_1 \cos 200t - 1600 \sin 200t). \end{aligned}$$

Перепишемо це рівняння для моменту часу  $t = 0_+$  і підставимо отриману вище залежну початкову умову  $\left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0_+}$ .

Тоді

$$-4000 = -3200 + 200A_1,$$

звідки  $A_1 = -4$  А.

**12.8** В колі (рис. 12.12) розрахувати значення опору  $R_3$ , за якого перехідний процес носитиме критичний характер, якщо  $R_2 = 20$  Ом,  $C = 250$  мкФ,  $L = 0,2$  Гн.

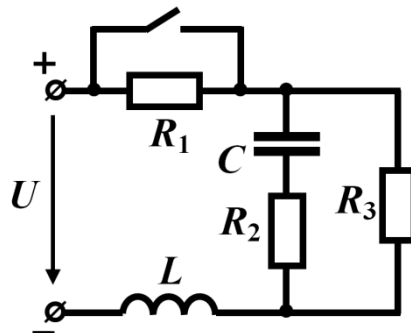


Рисунок 12.12

### Розв'язування

Критичним або граничним режимом називають режим, який виникає в колі у випадку, коли перехідний процес описується диференціальним рівнянням другого порядку з дійсними від'ємними рівними один одному коренями характеристичного рівняння.

Тому для розв'язування даної задачі необхідно скласти (у будь-який спосіб) характеристичне рівняння, прирівняти його дискримінант до нуля і з отриманого рівняння визначити шукану величину.

Отже, в першу чергу складемо характеристичне рівняння. Для цього скористаємося методом вхідного опору

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = j\omega L + \frac{\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C}\right)R_3}{R_2 + \frac{1}{j\omega C} + R_3},$$

$$Z_{\text{вх}}(p) = pL + \frac{\left(R_2 + \frac{1}{pC}\right)R_3}{R_2 + \frac{1}{pC} + R_3} = \frac{(R_2 + R_3)LCp^2 + (L + R_2R_3C)p + R_3}{(R_2 + R_3)Cp + 1},$$

звідки характеристичне рівняння

$$(R_2 + R_3)LCp^2 + (L + R_2R_3C)p + R_3 = 0.$$

Його дискримінант

$$D = (L + R_2R_3C)^2 - 4(R_2 + R_3)LCR_3$$

прирівняємо до нуля, внаслідок чого отримаємо рівняння, складене відносно  $R_3$ ,

$$(R_2^2C - 4L)CR_3^2 - 2R_2LCR_3 + L^2 = 0.$$

Після підстановки числових значень отримаємо рівняння

$$1,75 \cdot 10^{-4} R_3^2 + 2 \cdot 10^{-3} R_3 - 0,04 = 0.$$

Єдиним фізично існуючим розв'язком цього квадратного рівняння є опір  $R_3$ , значення якого становить  $R_3 = 10,45 \text{ Ом}$ .

**12.9** В колі (рис. 12.13) в момент  $t = 0$  ключ  $K$  миттєво перемикається з точки  $a$  в точку  $b$ . Параметри кола:  $E = 200 \text{ В}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 250 \text{ Ом}$ ,  $C_1 = 50 \text{ мкФ}$ ,  $C_2 = 200 \text{ мкФ}$ . До комутації ємність  $C_2$  була заряджена до напруги  $100 \text{ В}$ . Визначити напруги  $u_{C1}(t)$  і  $u_{C2}(t)$ , а також розрахувати кількість енергії в електричних полях конденсаторів до комутації та в новому усталеному режимі і переконатися, що різниця цих енергій відповідає втратам енергії на опорі  $R_2$ . Розрахунок виконати для двох випадків, в першому з яких полярність напруги на ємності  $C_2$  до комутації відповідає полярності, показаній на рисунку (див. рис. 12.13), а в другому – їй протилежна.

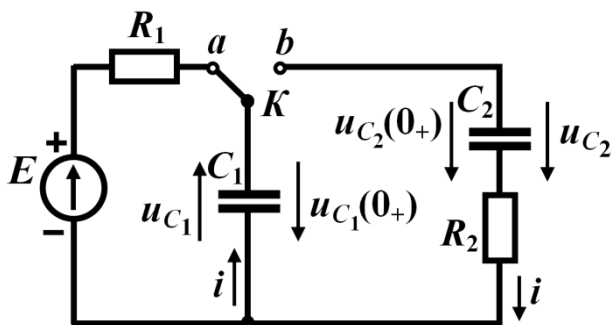


Рисунок 12.13

### Розв'язування

Перш за все відзначимо, що напруга на ємності  $C_1$  до комутації дорівнює напрузі джерела  $u_{C1}(0_-) = 200$  В.

Розв'язування подібних задач потребує надзвичайно уважного і чіткого узгодження напрямів струмів і напруг. Так, напрямки миттєвих значень напруг на ємностях після комутації мають обов'язково збігатися з заданими напрямками струмів через них. В цьому випадку компонентні співвідношення записуються в звичній формі

$$u_{C1} = \frac{1}{C_1} \int idt, \quad u_{C2} = \frac{1}{C_2} \int idt.$$

1. Запишемо для контуру, утвореного після перемикання ключа, рівняння за другим законом Кірхгофа

$$R_2 i + u_{C1} + u_{C2} = 0.$$

В отриманому рівнянні присутні три невідомі функції:  $i(t)$ ,  $u_{C1}(t)$ ,  $u_{C2}(t)$ . Тому цю задачу зручніше розв'язувати відносно струму, для чого підставимо в попереднє рівняння компонентні співвідношення

$$R_2 i + \frac{1}{C_1} \int idt + \frac{1}{C_2} \int idt = 0.$$

Щоб позбутися інтегралів, продиференціюємо це рівняння, внаслідок чого отримаємо однорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$R_2 \frac{di}{dt} + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i = 0.$$

Якщо права частина рівняння дорівнює нулю, то примусова складова буде відсутньою, тому загальний розв'язок складається лише з однієї вільної складової

$$i = Ae^{pt},$$

де  $p = -\frac{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}{R_2} = -100 \text{ c}^{-1}$  – корінь характеристичного рівняння

$$R_2 p + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 0.$$

Сталу інтегрування  $A$  визначасмо з початкової умови. Хоча струм  $i$  не підпорядковується закону комутації, його значення для  $t = 0_+$  легко відшукати як залежну початкову умову. Складемо для цього моменту часу рівняння за другим законом Кірхгофа, враховуючи напрямки напруг на ємностях

$$-u_{C1}(0_+) + u_{C2}(0_+) + R_2 i(0_+) = 0.$$

Напруги на ємностях підпорядковані закону комутації, тому  $u_{C1}(0_+) = 200 \text{ В}$ ,  $u_{C2}(0_+) = 100 \text{ В}$ , звідки  $i(0_+) = 0,4 \text{ А}$ .

Якщо підставити початкову умову в загальний розв'язок, то для сталої інтегрування отримаємо  $A = 0,4$  і струм в колі під час перехідного процесу буде дорівнювати

$$i(t) = 0,4 e^{-100t} \text{ А}.$$

Тепер знайдемо напруги на ємностях. Для цього скористасмося компонентними співвідношеннями, пам'ятаючи, що під час взяття невизначеного інтеграла з'являються сталі інтегрування. Відтак маємо

$$u_{C1} = \frac{1}{C_1} \int idt = \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} \int 0,4 e^{-100t} dt = -80 e^{-100t} + A_1,$$

де сталу інтегрування  $A_1$  знайдемо з початкової умови  $u_{C1}(0) = -200 \text{ В}$ . Знак “мінус” з'явився через те, що  $u_{C1}(0)$  спрямована протилежно миттєвій напрузі  $u_{C1}$  (див. рис. 12.13). Таким чином,  $A_1 = -120$  і тоді напруга на ємності  $C_1$

$$u_{C1} = -(120 + 80 e^{-100t}) \text{ В}.$$

Напруга на ємності  $C_2$

$$u_{C2} = \frac{1}{C_2} \int idt = -20 e^{-100t} + A_2.$$

В момент часу  $t = 0$   $u_{C2}(0) = 100 \text{ В}$ , через що стала інтегрування  $A_2 = 120 \text{ В}$ . Тоді напруга на ємності

$$u_{C2} = 120 - 20 e^{-100t} \text{ В}.$$

Відзначимо, що в новому усталеному режимі ( $t = \infty$ ) напруги на обох ємностях за модулем є однаковими і дорівнюють

$$|u_{C1np}| = |u_{C2np}| = 120 \text{ В}.$$

Таким чином, під час перехідного процесу напруга на ємності  $C_1$  зменшила-

ся до 120 В, а напруга ємності  $C_2$  зростає до такого ж значення.

Слід зазначити, що отриманий результат можливий лише за умови ідеальних ємностей, процес саморозряду в яких відсутній.

Дослідимо енергетичні співвідношення.

Сумарна енергія, зосереджена в електричних полях обох ємностей, до комутації складала

$$W_1 = \frac{C_1 u_{C1}^2(0)}{2} + \frac{C_2 u_{C2}^2(0)}{2} = 2 \text{ Дж},$$

а після комутації в новому усталеному режимі становитиме

$$W_2 = \frac{C_1 u_{C1np}^2}{2} + \frac{C_2 u_{C2np}^2}{2} = 1,8 \text{ Дж}.$$

Тобто спільна енергія обох ємностей під час перехідного процесу має зменшилось на  $\Delta W = 0,2 \text{ Дж}$ .

Тепер визначимо кількість електричної енергії, що протягом всього часу, поки триває перехідний процес, перетворюється на опорі  $R_2$  в тепло

$$W_3 = \int_0^{\infty} R_2 i^2 dt = \int_0^{\infty} 250 \cdot 0,4^2 \cdot e^{-200t} dt = 0,2 \text{ Дж}.$$

Як бачимо,  $\Delta W = W_3$ .

2. Другий випадок відрізняється від першого тільки тим, що зазнає зміни знак напруги  $u_{C2}(0_+)$ , тому не будемо докладно розглядати хід розв'язування цієї частини задачі, а лише запишемо остаточний результат:

$$\begin{aligned} i &= 1,2e^{-100t} \text{ А}, \\ u_{C1}(t) &= 40 - 240e^{-100t} \text{ В}, \\ u_{C2}(t) &= -(40 + 80e^{-100t}) \text{ В}, \\ \Delta W &= W_3 = 1,8 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

**12.10** В електричному колі (рис. 12.14, а) ключ  $K_2$  перебуває в замкнутому стані, а ключ  $K_1$  – розімкнутому. В момент часу  $t = 0$  замикається перший ключ  $K_1$ , а через час  $t_1 = 0,75\tau_1$  розмикається другий ключ  $K_2$ , де  $\tau_1$  – стала часу кола, яке утворюється після замикання ключа  $K_1$ . Коло під'єднане до джерела постійної напруги  $U = 200 \text{ В}$ . Параметри кола такі:  $R_1 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ . Ємність на момент замикання ключа  $K_1$  була розрядженою. Необхідно визначити:

1) значення індуктивності  $L$ , за якої в колі на першому проміжку часу  $0 < t < t_1$  матиме місце критичний режим перехідного процесу;

2) струм в ємності протягом всієї тривалості перехідного процесу.

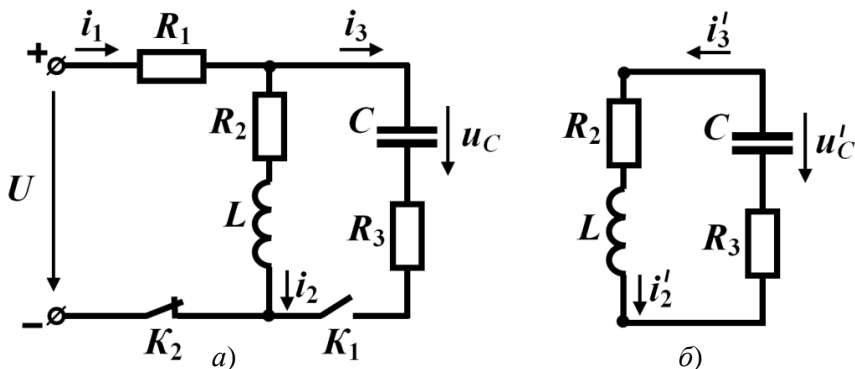


Рисунок 12.14

### Розв'язування

1. Для розрахунку індуктивності  $L$  складемо характеристичне рівняння за методом вхідного опору

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L) \left( R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_2 + j\omega L + R_3 + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Після заміни  $j\omega$  на  $p$  і деяких простих перетворень отримаємо

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{(R_1 + R_3)LCp^2 + [(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)C + L]p + R_1 + R_2}{LCp^2 + (R_2 + R_3)Cp + 1},$$

звідки характеристичне рівняння

$$(R_1 + R_3)LCp^2 + [(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)C + L]p + R_1 + R_2 = 0.$$

Підставимо числові значення параметрів елементів, відшукаємо дискримінант і прирівняємо його до нуля

$$(0,11 + L)^2 - 4 \cdot 200 \cdot 10^{-3} L = 0.$$

Розв'язками цього квадратного, складеного відносно  $L$ , рівняння будуть два значення:  $L_1 = 0,558$  Гн та  $L_2 = 0,0217$  Гн. За першого значення корені характеристичного рівняння  $p_1 = p_2 = p = -150 \text{ с}^{-1}$ , а за другого  $p_1 = p_2 = p = -759 \text{ с}^{-1}$ .

2. Розрахуємо перехідний процес для значення індуктивності  $L_1$  на часовому проміжку  $0 < t < t_1$ , коли обидва ключі замкнено.

Розв'язувати задачу будемо відносно змінної  $u_C$ , оскільки ця змінна, по-перше, безпосередньо підпорядковується закону комутації, а, по-друге, через неї нескладно визначити електричний струм в ємності.

Отже, складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 + L_1 \frac{di_2}{dt} = U, \\ R_1 i_1 + u_C + R_3 i_3 = U, \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases}$$

Через те, що корені характеристичного рівняння вже визначено, потреби у диференціальному рівнянні немає, тому відразу запишемо вільну складову для рівних коренів

$$u_{C\theta} = (A_1 + A_2 t) e^{pt}.$$

Тепер визначимо примусову складову напруги на ємності. Як видно з схеми (рис. 12.14, а),

$$u_{Cnp} = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} = 80 \text{ В.}$$

Отже, загальний розв'язок

$$u_C = 80 + (A_1 + A_2 t) e^{pt}.$$

Запишемо першу початкову умову. Оскільки за умовою задачі конденсатор не був заряджений,

$$u_C(0) = u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.$$

Якщо підставити цю початкову умову в загальний розв'язок (для моменту часу  $t = 0$ ) отримаємо, що  $A_1 = -80$ .

Для можливості застосування другої початкової умови, тобто значення струму  $i_2(0)$ , необхідно цей струм виразити через напругу  $u_C$  таким чином, щоб до отриманого співвідношення входили шукані сталі інтегрування. Для цієї мети використаємо вихідну систему диференціальних рівнянь.

З першого рівняння системи маємо  $i_2 = i_1 - i_3$ , з четвертого –  $i_3 = C \frac{du_C}{dt}$ , а з третього –  $i_1 = \frac{U}{R_1} - \frac{u_C}{R_1} - \frac{R_3 C}{R_1} \frac{du_C}{dt}$ .

Підставимо ці значення до виразу струму  $i_2$  і отримаємо

$$i_2 = \frac{U}{R_1} - \frac{u_C}{R_1} - \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) C \frac{du_C}{dt}.$$

В це рівняння замість  $u_C$  підставимо її загальний розв'язок. Відтак

$$i_2 = \frac{U}{R_1} - \frac{80 + (A_1 + A_2 t) e^{pt}}{R_1} - \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) C \left[ p e^{pt} (A_1 + A_2 t) + A_2 e^{pt} \right]. \quad (12.2)$$

Струм  $i_2$  протікає в індуктивності і підпорядковується закону комутації, тому початкове значення цього струму, як це видно з докомутаційного стану схеми



(рис. 12.14, а), дорівнює

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = i_2(0) = \frac{U}{R_1 + R_2} = 4 \text{ А.}$$

Підставляємо до формули (12.2) для моменту часу  $t=0$  числові значення всіх відомих величин і отримуємо

$$4 = \frac{200}{30} - \frac{80 + (-80)}{30} - \left(1 + \frac{10}{30}\right) \cdot 100 \cdot 10^{-6} [-150(-80) + A_2],$$

звідки  $A_2 = -8000$ .

Для часового проміжку  $0 < t < t_1$  напруга на ємності

$$u_C = 80 - (80 - 8000t)e^{-150t} \text{ В,}$$

а струм через неї

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = (2 - 120t)e^{-150t} \text{ А.}$$

Струм в індуктивності визначимо за виразом (12.2), для чого підставимо в цю формулу значення параметрів і сталих інтегрування

$$i_2 = \frac{200}{30} - \frac{80 - (80 + 4000t)e^{-300t}}{30} - \left(1 + \frac{10}{30}\right) \cdot 10^{-4} \cdot [-150e^{-150t}(-80 + 8000t) + 8000e^{-150t}] \text{ А.}$$

Після арифметичних підрахунків остаточно отримуємо:

$$i_2 = 4 - 106,7te^{-150t} \text{ А.}$$

Аналогічно розв'язується задача і для індуктивності  $L_2$ .

3. Розглянемо проміжок часу  $t > t_1$  після розмикання другого ключа. Розімкнутий ключ ізолює коло від джерела живлення (див. рис. 12.14, б), внаслідок чого перехідний процес в цьому колі відбувається за рахунок перетворення накопиченої в полях реактивних елементів електромагнітної енергії в тепло, яке виділяється на активних опорах.

Розрахуємо час  $t_1$ . Оскільки стала часу  $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{150}$  с, то  $t_1 = 0,75\tau = 0,005$  с.

Звертаємо увагу на дві обставини:

- струм в індуктивності  $i_2'$  відповідно до закону комутації не змінює свого напрямку, в той час як напрямок струму через ємність  $i_3'$  такої зміни зазнає, тому в цій схемі виконується рівність  $i_2' = i_3'$ ;

- миттєве значення напруги на ємності спрямоване назустріч струму, через що вони пов'язані співвідношенням  $i_3' = -C \frac{du_C'}{dt}$ .

Для новоутвореного одноконтурного кола (див. рис. 12.14, б) складемо рів-

няння за другим законом Кірхгофа

$$u'_C - (R_2 + R_3)i'_2 - L \frac{di'_2}{dt} = 0$$

і підставимо до нього замість струму  $i'_2$  його значення, виражене через напругу  $u'_C$ , а саме  $i'_2 = i'_3 = -C \frac{du'_C}{dt}$ . Отримане рівняння

$$LC \frac{d^2 u'_C}{dt^2} + (R_2 + R_3)C \frac{du'_C}{dt} + u'_C = 0$$

є диференціальним рівнянням, яке описує перехідний процес відносно напруги на ємності.

Це рівняння є однорідним, тому примусова складова напруги на ємності відсутня, а загальний розв'язок подано тільки вільною складовою. Щоб її записати, складемо з отриманого диференціального рівняння характеристичне рівняння і розв'яжемо його. Тоді

$$LCp^2 + (R_2 + R_3)Cp + 1 = 0,$$

після підстановки числових значень

$$0,558 \cdot 10^{-4} p^2 + 3 \cdot 10^{-3} p + 1 = 0.$$

Корені цього характеристичного рівняння будуть комплексно-спряженими. Вони дорівнюють  $p_1 = -27 + j131 \text{ c}^{-1}$ ,  $p_2 = -27 - j131 \text{ c}^{-1}$ .

Загальний розв'язок запишемо з урахуванням того, що в цій схемі перехідний процес розпочався в момент часу  $t_1$ , тому

$$u'_C = e^{-27(t-t_1)} [A_1 \sin 131(t-t_1) + A_2 \cos 131(t-t_1)].$$

Визначимо першу початкову умову – значення напруги на ємності в момент часу  $t = t_1$ . За законом комутації напруга на ємності в першу мить після комутації  $u'_C(t_{1+})$  дорівнює напрузі в момент часу, що передує комутації  $t_{1-}$ , тобто напрузі на ємності в момент  $t_1$  попереднього перехідного процесу, тобто

$$u_C(t_{1-}) = 80 - (80 - 8000 \cdot 0,005)e^{-150 \times 0,005} = 61,1 \text{ В.}$$

Звідки на підставі закону комутації  $u'_C(t_{1+}) = 61,1 \text{ В}$ .

Підставляємо цю початкову умову в загальний розв'язок для  $u'_C$  і отримуємо  $A_2 = 61,1$ .

Другу початкову умову розраховуємо для струму через індуктивність для моменту  $t = t_1$  попереднього перехідного процесу

$$i_2(t_{1-}) = i'_2(t_{1+}) = 4 - 106,7 \cdot 0,005e^{-150 \times 0,005} = 3,75 \text{ А.}$$

Щоб скористатися цією початковою умовою, виразимо струм  $i'_2$  через напругу  $u'_C$

$$i'_2 = -C \frac{du'_C}{dt} = -10^{-4} \left\{ (-27) e^{-27(t-t_1)} [A_1 \sin 131(t-t_1) + 61,1 \cos 131(t-t_1) \right.$$

$$-t_1)] + e^{27(t-t_1)} [131A_1 \cos 131(t-t_1) - 131 \cdot 61,1 \sin 131(t-t_1)] \Big\}$$

і підставимо початкову умову  $3,75 = -10^{-4}(-27 \cdot 61,1 + 131 \cdot A_1)$ , звідки  $A_1 = -274$ .

Відтак для часового проміжку  $t > t_1$

$$u'_c = e^{-27(t-t_1)} [-274 \sin 131(t-t_1) + 61,1 \cos 131(t-t_1)] \text{ В,}$$

$$i'_2 = i'_3 = e^{-27(t-t_1)} [-0,0606 \sin 131(t-t_1) + 3,75 \cos 131(t-t_1)] \text{ А.}$$

**12.11** Визначити усталені значення струмів в ідеальних індуктивностях електричного кола (рис. 12.15), якщо  $R=10 \text{ Ом}$ ,  $L_1=0,1 \text{ Гн}$ ,  $L_2=0,5 \text{ Гн}$ , а напруга  $U=120 \text{ В}$ .

### Розв'язування

Усталений струм в нерозгалуженій частині кола, звичайно ж, розраховується за законом Ома

$$i_{\text{уст}} = \frac{U}{R} = 12 \text{ А.}$$

Стосовно паралельних віток  $L_1$  та  $L_2$  на перший погляд здається, що має місце тривіальний розв'язок: якщо в обох вітках відсутні активні опори, то усталені значення струмів в них мають бути однаковими і становитимуть по 6 А в кожній. Однак таке міркування виявляються хибними. Доведемо це, продемонструвавши два способи розв'язування даної задачі.

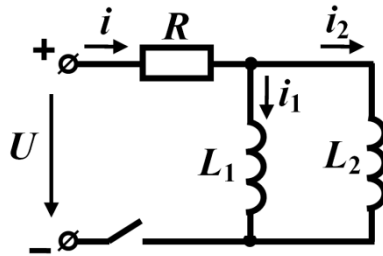


Рисунок 12.15

1. Усталені значення струмів відшукаємо, проаналізувавши в заданому колі перехідний процес. Складемо відповідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} i - i_1 - i_2 = 0, \\ R(i_1 + i_2) + L_1 \frac{di_1}{dt} = U, \\ R(i_1 + i_2) + L_2 \frac{di_2}{dt} = U. \end{cases}$$

Виразимо струм  $i_2$  через  $i_1$  з другого рівняння системи,

$$i_2 = \frac{U}{R} - \frac{L_1}{R} \frac{di_1}{dt} - i_1 \quad (12.3)$$

і підставимо його в третє рівняння

$$\frac{L_1 L_2}{R} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (L_1 + L_2) \frac{di_1}{dt} = 0.$$

В результаті отримали однорідне неповне диференціальне рівняння другого порядку. З формальної точки зору, оскільки права частина рівняння дорівнює нулю, примусова складова струму відсутня і його загальний розв'язок складається лише з вільної складової, тому запишемо характеристичне рівняння

$$\frac{L_1 L_2}{R} p^2 + (L_1 + L_2) p = 0,$$

коренями якого є

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{(L_1 + L_2)R}{L_1 L_2} = -120 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді загальний розв'язок

$$i_1 = A_1 + A_2 e^{-120t}.$$

З цієї формули видно, що розрахувати заздалегідь примусову складову неможливо, оскільки вона увійшла в загальний розв'язок як невідома стала інтегрування  $A_1$ .

Сталі ж інтегрування визначимо з початкових умов. Так, до комутації обидва струми  $i_1$  та  $i_2$  дорівнювали нулю. Тоді, оскільки ці струми безпосередньо підпорядковані закону комутації і відповідно до першої початкової умови  $i_1(0) = 0$ , між сталими інтегрування матиме місце таке співвідношення

$$A_1 + A_2 = 0. \quad (12.4)$$

Тепер, скориставшись рівнянням (12.3), запишемо струм  $i_2$  через сталі інтегрування  $A_1$  та  $A_2$

$$i_2 = \frac{U}{R} - \frac{L_1}{R} (-120 A_2 e^{-120t}) - (A_1 + A_2 e^{-120t}).$$

Підставимо другу початкову умову  $i_2(0) = 0$  і отримаємо ще одне співвідношення з тими ж сталими інтегрування

$$0 = \frac{120}{10} - \frac{0,1}{10} (-120 A_2) - (A_1 + A_2). \quad (12.5)$$

Розв'язуємо (12.4) і (12.5) як систему відносно сталих інтегрування. Відтак

$$A_1 = 10, \quad A_2 = -12.$$

Усталене значення струму  $i_1$  отримаємо із загального розв'язку, спрямувавши час до нескінченності, тобто

$$i_{1ycm} = i_1(\infty) = \lim_{i \rightarrow \infty} (A_1 + A_2 e^{-120t}) = A_1,$$

звідки  $i_{1yct} = 10$  А.

Усталене значення струму  $i_{2yct}$  розрахуємо, скориставшись першим законом Кірхгофа, відповідно до якого

$$i_{2yct} = i_{yct} - i_{1yct} = 12 - 10 = 2 \text{ А.}$$

2. Другий спосіб розв'язування даної задачі базується, переважно, на логічних міркуваннях і висновках.

Так, застосування другого закону Кірхгофа стосовно контуру, який містить дві індуктивності, дозволяє записати таке співвідношення  $L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$  або в числових значеннях –  $\frac{di_1}{dt} = 5 \frac{di_2}{dt}$ .

Наведене співвідношення показує, що швидкість зростання струму в першій котушці в 5 разів перевищує швидкість зростання струму в другій котушці. Серед іншого це означає, що струм в першій індуктивності в будь-який момент часу, і зокрема – після закінчення перехідного процесу, завжди п'ятикратно перевищуватиме струм в другій котушці.

**12.12** В електричному колі (рис. 12.16) замикання ключа відбувається в момент часу, коли напруга на ємності досягає найбільшого додатного значення. Визначити струм у вітці з ємністю під час перехідного процесу, якщо  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом,  $C = 100$  мкФ, а вхідна напруга синусоїдна і змінюється за законом  $u = 150 \sin(314t + \beta)$  В.

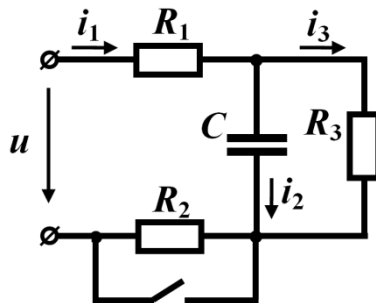


Рисунок 12.16

### Розв'язування

Спочатку потрібно розрахувати початкову фазу вхідної напруги  $\beta$ , за якої в момент часу  $t = 0$  напруга на ємності досягає максимального значення, тобто коли фаза напруги на ємності становить  $\frac{\pi}{2}$ . З цією метою визначимо напругу на

ємності до комутації.

Комплексний вхідний опір докомутаційного кола

$$\underline{Z}_{ex} = R_1 + R_2 + \frac{R_3(-jX_C)}{R_3 - jX_C}.$$

В наведеній формулi ємнісний опір

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 31,83 \text{ Ом.}$$

Якщо підставити числові значення параметрів елементів кола, отримаємо

$$\underline{Z}_{ex} = 55,1e^{-j9,42^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплексна амплітуда вхідного струму дорівнює

$$\underline{I}_{1m} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{150e^{j\beta}}{55,1e^{-j9,42^\circ}} = 2,72e^{j(\beta+9,42^\circ)} \text{ А,}$$

а комплексна амплітуда напруги на ємності розраховується як напруга паралельних  $R_3$  та  $C$  віток

$$\underline{U}_{Cm} = \underline{I}_{1m} \frac{R_3(-jX_C)}{R_3 - jX_C} = 46e^{j(\beta-22,75^\circ)} \text{ В.}$$

Миттєве значення напруги на ємності

$$u_C = 46 \sin(\omega t + \beta - 22,75^\circ) \text{ В.}$$

Щоб розрахувати  $\beta$  потрібно фазу напруги на ємності для моменту часу  $t=0$  прирівняти до  $\frac{\pi}{2}$ , внаслідок чого для початкової фази вхідної напруги отримуємо  $\beta = 112,75^\circ$ .

Для розрахунку перехідного процесу запишемо систему рівнянь на підставі законів Кірхгофа для післякомутаційного стану кола

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ R_1 i_1 + u_C = U_m \sin(\omega t + \beta), \\ R_3 i_3 - u_C = 0, \\ i_2 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases}$$

З цієї системи сформуємо одне диференціальне рівняння, відносно миттєвої напруги  $u_C$

$$R_1 C \frac{du_C}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) u_C = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (12.6)$$

Загальний розв'язок цього рівняння  $u_C = u_{Cnp} + u_{C\delta}$ .

Примусову складову знаходимо з розрахунку нового усталеного стану кола, тобто коли опір  $R_2$  замкнено накоротко. Для цього скористаємося символічним

методом. Після нескладних розрахунків визначаємо, що примусова складова напруги на ємності рівна

$$u_{Cnp} = 97,9 \sin(\omega t + 100,9^\circ) \text{ В.}$$

Вільна ж складова для диференціального рівняння першого порядку дорівнює  $u_{Ccb} = Ae^{pt}$ , де  $p = -1500 \text{ с}^{-1}$  – єдиний корінь характеристичного рівняння, яке отримуємо з рівняння (12.6)

$$R_1 C p + \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) = 0.$$

Отже, загальним розв'язком диференціального рівняння (12.6) є функція

$$u_C = 97,9 \sin(\omega t + 100,9^\circ) + Ae^{-1500t}.$$

Сталу інтегрування знаходимо з початкової умови. Напруга на ємності безпосередньо підпорядковується закону комутації, тому  $u_C(0) = u_C(0_+) = u_C(0_-)$  і згідно з умовою задачі дорівнює амплітуді напруги на ємності в момент часу  $t = 0$ , визначеній під час попереднього розрахунку докомутаційного кола. Тобто

$$46 = 97,9 \sin 100,9^\circ + A,$$

звідки  $A = -50$ .

Таким чином, напруга на ємності

$$u_C = 97,9 \sin(\omega t + 100,9^\circ) - 50e^{-1500t} \text{ В.}$$

Струм у вітці з ємністю знаходимо із компонентного співвідношення

$$i_2 = C \frac{du_C}{dt} = 3,07 \sin(\omega t + 190,9^\circ) + 7,5e^{-1500t} \text{ А.}$$

**12.13** Ключ  $K$  з положення  $a$  миттєво перемикається в положення  $b$  (рис. 12.17). Визначити, як буде змінюватися вхідний струм  $i_1$ , якщо вхідна напруга  $U = 150 \text{ В}$  є постійною, а  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $C = 200 \text{ мкФ}$ ,  $L_1 = 80 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 45 \text{ мГн}$ .

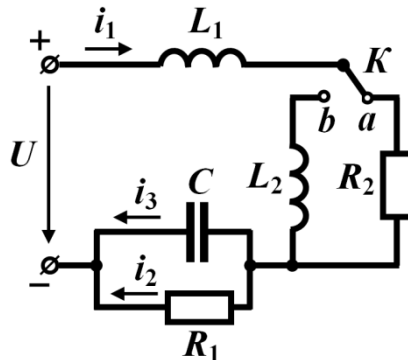


Рисунок 12.17

### Розв'язування

Запропонована задача належить до класу таких задач, в яких порушується закон комутації, зокрема відносно струмів в індуктивностях. В цих випадках говорять про схеми з “некоректними” початковими умовами. Дійсно, в нашій задачі в першу мить після комутації струм в індуктивності  $L_2$  має бути таким самим, як і струм в індуктивності  $L_1$ , оскільки внаслідок перемикання ключа ці індуктивності з'єднуються послідовно. Однак до комутації струми в котушках мали різні значення: якщо в другій струму ще не було, то в першій – вже протікав. Це означає, що внаслідок комутації струми в обох котушках мають змінитися стрибкоподібно. В таких випадках потрібно застосовувати закон збереження магнітного потокозчеплення. Покажемо застосування цього більш загального закону на прикладі даної задачі.

Передусім складемо для післякомутаційного стану кола систему диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа

$$\begin{cases} (L_1 + L_2) \frac{di_1}{dt} + u_C = U, \\ R_2 i_2 - u_C = 0, \\ i_1 = i_2 + i_3, \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt}. \end{cases}$$

Виразимо  $u_C$ ,  $i_2$  та  $i_3$  через струм  $i_1$  і сформуємо одне диференціальне рівняння відносно цього струму

$$C(L_1 + L_2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{L_1 + L_2}{R_2} \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{U}{R_2}.$$

Повний розв'язок диференціального рівняння

$$i_1 = i_{1np} + i_{1e},$$

$$\text{де } i_{1np} = \frac{U}{R_2} = 15 \text{ A.}$$

Щоб визначити вільну складову, запишемо характеристичне рівняння

$$25 \cdot 10^{-6} p^2 + 12,5 \cdot 10^{-3} p + 1 = 0$$

і розв'яжемо його.

Відтак, отримуємо його корені

$$p_1 = -100 \text{ c}^{-1}; \quad p_2 = -400 \text{ c}^{-1}.$$

Як наслідок, вільна складова

$$i_{1e} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

а повний розв'язок

$$i_1 = 15 + A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-400t}.$$

З метою визначення початкової умови для струму  $i_1$ , скористаємося законом



збереження магнітного потокозчеплення. До комутації струму в індуктивності  $L_2$  не було, натомість струм протікав через індуктивність  $L_1$ , тому загальне потокозчеплення кола дорівнює  $L_1 i_1(0_-)$ . В першу мить після комутації струми в обох індуктивностях однакові, тому для цього моменту часу загальне потокозчеплення становить  $(L_1 + L_2) i_1(0_+)$ .

Відповідно до закону збереження потокозчеплення

$$L_1 i_1(0_-) = (L_1 + L_2) i_1(0_+).$$

Звідси, оскільки

$$i_1(0_-) = \frac{U}{R_1 + R_2} = 5 \text{ A},$$

маємо

$$i_1(0_+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_1(0_-) = 3,2 \text{ A}.$$

Підставляємо початкову умову в загальний розв'язок і отримуємо перше рівняння для знаходження сталих інтегрування

$$3,2 = 15 + A_1 + A_2 \quad (12.7)$$

Друге рівняння отримаємо за допомогою похідної струму  $i_1$ , числове значення якої розраховуємо в момент часу  $t = 0_+$  і для знаходження якої скористаємося вищенаведеною системою рівнянь, складеною за законами Кірхгофа. Тоді

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{U - u_C(0_+)}{L_1 + L_2} = 800 \frac{\text{A}}{\text{с}}.$$

Під час розрахунку числового значення  $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+}$  було враховано, що напруга

на ємності

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} = 50 \text{ V}.$$

Тепер продиференціюємо загальний розв'язок струму  $i_1$  за часом  $t$ , записавши отриману похідну для моменту  $t = 0_+$ , отримаємо друге рівняння, яке необхідне для розрахунку сталих інтегрування

$$800 = -100A_1 - 400A_2 \quad (12.8)$$

Об'єднаємо обидва рівняння (12.7) і (12.8) в систему. Її розв'язком є значення

$$A_1 = -13,07 \text{ і } A_2 = 1,27.$$

Таким чином, після комутації струм в обох котушках є однаковим і його миттєве значення становить

$$i_1 = 15 - 13,07e^{-100t} + 1,27e^{-400t} \text{ A}.$$

Графік цього струму наведено на рис. 12.18.

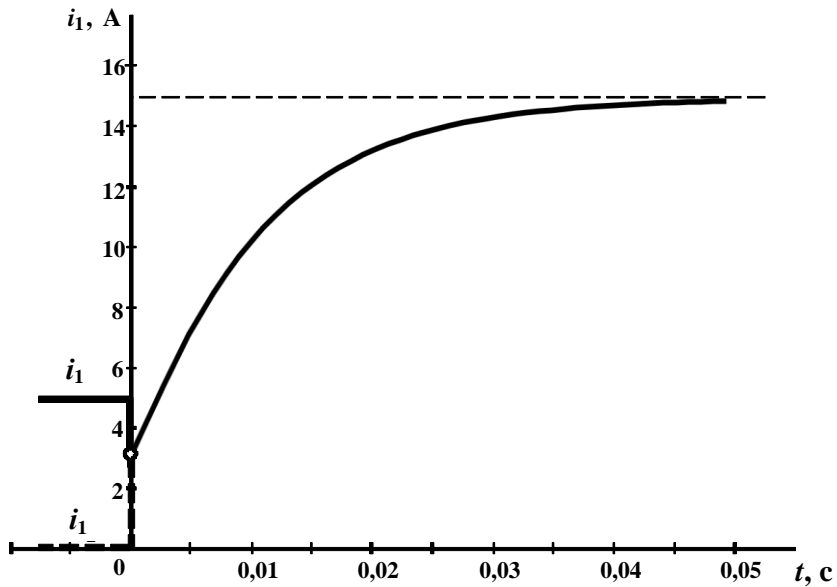


Рисунок 12.18

**Задачі для самостійного розв'язування**

**12.14** Визначити напругу  $u_L(t)$  на індуктивності після комутації в колі (рис. 12.19, а), якщо  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $L = 0,2$  Гн,  $U = 120$  В. Розрахувати практичну тривалість перехідного процесу.

*Відповідь:*  $u_L = -180e^{-250t}$  В;  $t_{np} = 18$  мс.

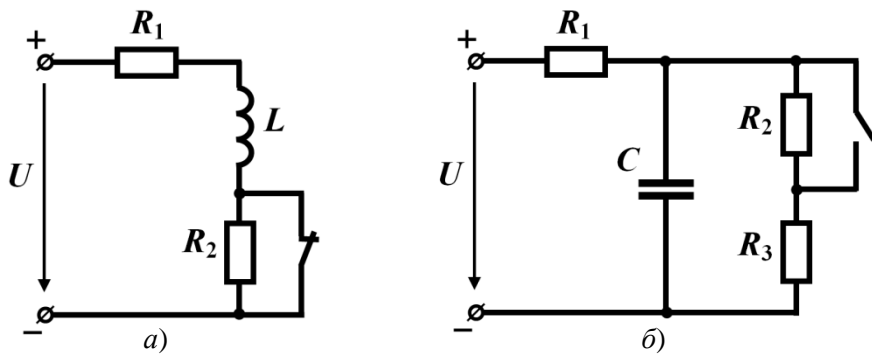


Рисунок 12.19

**12.15** Знайти значення струму  $i_C(t)$  в ємності в момент часу  $t_1 = 3$  мс після комутації, якщо параметри елементів заданого електричного кола, показаного на

рис. 12.19, б, такі:  $R_1 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 15 \text{ Ом}$ ,  $C = 250 \text{ мкФ}$ ,  $U = 180 \text{ В}$ .

**Відповідь:**  $i_C(t_1) = -0,9 \text{ А}$ .

**12.16** В колі (рис. 12.20, а) визначити початкову умову  $u_C(0_+)$  і примусову складову напруги на ємності  $u_{Cnp}$ , якщо вхідна напруга постійна і становить  $U = 120 \text{ В}$ , а параметри елементів кола  $R_1 = R_2 = R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,2 \text{ Гн}$ ,  $C = 20 \text{ мкФ}$ . Скласти характеристичне рівняння, розв'язати його і записати вільну складову для напруги на ємності  $u_{Cв}$ .

**Відповідь:** початкова умова  $u_C(0_+) = 0$ ; примусова складова  $u_{Cnp} = 60 \text{ В}$ ; характеристичне рівняння  $(R_1 + R_3)LCp^2 + [(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)C + L]p + R_1 + R_2 = 0$ ; його корені  $p_1 = -210 \text{ с}^{-1}$ ,  $p_2 = -1190 \text{ с}^{-1}$ .

**12.17** Розрахувати залежну початкову умову  $i_3(0_+)$  (рис.12.20, б)  $U = 240 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 40 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,2 \text{ Гн}$ ,  $C = 50 \text{ мкФ}$ . Скласти характеристичне рівняння, знайти його корені, записати вільну складову  $i_3$ .

**Відповідь:** залежна початкова умова  $i_3(0_+) = -2 \text{ А}$ ; характеристичне рівняння  $R_2LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2 = 0$ ; корені характеристичного рівняння – комплексно-спряжені:  $p_1 = -350 + j278,4 \text{ с}^{-1}$ ,  $p_2 = -350 - j278,4 \text{ с}^{-1}$ .

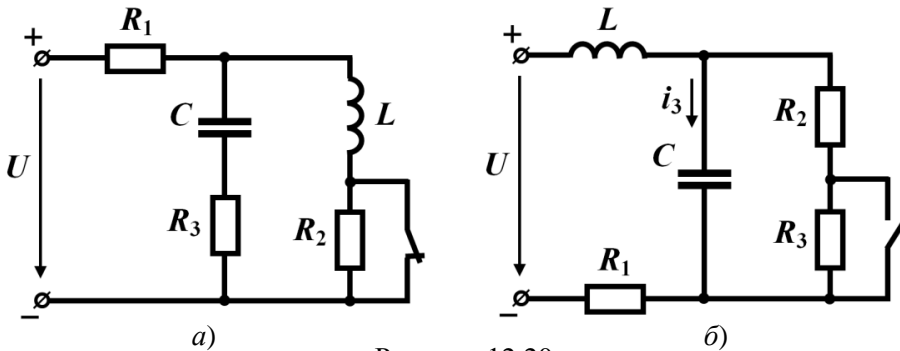


Рисунок 12.20

**12.18** Визначити  $i_{2np}$  і залежну початкову умову  $i_2(0_+)$ , якщо  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $L = 45 \text{ мГн}$ ,  $U = 120 \text{ В}$  (рис. 12.21, а). Розрахувати практичну тривалість перехідного процесу.

**Відповідь:**  $i_{2np} = 0$ ;  $i_2(0_+) = 2,4 \text{ А}$ ;  $t_{np} = 32 \text{ мс}$ .

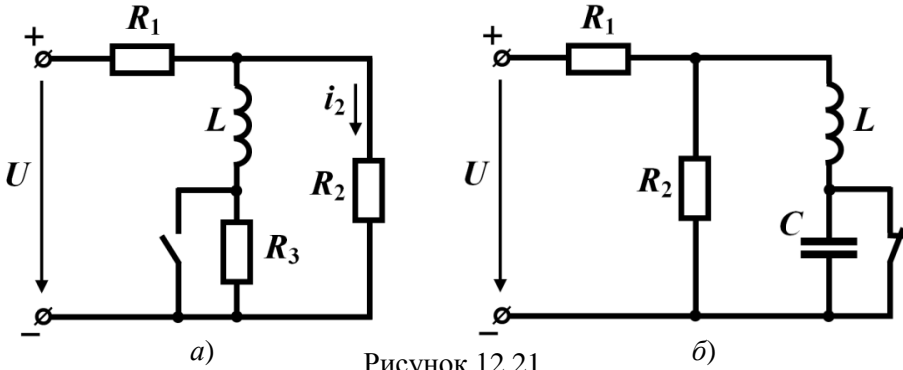


Рисунок 12.21

**12.19** Знайти вираз, що описує перехідний процес струму в індуктивності (рис. 12.21, б).  $R_1 = 100$  Ом,  $R_2 = 100$  Ом,  $L = 0,0625$  Гн,  $C = 100$  мкФ,  $U = 200$  В.

*Відповідь:*  $i_L = (2 + 800t)e^{-400t}$  А.

**12.20** Визначити значення опору  $R_1$ , за якого в колі (рис. 12.22, а) спостерігатиметься критичний (граничний) режим перехідного процесу, якщо  $L = 0,1$  мГн,  $C = 120$  мкФ,  $R_2 = 10$  Ом,  $U = 100$  В. Знайти корені характеристичного рівняння і практичну тривалість перехідного процесу.

*Відповідь:*  $R_1 = 14,43$  Ом;  $p_1 = p_2 = -288,7$  с<sup>-1</sup>;  $t_{np} = 15,6$  мс.

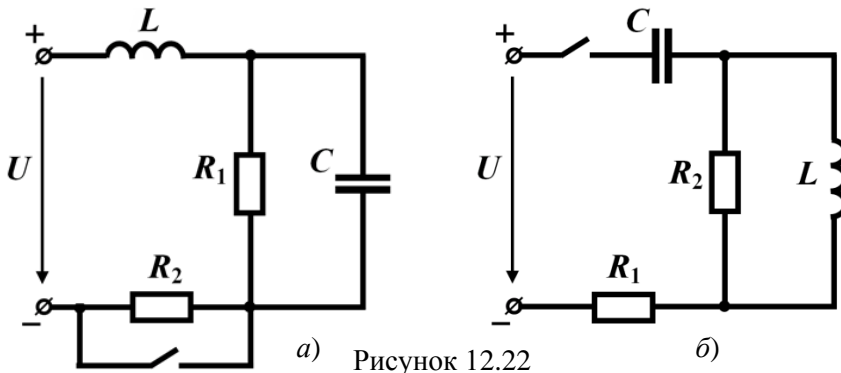


Рисунок 12.22

**12.21** Знайти значення ємності  $C$ , за якої коло (рис. 12.22, б) перебуватиме в критичному (граничному) режимі перехідного процесу. Параметри кола такі:  $L = 0,2$  мГн,  $R_1 = 50$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $U = 160$  В. Визначити корені характеристичного рівняння і практичну тривалість перехідного процесу.

*Відповідь:* ємність може мати два значення  $C_1 = 952$  мкФ і  $C_2 = 168$  мкФ; для ємності  $C_1$ :  $p_1 = p_2 = -30,63$  с<sup>-1</sup>,  $t_{np} = 147$  мс; для ємності  $C_2$ :  $p_1 = p_2 = -70,43$  с<sup>-1</sup>,  $t_{np} = 64$  мс.

**12.22** В електричному колі, наведеному на рис. 12.23, а, ключ замикається в той момент, коли струм в індуктивності досягає свого найменшого від'ємного значення. Розрахувати цей струм під час перехідного процесу, якщо вхідна напруга є синусоїдною і змінюється за законом  $u = 100 \sin(314t + \beta)$  В, а параметри кола такі:  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 10$ , Ом,  $L = 50$  мГн.

**Відповідь:**  $i_L = 3,04 \sin(314t - 104,8^\circ) + 8,31 e^{-100t}$  А.

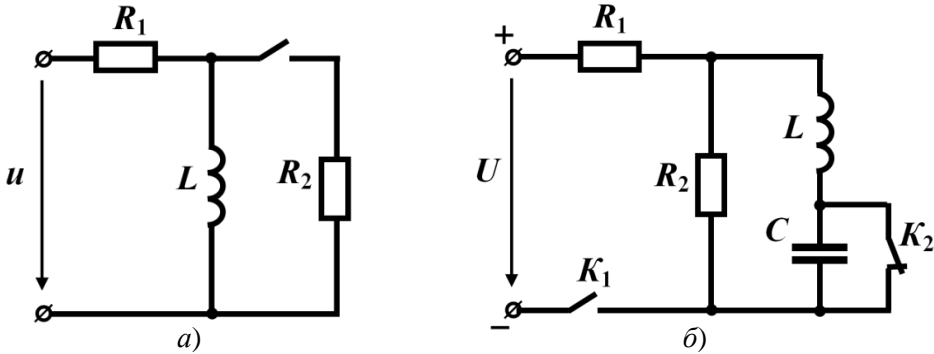


Рисунок 12.23

**12.23** В електричному колі, показаному на рис. 12.23, б, в момент часу  $t = 0$ , коли ключ  $K_2$  знаходиться в замкнутому стані, додатково замикається ще й ключ  $K_1$ . Через проміжок часу  $t_1 = 0,05$  с ключ  $K_2$  розмикається. Необхідно розрахувати перебіг перехідного процесу в колі і визначити залежність струму в індуктивності протягом всієї тривалості перехідного процесу. Параметри кола такі:  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $L = 0,2$  Гн,  $C = 100$  мкФ,  $U = 150$  В.

**Відповідь:**  $i_L = \begin{cases} 15 - 15 e^{-25t} \text{ А, } & 0 < t < t_1, \\ e^{-125t} (-3,8 \sin 223t + 10,7 \cos 223t) \text{ А, } & t > t_1. \end{cases}$

**12.24** Побудувати графіки зміни струмів  $i_1(t)$  та  $i_2(t)$  під час перехідного процесу, що спостерігається в розгалуженому електричному колі, зображеному на рис. 12.24, а, якщо е.р.с. джерела є постійною у часі  $E = 200$  В. Інші ж параметри заданого електричного кола такі:  $R_1 = 30$ , Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 8$  Ом,  $L = 0,2$  Гн,  $C = 250$  мкФ.

**Відповідь:**  $i_1 = 5,26 - 1,26 e^{-190t}$  А,  $i_2 = 6 e^{-200t}$  А.

**12.25** На електричне коло, схема якого показана на рис. 12.24, б, діє постійна у часі вхідна напруга  $U = 200$  В. Параметри елементів кола такі:  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 50$  Ом,  $R_3 = 40$  Ом,  $C_1 = 200$  мкФ,  $C_2 = 300$  мкФ. Потрібно розрахувати пере-

хідний процес, що виникає в колі внаслідок замикання ключа, визначивши закон зміни миттєвої напруги на ємності  $C_1$ .

*Підказка.* Скористайтесь законом збереження заряду, оскільки в цій задачі звичайні закони комутації порушуються і в момент комутації напруги на обох ємностях зазнають стрибкоподібної зміни.

*Відповідь:*  $u_{C_1} = u_{C_2} = 160 - 40e^{-250t}$  В.

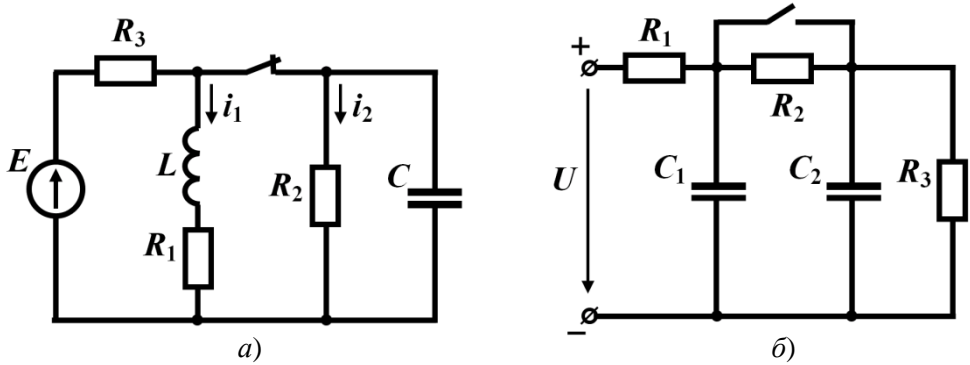


Рисунок 12.24

## Розділ 13

# ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ

В основу *операторного методу* закладено інтегральне перетворення Лапласа, де замість функції часу  $f(t)$ , яку називають *оригіналом*, вводиться її *зображення* – функція комплексної змінної  $F(p)$ . Це дозволяє уникнути безпосереднього розв'язування *диференціальних рівнянь*, яке мало місце в класичному методі, і натомість аналіз перехідних процесів звести до розв'язування *алгебраїчних рівнянь*.

**13.1** Відшукати зображення функцій:

1)  $f_1(t) = 3e^{-20t} + 5t$  ;

2)  $f_2(t) = 10e^{-30t} \cos 50t$  ;

3)  $f_3(t) = Ate^{-\alpha t} - B \sin \omega t$  .

### Розв'язування

Для визначення зображень функцій застосуємо інтеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

і скористаємося його лінійними властивостями.

1. Зображення функції  $f_1(t)$ :

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \int_0^{\infty} 3e^{-20t} e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} 5te^{-pt} dt = \frac{3e^{-(p+20)t}}{-(p+20)} \Big|_0^{\infty} + \frac{5e^{-pt}(-pt-1)}{(-p)^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{3}{p+20} + \frac{5}{p^2} = \\ &= \frac{3p^2 + 5p + 100}{p^2(p+20)}. \end{aligned}$$

2. Зображення функції  $f_2(t)$ :

$$F_2(p) = \int_0^{\infty} 10e^{-30t} \cos 50t \cdot e^{-pt} dt = 10 \int_0^{\infty} e^{-(p+30)t} \cos 50t dt =$$

$$= \frac{10e^{-(p+30)t}}{(p+30)^2 + 50^2} \left[ -(p+30) \cos 50t + 50 \sin 50t \right]_0^{\infty} = \frac{10(p+30)}{(p+30)^2 + 50^2}.$$

3. Зображення функції  $f_3(t)$ :

$$F_3(p) = \int_0^{\infty} Ate^{-\alpha t} e^{-pt} dt - \int_0^{\infty} B \sin \omega t \cdot e^{-pt} dt = A \int_0^{\infty} te^{-(p+\alpha)t} dt -$$

$$- B \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt = \frac{Ae^{-(p+\alpha)t}}{(p+\alpha)^2} \left[ -(p+\alpha)t - 1 \right]_0^{\infty} -$$

$$- \frac{Be^{-pt} (-p \sin \omega t - \omega \cos \omega t)}{p^2 + \omega^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{(p+\alpha)^2} - \frac{B\omega}{p^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{(A - B\omega)p^2 + 2B\alpha\omega p - (A\omega^2 - B\alpha^2\omega)}{(p+\alpha)^2(p^2 + \omega^2)}.$$

**13.2** На рис. 13.1 наведено графіки двох функцій. Необхідно подати ці функції в аналітичній формі і знайти їх зображення.

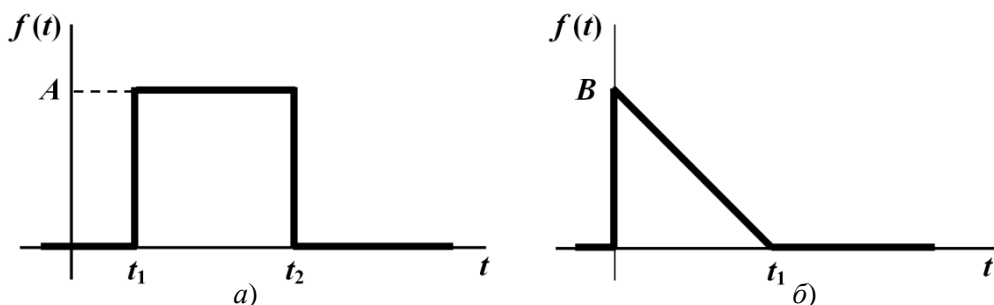


Рисунок 13.1

### Розв'язування

1. Аналітичним виразом функції, графік якої зображено на першому рисунку (рис. 13.1, а) є

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_1, \\ A, & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t > t_2. \end{cases}$$



Зображення цієї функції знаходимо за допомогою формули Лапласа з урахуванням меж її існування  $t_1$  і  $t_2$ . Таким чином,

$$F(p) = \int_{t_1}^{t_2} A e^{-pt} dt = \frac{A}{p} (e^{-pt_1} - e^{-pt_2}).$$

2. Аналітичним виразом функції, показаної на рис. 13.1, б, є

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{B}{t_1}t + B, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t > t_1. \end{cases}$$

Зображення цієї функції

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{t_1} \left( -\frac{B}{t_1}t + B \right) e^{-pt} dt = \int_0^{t_1} -\frac{B}{t_1} t e^{-pt} dt + \int_0^{t_1} B e^{-pt} dt = \\ &= -\frac{B}{t_1} \left[ \frac{e^{-pt}}{p^2} (-pt - 1) \right] \Big|_0^{t_1} + \frac{B e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{t_1} = \frac{B(t_1 p + e^{-pt} - 1)}{t_1 p^2}. \end{aligned}$$

**13.3** За відомими зображеннями заданих функцій відшукати їх оригінали:

$$1) F_1(p) = \frac{2p+1}{p^2+4p+3};$$

$$2) F_2(p) = \frac{3p+4}{p(4p^2+12p+8)};$$

$$3) F_3(p) = \frac{p+2}{p^2+6p+25}.$$

### Розв'язування

Щоб визначити оригінали функцій, скористаємося *теоремою розкладання*:

якщо зображення функції задано раціональним дробом  $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ , де  $A(p)$  і

$B(p)$  є поліномами від  $p$  степенів  $m$  і  $n$ , відповідно, і такими, що  $m < n$ , то оригіналом функції є вираз

$$f(t) = \sum_1^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t},$$

де  $p_k$  – корені знаменника, серед яких немає кратних;

$A(p_k)$  – значення чисельника для  $p = p_k$ ;

$B'(p_k)$  – значення похідної знаменника для  $p = p_k$ .

1. В зображенні  $F_1(p)$

$$A(p) = 2p + 1; B(p) = p^2 + 4p + 3.$$

Корені знаменника визначаються з рівняння

$$p^2 + 4p + 3 = 0$$

і дорівнюють  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -3$ .

Тоді

$$A(p_1) = 2(-1) + 1 = -1, A(p_2) = 2(-3) + 1 = -5,$$

а похідна знаменника  $B'(p) = 2p + 4$

$$B'(p_1) = 2, B'(p_2) = -2.$$

Підставляємо отримані значення в формулу розкладання і отримуємо

$$f_1(t) = \frac{-1}{2}e^{-t} + \frac{-5}{-2}e^{-3t} = -0,5e^{-t} + 2,5e^{-3t}.$$

2. Для другого зображення  $F_2(p)$  маємо

$$A(p) = 3p + 4, B(p) = p(4p^2 + 12p + 8).$$

Корені знаменника  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1$ ,  $p_3 = -2$ .

Тоді значення чисельника

$$A(p_1) = 4, A(p_2) = 1, A(p_3) = -2,$$

а числові значення похідної знаменника  $B'(p) = 12p^2 + 24p + 8$

$$B'(p_1) = 8, B'(p_2) = -4, B'(p_3) = 8.$$

Відтак оригіналом є

$$f_2(t) = \frac{4}{8}e^{0t} + \frac{1}{-4}e^{-t} + \frac{-2}{8}e^{-2t} = 0,5 - 0,25e^{-t} - 0,25e^{-2t}.$$

3. Для третього випадку

$$A(p) = p + 2, B(p) = p^2 + 6p + 25.$$

Корені знаменника виходять комплексними спряженими

$$p_1 = -3 + j4, p_2 = -3 - j4,$$

що дещо ускладнює пошук рішення:

$$A(p_1) = -3 + j4 + 2 = -1 + j4 = 4,123e^{j104^\circ},$$

$$A(p_2) = -1 - j4 = 4,123e^{-j104^\circ}.$$

Числові значення похідної знаменника  $B'(p) = 2p + 6$

$$B'(p_1) = 2(-3 + j4) + 6 = j8 = 8e^{j90^\circ},$$

$$B'(p_2) = -j8 = 8e^{-j90^\circ}.$$

Отже,

$$f_3(t) = \frac{4,123e^{j104^\circ}}{8e^{j90^\circ}} e^{(-3+j4)t} + \frac{4,123e^{-j104^\circ}}{8e^{-j90^\circ}} e^{(-3-j4)t}$$

або після нескладних перетворень

$$f_3(t) = 0,515e^{-3t} e^{j(4t+14^\circ)} + 0,515e^{-3t} e^{-j(4t+14^\circ)}.$$

Відомо, що  $\frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \cos \alpha$ , тому

$$f_3(t) = 1,03e^{-3t} \cos(4t + 14^\circ).$$

Цей вираз можна записати дещо інакше:

$$\begin{aligned} f_3(t) &= 1,03e^{-3t} \sin(4t + 104^\circ) = 1,03e^{-3t} (\cos 104^\circ \cdot \sin 4t + \sin 104^\circ \cdot \cos 4t) = \\ &= e^{-3t} (-0,249 \sin 4t + 1 \cos 4t). \end{aligned}$$

**13.4** Знайти струм в електричному колі (рис. 13.2, а) операторним методом, якщо  $E = 100$  В,  $R = 200$  Ом,  $C = 200$  мкФ. Ємність до комутації була заряджена до напруги  $U_0 = 40$  В з полярністю, показаною на рисунку.

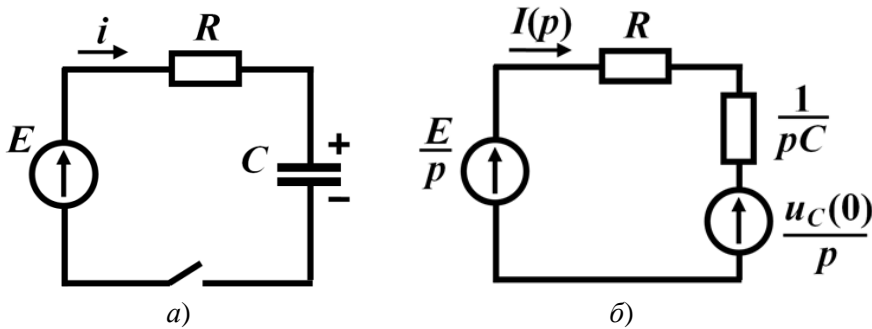


Рисунок 13.2

### Розв'язування

Розв'язування задач операторним методом корисно супроводжувати еквівалентними операторними схемами, складеними для післякомутаційного стану заданого кола. В таких схемах ключ вже не показують.

Ємність в операторній схемі подається послідовно з'єднаними операторним опором  $\frac{1}{pC}$  і додатковою е.р.с.  $\frac{u_C(0)}{p}$ , що характеризує запас енергії електричного поля ємності на момент комутації. Напрямок цієї е.р.с. має бути протилежним

відносно напрямку напруги на ємності  $u_C(0)$  в момент часу, що передував комутації.

Індуктивність в операторній формі зображають як послідовно з'єднані операторний опір  $pL$  і додаткову е.р.с.  $Li(0)$ . Напрямок останньої збігається з напрямком струму в індуктивності безпосередньо до комутації.

Зовнішні джерела напруги і струму необхідно замінити їхніми зображеннями  $E(p)$  і  $J(p)$ , відповідно.

В еквівалентних операторних схемах для знаходження зображень шуканих струмів можна використовувати будь-які, розглянуті вище, методи розрахунку, зокрема методи контурних струмів, вузлових потенціалів, еквівалентного генератора тощо.

Операторна схема для розв'язування даної задачі зображена на рис. 13.2, б. В ній додаткову е.р.с. спрямовано назустріч струму, оскільки заданий на ємності напрямок напруги  $U_0$  у вихідній схемі збігається з напрямком струму.

Зображення струму  $I(p)$  для отриманої одноконтурної схеми знаходимо із співвідношення

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} - \frac{u_C(0)}{p}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{[E - u_C(0)]C}{RCp + 1} = \frac{60 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{200 \cdot 200 \cdot 10^{-6} p + 1} = \frac{1,2 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2} p + 1}.$$

З метою визначення оригіналу цієї функції  $i(t)$ , скористаємося теоремою розкладання.

Отже, для даної задачі маємо:

- поліноми  $A(p) = 1,2 \cdot 10^{-2}$ ,  $B(p) = 4 \cdot 10^{-2} p + 1$ ;

- корінь знаменника  $p_1 = -25 \text{ с}^{-1}$ ;

- значення чисельника  $A(p_1) = 1,2 \cdot 10^{-2}$ ;

- похідна знаменника  $B'(p) = 4 \cdot 10^{-2}$ ;

- значення похідної  $B'(p_1) = 4 \cdot 10^{-2}$ .

Відповідно миттєвий струм як функція часу дорівнює

$$i(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{-p_1 t} = \frac{1,2 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}} e^{-25t} = 0,3 e^{-25t} \text{ А.}$$

**13.5** В електричному колі (рис. 13.3, а) за допомогою операторного методу визначити напругу на індуктивності  $u_L(t)$ , якщо  $R_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,4 \text{ Гн}$ ,  $U = 150 \text{ В}$ .

### Розв'язування

Побудуємо для післякомутаційного стану кола операторну схему заміщення (рис. 13.3, б) (див. розв'язок задачі 13.4). Визначимо для неї додаткову е.р.с. Для цього розрахуємо початкове значення струму в індуктивності  $i(0) = \frac{U}{R_1} = 10$  А.

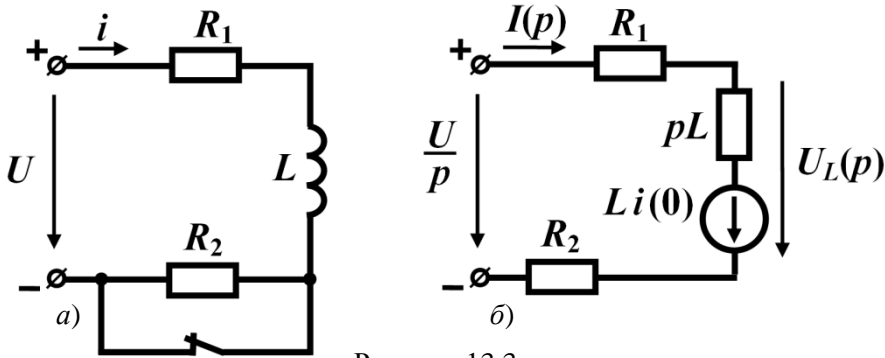


Рисунок 13.3

З операторної схеми видно, що зображення струму дорівнює

$$I(p) = \frac{\frac{U}{p} + L \frac{U}{R_1}}{Lp + R_1 + R_2} = \frac{U(Lp + R_1)}{R_1 p(Lp + R_1 + R_2)}.$$

Для знаходження операторної напруги на індуктивності враховуємо те, що ця напруга містить дві складові – операторну напругу на опорі  $pL$  і напругу додаткової е.р.с. Тоді

$$U_L(p) = I(p)Lp - Li(0) = -\frac{ULR_2}{R_1(Lp + R_1 + R_2)}.$$

Після підстановки числових значень отримуємо

$$U_L(p) = -\frac{40}{0,4p + 25} = -100 \cdot \frac{1}{p + 62,5}.$$

Відтак миттєвою напругою на індуктивності буде функція

$$u_L(t) = -100e^{-62,5t} \text{ В.}$$

**13.6** Для розрахунку перехідного процесу в колі (рис. 13.4, а) скласти операторну схему, визначити значення додаткових е.р.с., записати рівняння в операторній формі за методом контурних струмів та вузлових потенціалів.

### Розв'язування

Зобразимо операторну схему кола (рис. 13.4, б) і складемо для неї систему з двох рівнянь за методом контурних струмів. Напрями останніх задамо так, як це показано на рисунку. Тоді

$$\begin{cases} Z_{11}(p)J_1(p) + Z_{12}(p)J_2(p) = E_{11}(p), \\ Z_{21}(p)J_1(p) + Z_{22}(p)J_2(p) = E_{22}(p). \end{cases}$$

В цій системі функції  $Z_{11}(p) = R_1 + R_2 + \frac{1}{pC}$ ;  $Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = -\left(R_2 + \frac{1}{pC}\right)$ ;

$$Z_{22}(p) = R_2 + R_3 + \frac{1}{pC} + pL; \quad E_{11} = \frac{E}{p} - \frac{u_C(0)}{p}; \quad E_{22}(p) = Li_3(0) + \frac{u_C(0)}{p}.$$

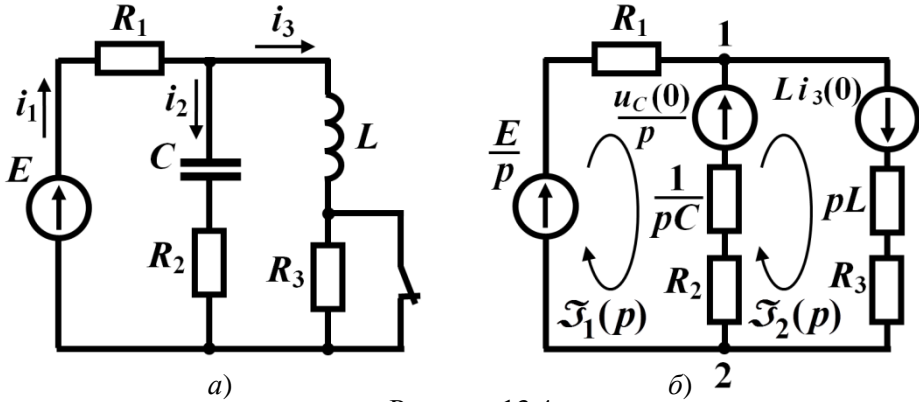


Рисунок 13.4

Щоб знайти додаткові е.р.с., потрібно знати початкові значення струму через індуктивність  $i_3(0)$  і напруги на ємності  $u_C(0)$ . Вказані струми та напруги підпорядковуються законам комутації, тому для їх розрахунку зручно навести схему докомутанційного стану кола (рис. 13.5), в якій потрібно врахувати нульовий опір індуктивності постійному струму і безмежно великий опір ємності постійній напрузі. З цієї схеми добре видно, що  $i_3(0) = \frac{E}{R_1}$ , а  $u_C(0) = 0$ .

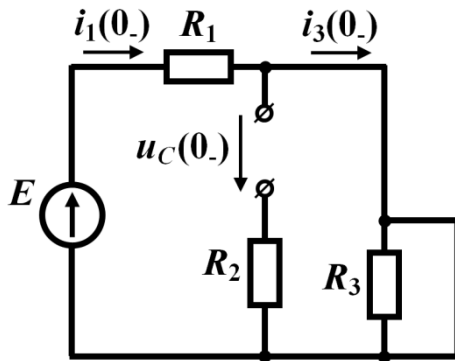


Рисунок 13.5

Запишемо рівняння за методом вузлових потенціалів. Оскільки операторна схема має два вузли, то потенціал вузла 2 прийемо рівним нулю, а для вузла 1 складаємо лише одне рівняння

$$Y_{11}(p)\varphi_1(p) = J_{11}(p),$$

$$\text{де } Y_{11}(p) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC}} + \frac{1}{R_3 + pL};$$

$$J_{11}(p) = \frac{E}{p} \frac{1}{R_1} + \frac{u_C(0)}{p} \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC}} - Li_3(0) \frac{1}{R_3 + pL}.$$

З цього рівняння нескладно визначити зображення потенціалу  $\varphi_1(p)$ , а далі за законом Ома – і зображення струмів у вітках.

**13.7** Розрахувати перехідний струм в ємності  $i_3(t)$  після замикання ключа, якщо  $R_1 = 50$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $L = 0,2$  Гн,  $C = 250$  мкФ,  $U = 120$  В (рис. 13.6, а). Напряга на ємності до замикання ключа становила  $U_0 = 80$  В з полярністю, вказаною на рисунку. Задачу розв'язати операторним методом.

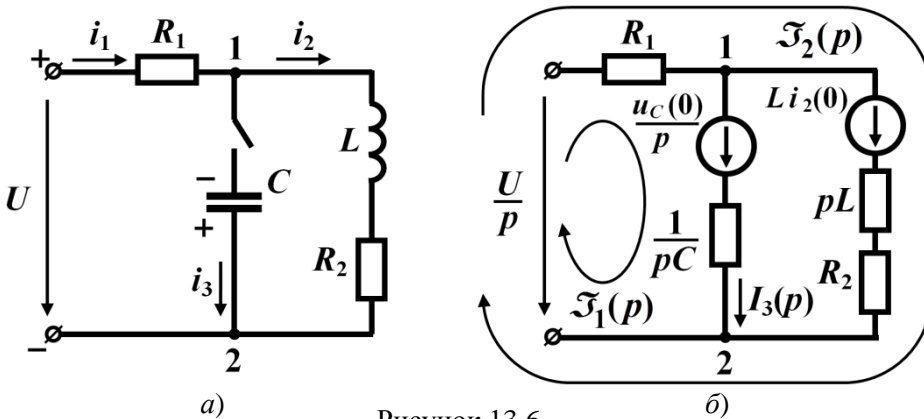


Рисунок 13.6

### Розв'язування

#### 1. Метод контурних струмів.

Складемо операторну схему, в якій виберемо два незалежних контури і задамо напрями контурних струмів (рис. 13.6, б). Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \left( R_1 + \frac{1}{pC} \right) J_1(p) + R_1 J_2(p) = \frac{U}{p} + \frac{u_C(0)}{p}, \\ R_1 J_1(p) + (R_1 + pL + R_2) J_2(p) = \frac{U}{p} + Li_2(0). \end{cases}$$

Під час складання операторної схеми враховано, що за умовою початкову напругу на ємності  $U_0$  спрямовано від точки 2 до точки 1, і тому напрям додаткової е.р.с. має бути протилежним.

Визначимо початкові значення  $i_2(0)$  і  $u_C(0)$ . За умовою задачі  $u_C(0) = U_0 = 80$  В.

Струм в індуктивності до комутації, як це видно із схеми на рис. 13.6, а,

$$i_2(0) = \frac{U}{R_1 + R_2} = 2 \text{ А.}$$

З першого рівняння системи виразимо  $J_2(p)$

$$J_2(p) = \frac{U + u_C(0)}{p} - J_1(p) \frac{R_1 + \frac{1}{pC}}{R_1}$$

і підставимо цю функцію в друге рівняння, де після нескладних перетворень отримаємо

$$J_1(p) = C \frac{L[U + u_C(0) - R_1 i_2(0)]p + [U + u_C(0)](R_1 + R_2) - UR_1}{R_1 LCp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2}.$$

Подібні перетворення доцільно виконувати в загальному вигляді, тому що саме так зручно здійснити за допомогою правила узгодження розмірностей попередню перевірку правильності вже виконаних перетворень. З цією метою дослідимо розмірності коефіцієнтів, що входять до складу отриманого виразу для струму  $J_1(p)$ . Передусім нагадаємо розмірності основних електричних величин:

$$[U] = \text{В}; [I] = \text{А}; [U(p)] = \text{В} \cdot \text{с}; [I(p)] = \text{А} \cdot \text{с}; [R] = \text{Ом}; [L] = \text{Гн} = \text{Ом} \cdot \text{с};$$

$$[C] = \text{Ф} = \frac{\text{с}}{\text{Ом}}; [p] = \text{с}^{-1}.$$

Як бачимо, розмірність першого доданку в чисельнику становить  $\text{Ом} \cdot \text{с} \cdot \text{В} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Ом} \cdot \text{В}$ . Легко переконатися, що і інші складові чисельника мають такі ж розмірності. Водночас і розмірності всіх складових знаменника також є

$$\text{узгодженими і дорівнюють } \text{Ом} \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} \cdot \frac{\text{с}}{\text{Ом}} \cdot \text{с}^{-2} = \text{Ом}.$$

Таким чином розмірність всього співвідношення

$$\frac{\text{с}}{\text{Ом}} \cdot \text{Ом} \cdot \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \text{В} \cdot \frac{\text{с}}{\text{Ом}} = \text{А} \cdot \text{с},$$

що врешті і відповідає розмірності зображення струму.

Позитивний результат, досягнутий внаслідок такої перевірки, зовсім не гарантує безпомилкового виконання перетворень, але негативний результат точно свідчить про наявність помилок.

Струм  $I_3(p)$  у вітці з ємністю дорівнює контурному струму  $J_1(p)$ , тому після підстановки числових значень маємо



$$I_3(p) = J_1(p) = \frac{5 \cdot 10^{-3} p + 1,5}{2,5 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,325 p + 60}.$$

Для розрахунку оригіналу струму скористаємося формулою розкладання. В нашому випадку чисельник

$$A(p) = 5 \cdot 10^{-3} p + 1,5,$$

знаменник

$$B(p) = 2,5 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,325 p + 60,$$

а його похідна

$$B'(p) = 5 \cdot 10^{-3} p + 0,325.$$

Корені знаменника

$$p_{1,2} = \frac{-0,325 \pm \sqrt{0,325^2 - 4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 60}}{5 \cdot 10^{-3}} = -65 \pm j140,6.$$

Розраховуємо всі коефіцієнти в формулі розкладання

$$A(p_1) = 1,175 + j0,703 = 1,37 e^{j30,9^\circ},$$

$$A(p_2) = 1,175 - j0,703 = 1,37 e^{-j30,9^\circ},$$

$$B'(p_1) = j0,703, \quad B'(p_2) = -j0,703.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} i_3(t) &= \frac{1,37 e^{j30,9^\circ}}{0,703 e^{j90^\circ}} e^{(-65 + j140,6)t} + \frac{1,37 e^{-j30,9^\circ}}{0,703 e^{-j90^\circ}} e^{(-65 - j140,6)t} = \\ &= 1,95 e^{-65t} e^{j(140,6t - 59,1^\circ)} + 1,95 e^{-65t} e^{-j(140,6t - 59,1^\circ)} = 3,9 e^{-65t} \cos(140,6t - 59,1^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

Варто звернути увагу на те, що у випадку комплексних коренів обидва доданки в теоремі розкладання є комплексно-спряженими. Тому в таких випадках, з метою скорочення обчислень, достатньо розрахувати лише один з цих доданків.

Цей вираз можна записати інакше

$$i_3(t) = e^{-65t} (3,35 \sin 140,6t + 2 \cos 140,6t) \text{ А.}$$

## 2. Метод вузлових потенціалів.

Оскільки схема має два вузли, складаємо тільки одне рівняння. За невідоме оберемо потенціал першого вузла. Тоді

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{pC} + \frac{1}{pL + R_2} \right) \varphi_1(p) = \frac{U}{p} \frac{1}{R_1} - \frac{u_C(0)}{p} pC - Li_3(0) \frac{1}{pL + R_2}.$$

Після перетворень отримуємо

$$\varphi_1(p) = \frac{-u_C(0)R_1LCp^2 - [u_C(0)R_1R_2C + i_2(0)R_1L - UL]p + UR_2}{p[R_1LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2]}$$

і через цей потенціал визначаємо зображення струму  $I_3(p)$

$$I_3(p) = \left[ \varphi_1(p) + \frac{u_C(0)}{p} \right] pC =$$

$$= pC \left[ \frac{-u_C(0)R_1LCp^2 - [u_C(0)R_1R_2C + i_2(0)R_1L - UL]p + UR_2}{p[R_1LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2]} + \frac{u_C(0)}{p} \right].$$

Внаслідок спрощення отримуємо остаточний вираз

$$I_3(p) = C \frac{L[U + u_C(0) - R_1i_2(0)]p + UR_2 + u_C(0)(R_1 + R_2)}{R_1LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2},$$

який збігається з попереднім результатом, оскільки  $J_1(p) = I_3(p)$ .

**13.8** Коло (рис. 13.7, а) в момент часу  $t = 0$  підмикають до джерела синусоїдної напруги  $u = U_m \sin(314t + \beta)$ . Визначити, як зміниться струм під час перехідного процесу, якщо  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $L = 0,12$  Гн,  $U_m = 200$  В,  $\beta = -60^\circ$ .

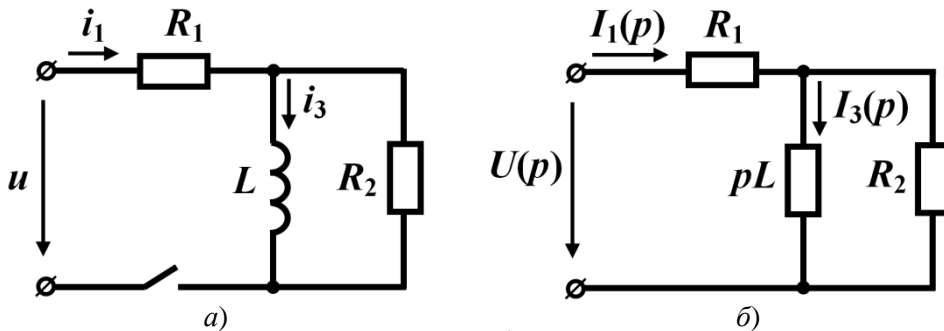


Рисунок 13.7

### Розв'язування

В даній задачі початкові умови є нульовими, тому операторна схема (рис. 13.7, б) не містить додаткових е.р.с. У зв'язку з цим вхідний операторний струм можна визначити як

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z_{\text{ex}}(p)},$$

$$\text{де } Z_{\text{ex}}(p) = R_1 + \frac{R_2 pL}{R_2 + pL} = \frac{(R_1 + R_2)pL + R_1 R_2}{pL + R_2}.$$

Зображенням напруги  $u = U_m \sin(314t + \beta)$  є функція, отримана за допомо-

гою інтеграла Лапласа,

$$U(p) = U_m \frac{\omega \cos \beta + p \sin \beta}{p^2 + \omega^2}.$$

Таким чином, зображення вхідного струму

$$I_1(p) = \frac{U_m (\omega \cos \beta + p \sin \beta) (pL + R_2)}{(p^2 + \omega^2) [(R_1 + R_2)pL + R_1 R_2]}.$$

Після підстановки числових значень отримуємо

$$I_1(p) = \frac{200(157 - 0,866p)(0,12p + 30)}{(p^2 + 314^2)(6p + 600)}.$$

Оригінал струму відшукаємо за формулою розкладання.

Звертаємо увагу, що коло містить один реактивний елемент, через що характеристичне рівняння буде першого порядку з одним дійсним коренем. Однак в формулі для струму  $I_1(p)$  знаменник має три корені і два з них, що в перших дужках, з'явилися завдяки прикладеній напрузі.

Отже, маємо:

$$A(p) = 200(157 - 0,866p)(0,12p + 30),$$

$$B(p) = (p^2 + 314^2)(6p + 600).$$

Розраховуємо корені знаменника

$$p_1 = j314 \text{ c}^{-1}, \quad p_2 = -j314 \text{ c}^{-1}, \quad p_3 = -100 \text{ c}^{-1}.$$

Тоді

$$A(p_1) = 200(157 - 0,866 \cdot j314)(0,12 \cdot j314 + 30) = 3,024 \cdot 10^6 e^{-j8,5^\circ},$$

$$A(p_2) = 3,024 \cdot 10^6 e^{j8,5^\circ},$$

$$A(p_3) = 200(157 + 0,866 \cdot 100)(-12 + 30) = 0,877 \cdot 10^6.$$

Похідна знаменника

$$B'(p) = 2p(6p + 600) + 6(p^2 + 314^2),$$

звідки

$$B'(p_1) = 2j314(6j314 + 600) = 1,24 \cdot 10^6 e^{j162,3^\circ},$$

$$B'(p_2) = 1,24 \cdot 10^6 e^{-j162,3^\circ},$$

$$B'(p_3) = 6(10000 + 98596) = 0,651 \cdot 10^6.$$

Отримані числові значення з метою знаходження оригіналу струму підставляємо в формулу розкладання

$$i_1(t) = \frac{3,024 \cdot 10^6 e^{-j8,5^\circ}}{1,24 \cdot 10^6 e^{j162,3^\circ}} e^{j314t} + \frac{3,024 \cdot 10^6 e^{j8,5^\circ}}{1,24 \cdot 10^6 e^{-j162,3^\circ}} e^{-j314t} +$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{0,877 \cdot 10^6}{0,651 \cdot 10^6} e^{-100t} &= 2,44e^{j(\omega t - 170,8^\circ)} + 2,44e^{-j(\omega t - 170,8^\circ)} + 1,35e^{-100t} = \\
 &= 4,88\cos(\omega t - 80,8^\circ) + 1,35e^{-100t} \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Перевіримо правильність отриманого результату таким чином. Перший доданок в отриманому виразі – примусова складова  $i_{1np}(t)$ , тому визначимо значення струму  $i_1(t)$  в новому усталеному режимі та здійснимо це за допомогою символічного методу.

$$\text{Комплексний вхідний опір кола дорівнює } \underline{Z}_{ex} = R_1 + \frac{R_2 j\omega L}{R_2 + j\omega L} = 41e^{j20,8^\circ} \text{ Ом.}$$

Тоді комплексне амплітудне значення вхідного струму

$$\underline{I}_{1m} = \frac{U_m}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{200e^{-j60^\circ}}{41e^{j20,8^\circ}} = 4,88e^{-j80,8^\circ} \text{ А,}$$

звідки його миттєве значення  $i_{1np}(t) = 4,88\sin(\omega t - 80,8^\circ)$  А.

Як бачимо, дане рівняння відповідає отриманій вище усталеній складовій перехідного процесу.

Тепер здійснимо перевірку за початковим значенням струму. Оскільки струм  $i_1$  не підпорядковується закону комутації, будемо шукати залежну початкову умову  $i_1(0_+)$ . З цією метою складемо два рівняння за законами Кірхгофа для моменту часу  $t = 0_+$

$$\begin{aligned}
 i_1(0_+)R_1 + i_2(0_+)R_2 &= U_m \sin(-60^\circ), \\
 i_1(0_+) &= i_2(0_+) + i_3(0_+).
 \end{aligned}$$

На струм  $i_3$ , який тече через індуктивність, поширюється дія закону комутації. Тому  $i_3(0_+) = i_3(0_-) = 0$ , оскільки до замикання ключа струму в колі не було.

Звідси випливає, що  $i_2(0_+) = i_1(0_+)$ , а тому

$$i_1(0_+) = \frac{U_m \sin(-60^\circ)}{R_1 + R_2} = \frac{200(-0,866)}{20 + 30} = 3,46 \text{ А,}$$

що цілком відповідає значенню струму, отриманому операторним методом, за умови  $t = 0$

$$i_1(0_+) = 4,88\sin(-80,8^\circ) + 1,35e^{-100 \cdot 0} = 3,46 \text{ А.}$$

Отже, задачу розв'язано правильно.

**13.9** Розрахувати струм  $i_2$  перехідного процесу, якщо до кола (рис. 13.8, а) прикладено напругу  $u(t) = U(1 - e^{-\alpha t})$ , де  $U = 50 \text{ В}$ ,  $\alpha = 50 \text{ с}^{-1}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,

$R_2 = 80 \text{ Ом}$ ,  $C = 250 \text{ мкФ}$ . До комутації ємність було заряджено до напруги  $u_C(0) = U_0 = 20 \text{ В}$  зі вказаною на рисунку полярністю.

### Розв'язування

Для заданого кола побудуємо операторну схему, яку представлено на рис. 13.8, б.

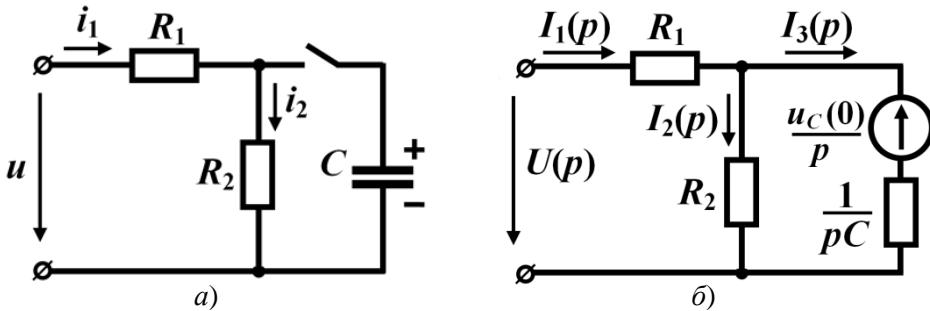


Рисунок 13.8

Складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа в операторній формі

$$\begin{cases} R_1 I_1(p) + R_2 I_2(p) = U(p); \\ I_3(p) \frac{1}{pC} - R_2 I_2(p) = -\frac{u_C(0)}{p}; \\ I_1(p) = I_2(p) + I_3(p). \end{cases}$$

Виразимо  $I_3(p)$  через  $I_2(p)$ , скориставшись другим рівнянням. Тоді

$$I_3(p) = R_2 p C I_2(p) - u_C(0) C.$$

З першого рівняння

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} I_2(p).$$

Отримані співвідношення підставляємо в третє рівняння системи

$$\frac{U(p)}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} I_2(p) = I_2(p) + R_2 p C I_2(p) - u_C(0) C.$$

Після нескладних перетворень отримуємо

$$I_2(p) = \frac{U(p) + R_1 C u_C(0)}{R_1 R_2 C p + R_1 + R_2}.$$

Знайдемо зображення прикладеної напруги, пам'ятаючи, що

$$A \doteq \frac{A}{p}; \quad e^{-at} \doteq \frac{1}{p + \alpha}.$$

$$\text{Тому } U(p) = U \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\alpha} \right) = \frac{U\alpha}{p(p+\alpha)} \text{ і}$$

$$I_2(p) = \frac{R_1 C u_C(0) p(p+\alpha) + U\alpha}{p(p+\alpha)(R_1 R_2 C p + R_1 + R_2)}.$$

Після підстановки числових значень матимемо

$$I_2(p) = \frac{0,1p(p+50) + 2500}{p(p+50)(0,4p+100)}.$$

Для застосування формули розкладання попередньо знаходимо

$$A(p) = 0,1p(p+50) + 2500;$$

$$B(p) = p(p+50)(0,4p+100);$$

$$B'(p) = (p+50)(0,4p+100) + p(0,4p+100) + 0,4p(p+50).$$

Корені знаменника

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -50 \text{ с}^{-1}; \quad p_3 = -250 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді

$$A(p_1) = 2500; \quad A(p_2) = 2500; \quad A(p_3) = 7500;$$

$$B'(p_1) = 5000; \quad B'(p_2) = -4000; \quad B'(p_3) = 20000.$$

Підставляємо отримані дані в формулу розкладання

$$i_2(t) = \frac{2500}{5000} + \frac{2500}{-4000} e^{-50t} + \frac{7500}{20000} e^{-250t} = 0,5 - 0,625e^{-50t} + 0,375e^{-250t} \text{ А.}$$

Перевіримо правильність розв'язку.

Якщо підставити значення  $t = 0$  в дану формулу, отримаємо залежне початкове значення струму

$$i_2(0_+) = 0,5 - 0,625 + 0,375 = 0,25 \text{ А.}$$

З схеми (див. рис. 13.8, а) видно, що для часу  $t = 0$  струм

$$i_2(0_+) = \frac{u_C(0)}{R_2} = \frac{20}{80} = 0,25 \text{ А.}$$

Отже, обидва значення струмів збігаються.

Тепер перевіримо усталене значення струму, тобто його значення для часу  $t = \infty$ . За цієї умови дві останні складові в формулі для струму  $i_2(t)$  перетворюються на нулі, через що  $i_{2\text{уст}} = 0,5 \text{ А}$ .

З іншого боку, з умови задачі випливає, що для часу  $t = \infty$  напруга джерела має стати постійною  $U = 50 \text{ В}$ . Тому і усталене значення струму дорівнюватиме

$$i_{2\text{уст}} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{50}{100} = 0,5 \text{ А,}$$

що також підтверджує правильність виконаних вище обчислень.

**13.10** Після замикання ключа в електричному колі (рис. 13.9, а) необхідно розрахувати струм  $i_3$ . Прикладена напруга зображена на рис. 13.10, де  $u(t) = Ue^{-\alpha t}$ ,  $U = 100\text{ В}$ ,  $\alpha = 500\text{ с}^{-1}$ , момент часу  $t_1 = 1\text{ мс}$ . Також відомо, що параметри елементів  $R_1 = 10\text{ Ом}$ ,  $R_3 = 40\text{ Ом}$ ,  $C = 100\text{ мкФ}$ ,  $L = 0,19\text{ Гн}$ .

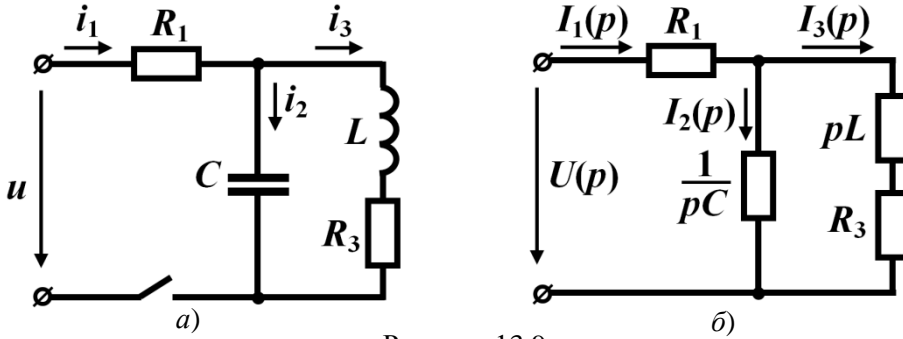


Рисунок 13.9

**Розв’язування**

Щоб розв’язати задачу операторним методом, спочатку визначимо зображення вхідної напруги, застосувавши перетворення Лапласа

$$U(p) = \int_0^{t_1} Ue^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{U}{p + \alpha} - \frac{Ue^{-\alpha t_1}}{p + \alpha} e^{-pt_1}.$$

Другий доданок в цьому рівнянні містить множник  $e^{-pt_1}$ . Це означає, що його оригінал (відповідно до теореми зміщення) є зсунутим на час  $t_1$  і враховувати цю складову потрібно тільки на часовому проміжку  $t > t_1$ .

З урахуванням нульових початкових умов складемо операторну схему, зображену на рис. 13.9, б.

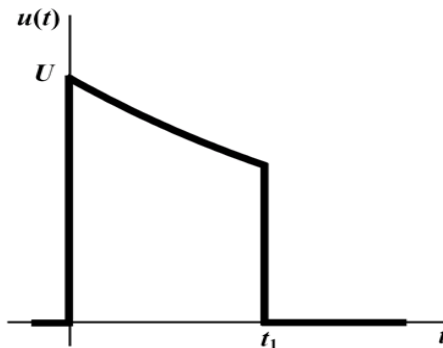


Рисунок 13.10

Зображення струму  $I_3(p)$  розрахуємо через вхідну напругу.

Вхідний операторний опір

$$Z_{\text{ex}}(p) = R_1 + \frac{(pL + R_2) \frac{1}{pC}}{pL + R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{LCR_1 p^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2}{LCp^2 + R_2 Cp + 1}.$$

Тоді вхідний операторний струм  $I_1(p) = \frac{U(p)}{Z_{\text{ex}}(p)}$ , звідки зображення шуканого струму

$$I_3(p) = I_1(p) \frac{1}{pC} = \frac{U(p)}{LCR_1 p^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2}$$

або

$$I_3(p) = \frac{U}{(p + \alpha) [LCR_1 p^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2]} - \frac{Ue^{-\alpha t_1}}{(p + \alpha) [LCR_1 p^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2]} e^{-pt_1}.$$

Після підстановки числових значень отримуємо

$$I_3(p) = \frac{100}{(p + 500)(1,9 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,23p + 50)} - \frac{60,65}{(p + 500)(1,9 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,23p + 50)} e^{-pt_1}.$$

Для першої складової зображення струму застосовуємо теорему розкладання і визначаємо її оригінал

$$i'_3(t) = -5,72e^{-500t} + 3,8e^{-284t} + 1,92e^{-926t} \text{ А.}$$

Отримана функція від часу описує закон зміни струму  $i_3(t)$  на проміжку  $0 < t < t_1$ .

Щоб описати струм  $i_3(t)$  на проміжку  $t > t_1$  потрібно знайти оригінал струму від другої складової його зображення

$$i''_3(t) = 3,47e^{-500(t-t_1)} - 2,3e^{-284(t-t_1)} - 1,16e^{-926(t-t_1)} \text{ А}$$

і додати його до струму  $i'_3(t)$

$$i_3(t) = i'_3(t) + i''_3(t) = 0,745e^{-284t} - 1,03e^{-926t} \text{ А.}$$

Таким чином, остаточною результатом є



$$i_3(t) = \begin{cases} -5,72e^{-500t} + 3,8e^{-284t} + 1,92e^{-926t} \text{ А,} & 0 < t < t_1 \\ 0,745e^{-284t} - 1,03e^{-926t} \text{ А,} & t > t_1. \end{cases}$$

Графік струму  $i_3(t)$  зображено на рис. 13.11.

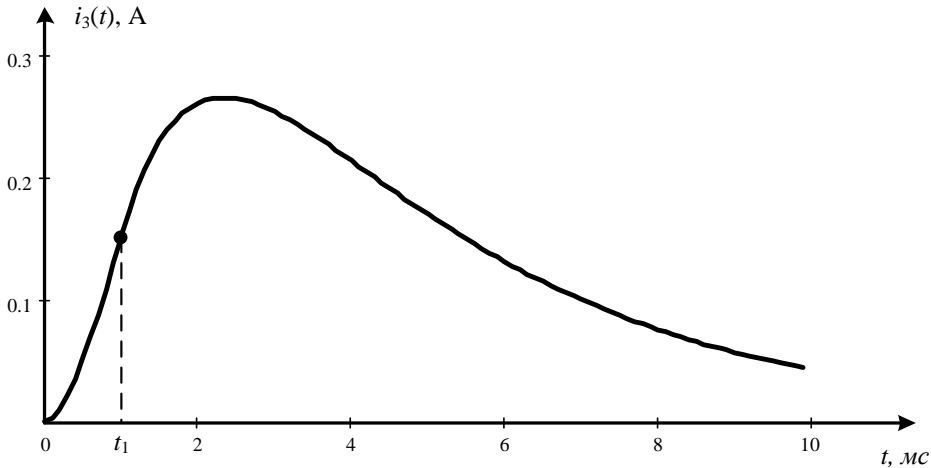


Рисунок 13.11

Правильність розрахунків перевіримо таким чином. В момент вмикання ( $t=0$ ) струму в колі не було, через що  $i_3'(0)$  має дорівнювати нулю

$$i_3'(0) = -5,72 + 3,8 + 1,92 = 0.$$

Струм в індуктивності відповідно до закону комутації стрибкоподібно змінитися не може, тому в момент часу  $t=t_1$  значення струму наприкінці першого часового проміжку  $i_3'(t_1)$  має дорівнювати значенню струму  $i_3(t_1)$  на початку другого проміжку.

В нашому випадку маємо

$$i_3'(t_1) = -5,72e^{-500t_1} + 3,8e^{-284t_1} + 1,92e^{-926t_1} = 0,151 \text{ А,}$$

$$i_3(t_1) = 0,745e^{-284t_1} - 1,03e^{-926t_1} = 0,151 \text{ А.}$$

Отож задачу розв'язано правильно.

**13.11** Визначити перехідні струми в первинній і вторинній обмотках трансформатора без осердя. Порівняти їхні найбільші значення за різних способів вмикання навантаження (рис. 13.12, *a* і *б*). Параметрами кола є параметри джерела синусоїдної напруги  $u = U_m \sin \omega t$ , де  $U_m = 1000 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ , а також  $L_1 = 1 \text{ Гн}$ ,  $L_2 = 0,4 \text{ Гн}$ ,  $M = 0,5 \text{ Гн}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_n = 20 \text{ Ом}$ . Ключ замикається в момент часу  $t = 0$ . Задачу розв'язати операторним методом.

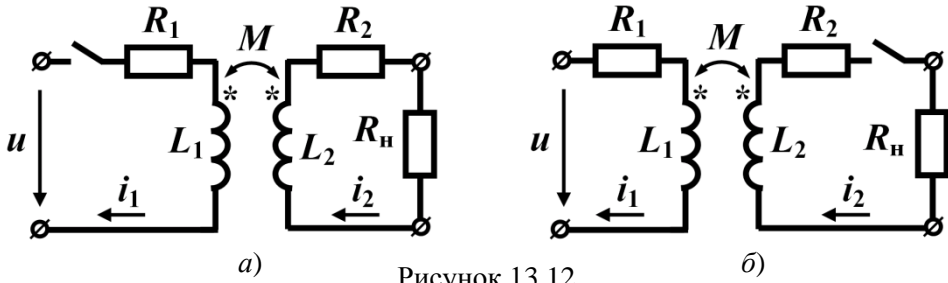


Рисунок 13.12

### Розв'язування

1. Отже, розв'яжемо першу задачу, в якій трансформатор підмикають до джерела синусоїдної напруги (див. рис. 13.12, а).

Операторну схему побудуємо на основі схеми заміщення трансформатора з усуненим індуктивним зв'язком. Оскільки початкові умови нульові, додаткові е.р.с. в операторній схемі відсутні (рис. 13.13, а).

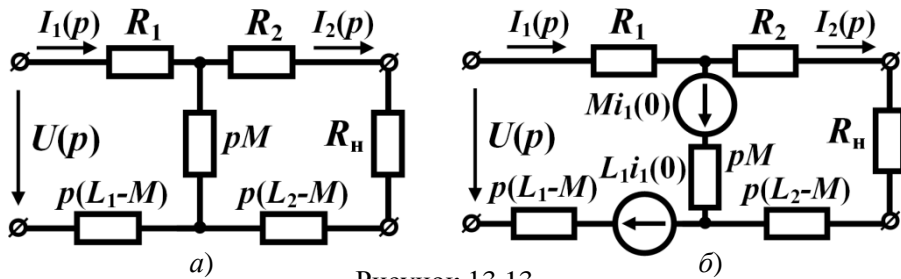


Рисунок 13.13

Визначаємо вхідний опір трансформатора в операторній формі

$$Z_{\text{ex}}(p) = p(L_1 - M) + R_1 + \frac{[R + p(L_2 - M)]pM}{R + p(L_2 - M) + pM} =$$

$$= \frac{p^2(L_1L_2 - M^2) + p(L_2R_1 + L_1R) + R_1R}{pL_2 + R}.$$

В даному співвідношенні  $R = R_2 + R_n$ .

Враховуючи, що операторне зображення прикладної напруги

$$U(p) = \frac{U_m \omega}{p^2 + \omega^2},$$

вхідний операторний струм буде дорівнювати

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z_{\text{ex}}(p)} = \frac{\omega U_m (L_2 p + R)}{(p^2 + \omega^2) [(L_1 L_2 - M^2) p^2 + (L_2 R_1 + L_1 R) p + R_1 R]}$$

або в числових значеннях

$$I_1(p) = \frac{4,44 \cdot 10^5 (0,4p + 22)}{(p^2 + 314^2)(0,15p^2 + 24p + 110)}.$$

Для знаходження оригіналу  $i_1(t)$  застосуємо теорему розкладання. В нашому випадку чисельник

$$A(p) = 4,44 \cdot 10^5 (0,4p + 22),$$

знаменник

$$B(p) = (p^2 + 314^2)(0,15p^2 + 24p + 110),$$

а його похідна

$$B'(p) = 2p(0,15p^2 + 24p + 110) + (p^2 + 314^2)(0,3p + 24).$$

Коренями знаменника є

$$p_1 = j314 \text{ c}^{-1}; p_2 = -j314 \text{ c}^{-1}; p_3 = -4,72 \text{ c}^{-1}; p_4 = -155,3 \text{ c}^{-1}.$$

Тоді

$$A(p_1) = 5,66 \cdot 10^7 e^{j80,66^\circ}; A(p_2) = 5,66 \cdot 10^7 e^{-j80,66^\circ};$$

$$A(p_3) = 8,93 \cdot 10^6; A(p_4) = -17,8 \cdot 10^6$$

та

$$B'(p_1) = 1,037 \cdot 10^7 e^{-j117,2^\circ}; B'(p_2) = 1,037 \cdot 10^7 e^{j117,2^\circ};$$

$$B'(p_3) = 2,23 \cdot 10^6; B'(p_4) = -2,77 \cdot 10^6.$$

Підставляємо ці числові значення в формулу розкладання і для оригіналу струму отримуємо

$$i_1(t) = \sum_1^4 \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} =$$

$$= 10,92 \sin(314t - 72,2^\circ) + 4e^{-4,72t} + 6,4e^{-155,3t} \text{ А.}$$

Для того, щоб визначити момент часу, коли струм досягає свого максимального значення, візьмемо похідну від цього струму і прирівняємо її до нуля

$$\frac{di_1}{dt} = 10,92 \cdot 314 \cos(314t - 72,2^\circ) - 4,72 \cdot 4e^{-4,72t} -$$

$$- 155,3 \cdot 6,4e^{-155,3t} = 0.$$

Розв'язуємо це рівняння, скориставшись, наприклад, програмою Mathcad, звідки отримуємо, що в момент часу  $t_1 = 8,76 \text{ мс}$  струм досягає максимального значення, яке становить 16,365 А.

Операторне значення струму у вторинній обмотці

$$I_2(p) = I_1(p) \frac{pM}{p(L_2 - M) + pM + R} =$$

$$= \frac{U_m \omega M p}{(p^2 + \omega^2) \left[ (L_1 L_2 - M^2) p^2 + (L_2 R_1 + L_1 R) p + R_1 R \right]}$$

або

$$I_2(p) = \frac{2,22 \cdot 10^5 p}{(p^2 + 314^2) (0,15 p^2 + 24 p + 110)}.$$

Струм вторинної обмотки як функція часу

$$i_2 = 13,45 \sin(\omega t - 62,8^\circ) - 0,47 e^{-4,72t} + 12,44 e^{-155,3t} \text{ А.}$$

Свого найбільшого значення 16,43 А цей струм досягає в момент часу  $t_2 = 8,078 \text{ мс}$ .

2. Розв'яжемо другу задачу, в якій первинна обмотка трансформатора вже перебуває під напругою в той час, коли вмикається навантаження вторинної обмотки (див. рис. 13.12, б). В цьому випадку в первинній обмотці до комутації протікав струм  $i_1(0)$ , внаслідок чого у вторинній обмотці з'являється е.р.с. взаємодуції  $M i_1(0)$ , яку слід враховувати в операторній схемі заміщення. Тоді рівняння, складені за методом контурних струмів для операторної схеми, зображеної на рис. 13.13, б, матимуть вигляд:

$$\begin{cases} J_1(p)(pL_1 + R_1) - J_2(p)pM = U(p) + L_1 i_1(0) + M i_1(0), \\ -J_1(p)pM + J_2(p)(R + pL_2) = -M i_1(0). \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему і отримуємо

$$I_1(p) = J_1(p) = \frac{U_m \omega (pL_2 + R) + i_1(0)(p^2 + \omega^2) \left[ p(L_1 L_2 - M^2) + RL_1 \right]}{(p^2 + \omega^2) \left[ p^2(L_1 L_2 - M^2) + p(RL_1 + R_1 L_2) + RR_1 \right]},$$

$$I_2(p) = J_2(p) = \frac{pMU_m \omega - MR_1 i_1(0)(p^2 + \omega^2)}{(p^2 + \omega^2) \left[ p^2(L_1 L_2 - M^2) + p(RL_1 + R_1 L_2) + RR_1 \right]}.$$

Розрахуємо значення вхідного струму для моменту  $t = 0$ .

До комутації підімкненою до джерела була тільки первинна обмотка, тому діюче комплексне значення вхідного струму

$$I_1 = \frac{\underline{U}}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{1000}{5 + j314} = 3,185 e^{-j89,1^\circ} \text{ А,}$$

а його миттєве значення  $i_1 = 4,5 \sin(\omega t - 89,1^\circ) \text{ А}$ , звідки  $i_1(0) = -4,5 \text{ А}$ .

Підставляємо числові значення параметрів

$$I_1(p) = \frac{4,44 \cdot 10^5 (0,4p + 22) - 4,5(p^2 + \omega^2)(0,15p + 22)}{(p^2 + 314^2)(0,15p^2 + 24p + 110)},$$

$$I_2(p) = \frac{2,22 \cdot 10^5 p + 11,25(p^2 + \omega^2)}{(p^2 + 314^2)(0,15p^2 + 24p + 110)}.$$

Застосуємо теорему розкладання і знаходимо оригінали струмів

$$i_1(t) = 10,92 \sin(\omega t - 72,2^\circ) - 0,27e^{-4,72t} + 6,17e^{-155,3t} \text{ А},$$

$$i_2(t) = 13,45 \sin(\omega t - 62,8^\circ) + 0,03e^{-4,72t} + 11,93e^{-155,3t} \text{ А}.$$

Досліджуючи значення струмів на максимум, отримуємо такі результати: вхідний струм досягає свого найбільшого значення 12,21 А в момент часу  $t_1 = 8,79$  мс, а вихідний – в момент  $t_2 = 8,09$  мс і цей максимум становить 16,77 А.

Порівнюючи результати, можна дійти висновку, що для кола із заданими параметрами найбільш сприятливим для первинної обмотки є вмикання навантаження, коли первинна обмотка вже перебуває під дією напруги.

### Задачі для самостійного розв'язування

**13.12** В електричному колі (рис. 13.14, а) потрібно розрахувати операторним методом перехідний струм  $i_2(t)$ . Параметри кола такі:  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $L = 0,12$  Гн,  $U = 200$  В.

*Відповідь:*  $i_2(t) = 4e^{-100t}$  А.

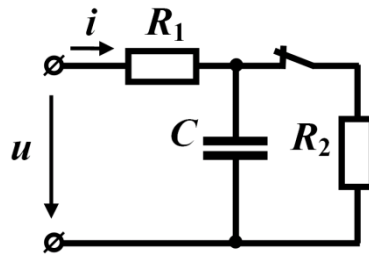
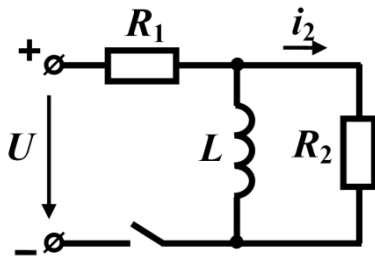


Рисунок 13.14

**13.13** Розрахувати перехідний струм  $i(t)$  операторним методом, якщо ключ розмикається в момент часу  $t = 0$  (рис. 13.14, б). Параметри кола:  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $C = 200$  мкФ,  $u(t) = 200 \sin(314t + 60^\circ)$  В.

*Відповідь:*  $i(t) = 7,82 \sin(314t + 98,5^\circ) - 0,95e^{-250t}$  А.

**13.14** Розв'язати задачу 12.1 операторним методом.

**13.15** Знайти зображення функцій:

а)  $f(t) = 2 - 4e^{-20t}$ ; б)  $f(t) = 5 \sin 20t + 3e^{-50t}$ ; в)  $f(t) = 3te^{-10t}$ .

Підказка. Для розв'язання задачі потрібно скористатися формулою інтегрального перетворення Лапласа  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ .

**Відповідь:** а)  $F(p) = \frac{40 - 2p}{p(p+40)}$ ; б)  $F(p) = \frac{3p^2 + 100p + 6200}{(p+50)(p^2+400)}$ ; в)  $F(p) = \frac{3}{(p+10)^2}$ .

**13.16** Скористатися формулою розкладання і розрахувати оригінали таких

операторних зображень: а)  $F(p) = \frac{3p+2}{2p^2+10p+12}$ ; б)  $F(p) = \frac{4p^3+2p^2+4p+1}{3p^2+4p+8}$ ;

в)  $F(p) = \frac{2p^2+40p+100}{p^3+20p+164p}$ .

**Відповідь:** а)  $f(t) = 3,5e^{-3t} - 2e^{-2t}$ ; б) оскільки  $m > n$ , за допомогою теореми розкладання визначити оригінал даної функції неможливо; в)  $f(t) = 0,61 + 2,23e^{-10t} \sin(8t+38,7^\circ)$ .

**13.17** Для електричного кола, зображеного на рис. 13.15, а:

а) скласти операторну схему і розрахувати додаткові е.р.с., якщо  $U = 240$  В,  $L_1 = 0,2$  Гн,  $L_3 = 0,4$  Гн,  $C = 200$  мкФ,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = R_4 = 20$  Ом;

б) записати рівняння в операторній формі за методом контурних струмів.

**Відповідь:**  $i_1(0) = 8$  А;  $i_3(0) = 0$ ;  $u_C(0) = 160$  В.

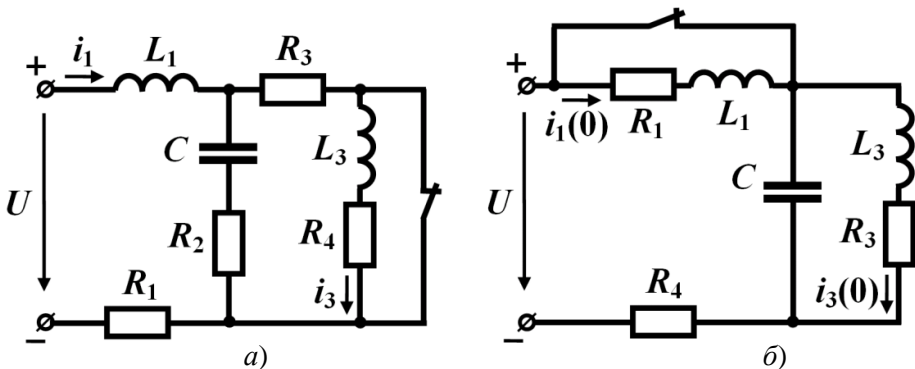


Рисунок 13.15

**13.18** Для електричного кола, зображеного на рис. 13.15, б:

а) скласти операторну схему і розрахувати додаткові е.р.с., якщо  $R_1 = 30$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом,  $R_4 = 10$  Ом,  $L_1 = L_3 = 0,2$  Гн,  $C = 200$  мкФ,  $U = 300$  В;

б) записати рівняння в операторній формі за методом вузлових потенціалів.

**Відповідь:**  $i_1(0) = 0$ ;  $i_3(0) = 10$  А;  $u_C(0) = 200$  В.

**13.19** До електричного кола, показаного на рис. 13.16, а, прикладають напругу  $u(t) = 60 + 30e^{-200t}$  В. Необхідно операторним методом розрахувати струм  $i_2(t)$ , якщо  $R_1 = 120$  Ом,  $R_2 = 80$  Ом,  $L = 0,2$  Гн.

**Відповідь:**  $i_2(t) = 1,2e^{-240t} - 0,75e^{-200t}$  А.

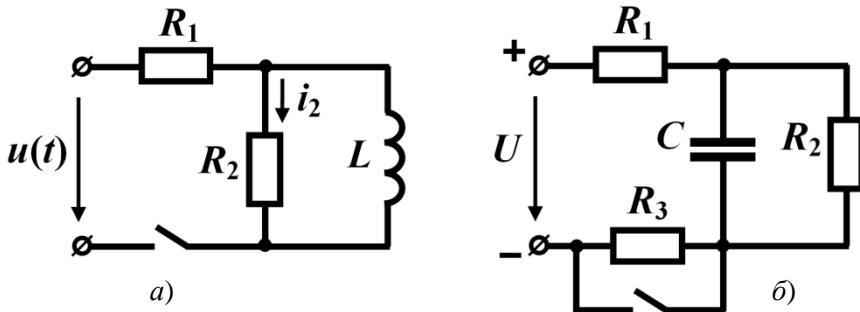


Рисунок 13.16

**13.20** Операторним методом визначити закон зміни напруги на ємності під час перехідного процесу в колі, зображеному на рис. 13.16, б, якщо  $R_1 = 40$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 40$  Ом,  $C = 200$  мкФ,  $U = 300$  В.

**Відповідь:**  $u_C(t) = 100 - 40e^{-375t}$  В.

**13.21** На рис. 13.17, а і б наведено графіки двох функцій. Записати для них аналітичні вирази та знайти їхні зображення.

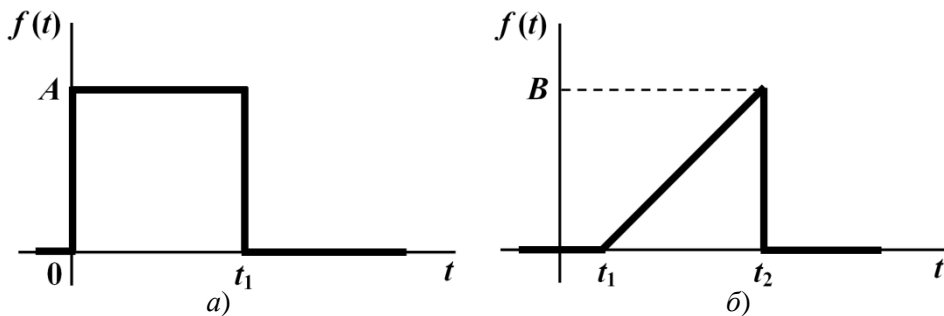


Рисунок 13.17

**Відповідь:** а)  $F(p) = \frac{A}{p}(1 - e^{-pt_1})$ ; б)  $F(p) = \frac{B(e^{-pt_1} - e^{-pt_2})}{p^2(t_2 - t_1)} - \frac{Be^{-pt_2}}{p}$ .

## Розділ 14

# ВИКОРИСТАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ТА ІМПУЛЬСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

В розділі наведено приклади знаходження перехідних і імпульсних характеристик лінійних кіл та їх застосування для розрахунку перехідних процесів, спричинених дією напруг складної форми.

В першій частині цього розділу розглянуто приклади розрахунку кіл з *нульовими початковими умовами*.

**14.1** Розрахувати перехідну характеристику для струму  $i_2$  (рис. 14.1), якщо  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $L = 0,2$  Гн.

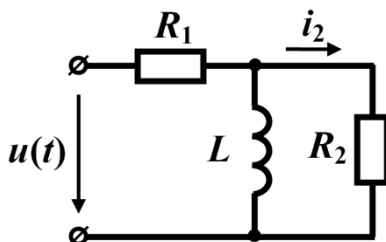


Рисунок 14.1

### Розв'язування

Спочатку зупинимося на деяких загальних зауваженнях щодо перехідних характеристик.

*Перехідна характеристика* кола чисельно дорівнює його реакції на одиничну ступеневу дію (функцію Хевісайда) за нульових початкових умов. Зазвичай її позначають як  $h(t)$  з відповідним індексом. Наприклад, в даній задачі потрібно знайти перехідну характеристику для струму  $i_2$ , яку будемо позначати як  $h_{i_2}(t)$ .

Ця характеристика має чисельно дорівнювати перехідному струмові  $i_2$ , що з'явиться, коли до кола за нульових початкових умов підімкнати джерело постійної напруги в 1 В.

Наведемо, на нашу думку, найпростіший метод розрахунку перехідних характеристик. Для цього необхідно побудувати операторну схему заданого кола. Оскільки початкові умови є нульовими, то в такій схемі додаткові е.р.с. відсутні. Запишемо зображення шуканої реакції  $I_2(p)$  через параметри кола і вхідну на-



пругу  $U(p)$

$$I_2(p) = \frac{LpU(p)}{L(R_1 + R_2)p + R_1R_2}.$$

Відношення зображення реакції кола, яку позначимо як  $X(p)$ , до зображення вхідної дії  $F(p)$  називається *передатною функцією кола*  $K(p)$ , тобто

$$K(p) = \frac{X(p)}{F(p)}.$$

Передатна функція дозволяє визначити зображення шуканої перехідної характеристики  $H(p)$ . За одиничної ступеневої дії зв'язок між ними визначається як

$$H(p) = \frac{K(p)}{p}.$$

Звідси неважко перейти до оригіналу – самої перехідної характеристики  $h_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} H(p)$ . Для нашого прикладу передатна функція

$$K(p) = \frac{I_2(p)}{U(p)} = \frac{Lp}{L(R_1 + R_2)p + R_1R_2} = \frac{0,2p}{10p + 600},$$

зображення перехідної характеристики для струму  $i_2$

$$H(p) = \frac{K(p)}{p} = \frac{0,2}{10p + 600},$$

а сама перехідна характеристика, яку знаходимо за теоремою розкладання,

$$h_{i_2}(t) = 0,02e^{-60t} \text{ См.}$$

**14.2** Відшукати перехідну характеристику для напруги на ємності  $h_{u_c}(t)$  (рис. 14.2, а), якщо  $L = 0,2$  Гн,  $C = 200$  мкФ,  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом.

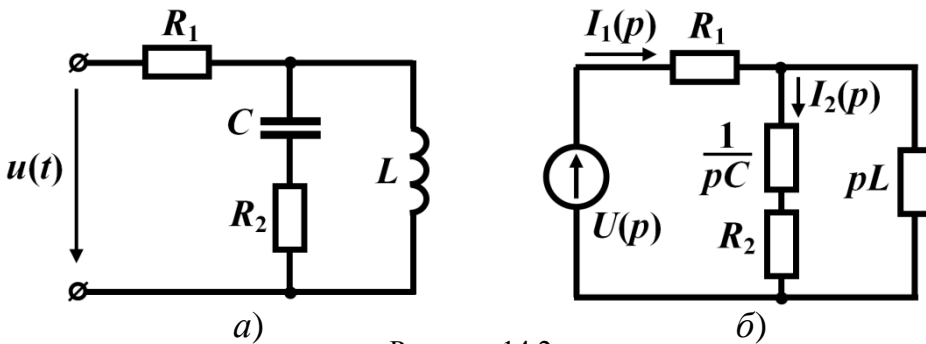


Рисунок 14.2

### Розв'язування

Операторну схему за нульових початкових умов зображено на рис. 14.2, б. В цій схемі операторний вхідний струм

$$I_1(p) = \frac{U(p)(LCp^2 + R_2Cp + 1)}{(R_1 + R_2)LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1},$$

зображення струму через ємність

$$I_2(p) = I_1(p) \frac{pL}{R_2 + \frac{1}{pC} + pL} = \frac{U(p)LCp^2}{(R_1 + R_2)LCp^2 + (R_1R_2Cp + L)p + R_1}$$

і операторна напруга на ній

$$U_C(p) = \frac{U(p)Lp}{(R_1 + R_2)LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1}.$$

Тоді передатна функція

$$K(p) = \frac{U_C(p)}{U(p)} = \frac{Lp}{(R_1 + R_2)LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1},$$

а зображення перехідної характеристики

$$H(p) = \frac{K(p)}{p} = \frac{L}{(R_1 + R_2)LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1} = \frac{0,2}{10^{-3}p^2 + 0,22p + 5}.$$

Оригінал перехідної характеристики визначаємо за допомогою формули розкладання

$$h_{u_c}(t) = 1,19e^{-25,75t} - 1,19e^{-194,25t}.$$

**14.3** Розрахувати напругу  $u_2$  на виході чотирьохполюсника (рис. 14.3) після того, як його підімкнули до джерела е.р.с. з напругою, графік якої показано на рис. 14.4, де  $U_1 = 20$  В,  $U_2 = 40$  В,  $U_3 = -15$  В,  $t_1 = 2$  мс,  $t_2 = 4$  мс. Параметри кола:  $R = 10$  Ом,  $C = 200$  мкФ. Початкові умови нульові.

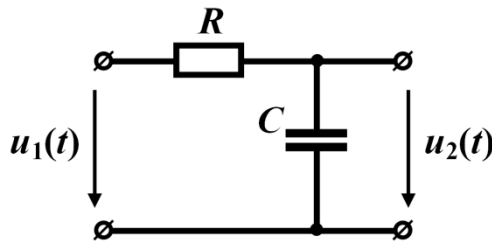


Рисунок 14.3

### Розв'язування

Запропонована задача належить до класу задач, в яких причиною перехідно-

го процесу є дія *ступеневої* вхідної напруги. Водночас нагадаємо, що ми досліджуємо задачі з *нульовими початковими умовами*. В подібних задачах розв'язки шукають окремо для кожного інтервалу часу, протягом якого напруга залишається незмінною. Для цього застосовують перехідні характеристики, приклади знаходження яких наведено в попередніх задачах.

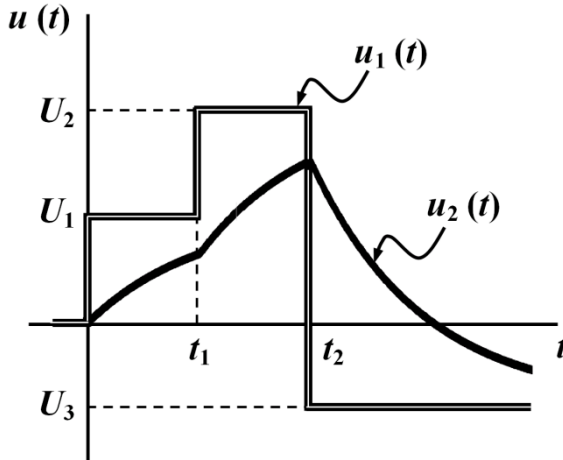


Рисунок 14.4

Вихідною напругою чотириполюсника є напруга на ємності, для якої перехідна характеристика  $h_{uc} = 1 - e^{-500t}$ .

Отже для першого інтервалу часу  $0 \leq t < t_1$

$$u_2^{(1)}(t) = U_1 h_{uc}(t) = 20(1 - e^{-500t}) \text{ В.}$$

Для другого інтервалу  $t_1 < t < t_2$

$$\begin{aligned} u_2^{(2)}(t) &= U_1 h_{uc}(t) + (U_2 - U_1) h_{uc}(t - t_1) = 20(1 - e^{-500t}) + 20[1 - e^{-500(t-t_1)}] = \\ &= 40 - 20e^{-500t} - 20e^{-500t} e^{500 \cdot 0,002} = 40 - 74,36e^{-500t} \text{ В.} \end{aligned}$$

Для останнього інтервалу  $t > t_2$  напруга

$$\begin{aligned} u_2^{(3)}(t) &= U_1 h_{uc}(t) + (U_2 - U_1) h_{uc}(t - t_1) + (U_3 - U_2) h_{uc}(t - t_2) = \\ &= 20(1 - e^{-500t}) + 20[1 - e^{-500(t-0,002)}] - 55[1 - e^{-500(t-0,004)}] = \\ &= -15 + 332e^{-500t} \text{ В.} \end{aligned}$$

Таким чином,

$$u_2(t) = \begin{cases} 20(1 - e^{-500t}), \text{ В,} & 0 < t < t_1, \\ 40 - 74,36e^{-500t}, \text{ В,} & t_1 < t < t_2, \\ -15 + 332e^{-500t}, \text{ В,} & t > t_2. \end{cases}$$

Графік цієї напруги побудований на рис. 14.4.

Проведемо перевірку правильності отриманих результатів. З цією метою скористаємося законом комутації, згідно з яким напруга на ємності миттєво змінюватися не може, навіть у випадку, коли напруга на вході змінюється стрибкоподібно. Відповідно до цього мають виконуватися співвідношення

$$u_2^{(1)}(0) = 0; u_2^{(1)}(t_1) = u_2^{(2)}(t_1); u_2^{(2)}(t_2) = u_2^{(3)}(t_2).$$

Отже перевіряємо:

а) для першого співвідношення:

$$u_2^{(1)}(0) = 20(1 - e^{-500 \cdot 0}) = 0;$$

б) для другого співвідношення:

$$u_2^{(1)}(t_1) = 20(1 - e^{-500 \cdot 0,002}) = 12,64 \text{ В},$$

$$u_2^{(2)}(t_1) = 40 - 74,36e^{-500 \cdot 0,002} = 12,64 \text{ В};$$

в) для третього співвідношення:

$$u_2^{(2)}(t_2) = 40 - 74,36e^{-500 \cdot 0,004} = 29,94 \text{ В},$$

$$u_2^{(3)}(t_2) = -15 + 332e^{-500 \cdot 0,004} = 29,93 \text{ В}.$$

Отримані результати свідчать, що розрахунки виконано правильно.

**14.4** До електричного кола (рис. 14.5) в момент часу  $t = 0$  підмикають напругу  $u(t) = (20 - 10e^{-50t})$  В. Знайти, як змінюватиметься вхідний струм протягом перехідного процесу, якщо  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $L = 0,3$  Гн.

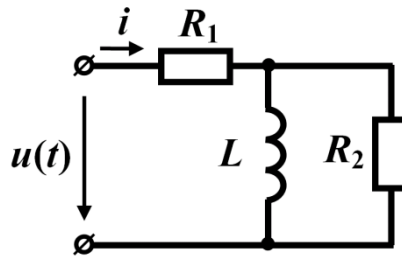


Рисунок 14.5

### Розв'язування

Якщо вхідна напруга задана аналітично, реакцію зручно розраховувати за допомогою *інтеграла Дюамеля*, для чого попередньо знаходять перехідну характеристику кола відносно шуканої реакції.

Зображенням перехідної характеристики для вхідного струму є

$$H(p) = \frac{Lp + R_2}{p[(R_1 + R_2)Lp + R_1R_2]} = \frac{0,3p + 30}{p(12p + 300)},$$

а її оригінал –

$$h_i(t) = 0,1 - 0,075e^{-25t} \text{ СМ.}$$

Реакція кола через інтеграл Дюамеля записується у вигляді

$$x(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

де  $u(0)$  – значення напруги, прикладеної в момент часу  $t = 0$ ;

$u'(\tau)$  – похідна функції  $u(\tau)$ , за умови  $t = \tau$ .

В нашій задачі  $u(0) = 10 \text{ В}$ ,  $u'(\tau) = 500e^{-50\tau} \text{ В}$ , а перехідна характеристика  $h(t-\tau) = 0,1 - 0,075e^{-25(t-\tau)} \text{ СМ}$ , тому

$$i(t) = 10(0,1 - 0,075e^{-25t}) + \int_0^t 500e^{-50\tau} [0,1 - 0,075e^{-25(t-\tau)}] d\tau.$$

Після інтегрування та незначних перетворень, отримуємо

$$i(t) = 2 - 2,25e^{-25t} + 0,5e^{-50t} \text{ А.}$$

**14.5** В електричному колі (рис. 14.6) за нульових початкових умов вмикають напругу  $u(t)$ , зміна в часі якої зображена графічно на рис. 14.7, де напруга  $u_2(t) = 68,7 - 132,4e^{-400t} \text{ В}$ . Визначити форму струму  $i_C(t)$  в ємності, якщо  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $C = 250 \text{ мкФ}$ ,  $U_0 = 20 \text{ В}$ ,  $U_1 = 40 \text{ В}$ ,  $t_1 = 1 \text{ мс}$ ,  $t_2 = 2,5 \text{ мс}$ .

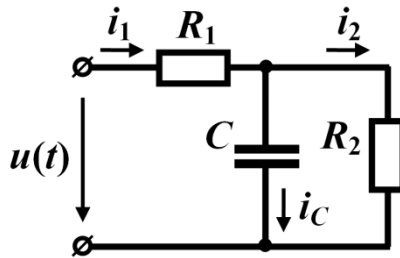


Рисунок 14.6

### Розв'язування

Якщо прикладену напругу задано послідовністю різних аналітичних виразів на відповідних відрізках часу, то в таких випадках реакцію кола розраховують окремо для кожного з заданих часових інтервалів. В нашому випадку за умовою задачі таких інтервалів є *три*.

На *першому часовому проміжку*  $0 < t < t_1$  струм через ємність обумовлений напругами  $U_0$  та  $u_1(t)$  і розраховується за допомогою інтеграла Дюамеля (див. попередню задачу)

$$i_C(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (14.1)$$

де  $u_1(0) = U_0 = 20 \text{ В}$  – значення напруги  $u_1(t)$  в момент  $t = 0$ ;

$h(t) = 0,2e^{-1000t} \text{ См}$  – перехідна характеристика для струму через ємність, яку розраховують у спосіб, викладений в попередніх задачах;

$u_1'(\tau)$  – похідна напруги  $u_1(\tau)$ .

З графіка видно, що

$$u_1(t) = \frac{U_1 - U_0}{t_1}t + U_0 = 2 \cdot 10^4 t + 20 \text{ В},$$

звідки  $u_1'(\tau) = 2 \cdot 10^4 \text{ В} \cdot \text{с}^{-1}$ .

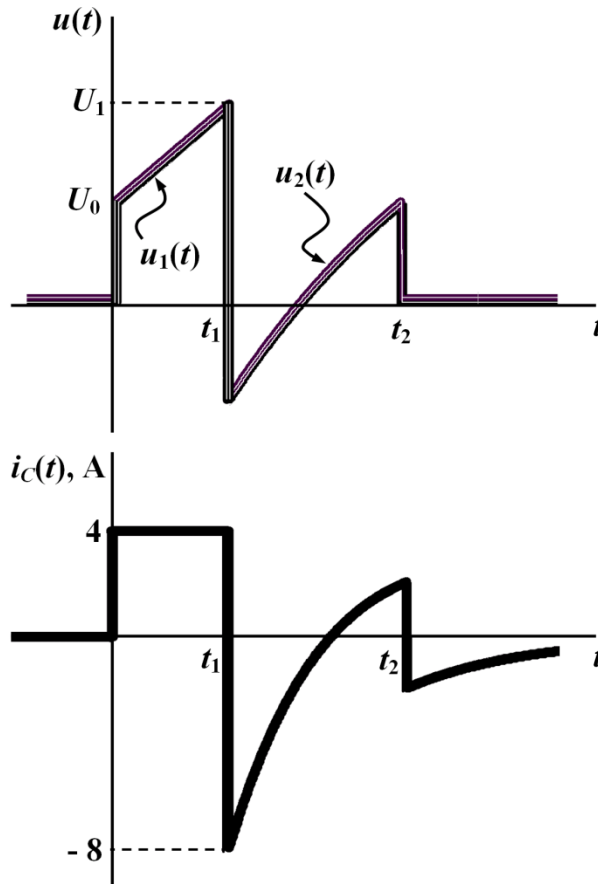


Рисунок 14.7

Підставимо числові значення до формули (14.1) і отримаємо закон зміни

струму через ємність на досліджуваному інтервалі

$$i_C = 20 \cdot 0,2e^{-1000t} + \int_0^t 2 \cdot 10^4 \cdot 0,2e^{-1000(t-\tau)} d\tau = 4 \text{ A.}$$

На другому проміжку  $t_1 < t < t_2$  струм через ємність

$$i_C(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + [u_2(t_1) - u_1(t_1)]h(t-t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Визначаємо всі величини, що входять до складу цього співвідношення. Зокрема:

$$u_1(t_1) = U_1 = 40 \text{ В}; \quad u_2(t_1) = 68,7 - 132,4e^{-400 \cdot 0,001} = -20 \text{ В};$$

$$u_2'(\tau) = 5,3 \cdot 10^4 e^{-400\tau} \text{ В} \cdot \text{с}^{-1}.$$

З урахуванням числових значень:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= 20 \cdot 0,2e^{-1000t} + \int_0^{t_1} 2 \cdot 10^4 \cdot 0,2e^{-1000(t-\tau)} d\tau - 60 \cdot 0,2e^{-1000(t-t_1)} + \\ &+ \int_{t_1}^t 5,3 \cdot 10^4 e^{-400\tau} \cdot 0,2e^{-1000(t-\tau)} d\tau = 17,67e^{-400t} - 53,94e^{-1000t} \text{ A.} \end{aligned}$$

На третьому проміжку  $t > t_2$  струм

$$\begin{aligned} i_C(t) &= u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + [u_2(t_1) - u_1(t_1)]h(t-t_1) + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau + [0 - u_2(t_2)]h(t-t_2) = \\ &= 20 \cdot 0,2e^{-1000t} + \int_0^{t_1} 2 \cdot 10^4 \cdot 0,2e^{-1000(t-\tau)} d\tau - 60 \cdot 0,2e^{-1000(t-t_1)} + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} 5,3 \cdot 10^4 e^{-400\tau} \cdot 0,2e^{-1000(t-\tau)} d\tau - 20 \cdot 0,2e^{-1000(t-t_2)} = -23,6e^{-1000t} \text{ A.} \end{aligned}$$

Таким чином загальним розв'язком задачі є

$$i_C(t) = \begin{cases} 4 \text{ A}, & 0 < t < t_1, \\ 17,67e^{-400t} - 53,94e^{-1000t} \text{ A}, & t_1 < t < t_2, \\ -23,6e^{-1000t} \text{ A}, & t > t_2. \end{cases}$$

Залежність струму від часу побудовано на рис. 14.7.

Перевіримо, чи є результат розрахунку правильним. Для цього на кожному часовому проміжку знайдемо струми у вітках і перевіримо їх на відповідність

першому закону Кірхгофа.

1. Інтервал  $0 < t < t_1$ .

Напруга на ємності

$$u_{C1} = \frac{1}{C} \int i_C dt = \frac{1}{250 \cdot 10^{-6}} \int 4 dt = 16 \cdot 10^3 t + A_1,$$

де  $A_1$  – стала інтегрування, яку знаходимо з початкових умов: в момент часу  $t = 0$  напруга  $u_C(0) = 0$ , оскільки відповідно до завдання початкові умови в задачі мають бути нульовими. Відтак  $A_1 = 0$  і напруга на ємності

$$u_{C1} = 16 \cdot 10^3 t \text{ В.}$$

Тоді струми:

$$i_1 = \frac{u_1(t) - u_{C1}(t)}{R_1} = \frac{2 \cdot 10^4 t + 20 - 16 \cdot 10^3 t}{5} = 0,8 \cdot 10^3 t + 4 \text{ А;}$$

$$i_2 = \frac{u_C}{R_2} = 0,8 \cdot 10^3 t \text{ А,}$$

що відповідає першому закону Кірхгофа –  $i_1 = i_C + i_2$ .

2. На другому часовому проміжку  $t_1 < t < t_2$  напруга на ємності

$$\begin{aligned} u_{C2} &= \frac{1}{C} \int i_{C2} dt = \frac{1}{250 \cdot 10^{-6}} \int (17,67e^{-400t} - 53,94e^{-1000t}) dt = \\ &= 215,8e^{-1000t} - 176,7e^{-400t} + A_2. \end{aligned}$$

Сталу інтегрування  $A_2$  знаходимо з початкових умов відносно другого інтервалу, оскільки відповідно до закону комутації

$$u_C(t_{1+}) = u_C(t_{1-}).$$

Значення напруги  $u_C(t_{1-})$  розраховуємо за формулою, отриманою для першого проміжку

$$u_{C1}(t_{1-}) = 16 \cdot 10^3 t_1 = 16 \text{ В,}$$

що дозволяє знайти  $A_2$ .

Дійсно, для початку другого інтервалу маємо

$$u_{C2}(t_{1+}) = 215,8e^{-1000t_1} - 176,7e^{-400t_1} + A_2 = u_{C1}(t_{1-}) = 16 \text{ В,}$$

звідки  $A_2 = 55$ .

Отже, напруга на ємності на другому часовому проміжку змінюватиметься за законом

$$u_{C2} = 55 + 215,8e^{-1000t} - 176,7e^{-400t} \text{ В.}$$

Тоді струми



$$i_1 = \frac{u_2(t) - u_{C2}(t)}{R_1} = 2,74 + 8,82e^{-400t} - 43,15e^{-1000t} \text{ А},$$

$$i_2 = \frac{u_C}{R_2} = 2,75 + 10,79e^{1000t} - 8,835e^{-400t} \text{ А}.$$

Тобто перший закон Кірхгофа і за цих значень струмів виконується. Аналогічно виконується перевірка і для третього часового інтервалу.

**14.6** Розрахувати імпульсну характеристику для струму  $i_2$  в електричному колі, наведеному в задачі 14.1.

### Розв'язування

Імпульсною характеристикою кола  $g(t)$  називають реакцію кола на одиничну імпульсну дію за нульових початкових умов.

Одинична імпульсна функція (дельта-функція або функція Дірака), яку позначають як  $\delta(t)$ , скрізь, де  $t \neq 0$ , дорівнює нулю, а в момент  $t = 0$  прямує до нескінченності в такий спосіб, щоб її площа дорівнювала одиниці, тобто інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Операторне зображення імпульсної функції  $\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ , тому

$$A\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} A.$$

Імпульсну характеристику, як і перехідну, також можна розрахувати операторним методом. Її зображення дорівнює передатній функції, тобто

$$G(p) = K(p).$$

Водночас імпульсна характеристика може бути визначена як похідна від перехідної характеристики

$$g(t) = h'(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Звертаємо увагу, якщо в момент часу  $t = 0$  перехідна характеристика  $h(t) \neq 0$ , то в цьому випадку її похідна є *узгальненою* і має визначатися як

$$g(t) = h_1'(t) + h(0)\delta(t),$$

де функція

$$h_1(t) = \begin{cases} h(t), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

є такою ж, як і перехідна характеристика  $h(t)$  для всіх  $t$ , окрім моменту  $t = 0$ , де значення цієї функції стає рівним нулю. Тому і похідна  $h_1'(t)$  дорівнює похідній

перехідної характеристики у всіх інших точках, крім початкового моменту часу. В цій точці стрибок перехідної характеристики в наведеному співвідношенні враховує друга складова  $h(0)\delta(t)$ .

Визначимо імпульсну характеристику двома способами.

1. В прикладі 14.1 розраховано передатну функцію для струму  $i_2$

$$K(p) = \frac{0,2p}{10p + 600}.$$

Оскільки  $G(p) = K(p)$ , то ця ж функція водночас є і зображенням імпульсної характеристики, тобто

$$G(p) = \frac{0,2p}{10p + 600}.$$

Для того, щоб відшукати оригінал, застосуємо теорему розкладання. У наведеній формулі степені чисельника і знаменника є однаковими, тому скористатися безпосередньо формулою розкладання не можна. З метою зниження степеня чисельника поділимо поліном чисельника на поліном знаменника, внаслідок чого отримаємо

$$G(p) = 0,02 - \frac{12}{10p + 600}.$$

Оригіналом першого доданку є дельта-функція  $0,02\delta(t)$ .

Стосовно ж другої складової відтепер можна застосувати формулу розкладання, в результаті чого отримуємо

$$g_{i_2}(t) = 0,02\delta(t) - 1,2e^{-60t} \text{ СМ} \cdot \text{с}^{-1}.$$

2. Розрахуємо імпульсну характеристику як узагальнену похідну від перехідної характеристики. Функцію цієї характеристики було отримано під час розв'язування задачі 14.1

$$h_{i_2}(t) = 0,02e^{-60t} \text{ СМ}.$$

Тоді імпульсна характеристика

$$g_{i_2}(t) = h'_{i_2}(t) + h_{i_2}(0)\delta(t) = -1,2e^{-60t} + 0,02\delta(t) \text{ СМ} \cdot \text{с}^{-1},$$

що збігається з попереднім розрахунком.

**14.7** Визначити імпульсну характеристику для напруги на ємності електричного кола задачі 14.2.

### Розв'язування

Перехідна характеристика для напруги на ємності в зазначеній задачі отримана у вигляді

$$h_{u_c}(t) = 1,19e^{-25,75t} - 1,19e^{-194,25t}.$$

В момент  $t = 0$  її значення  $h_{u_c}(0) = 0$ , тому імпульсну характеристику кола відносно напруги на ємності можна визначити як

$$g_{u_c}(t) = h'_{u_c}(t) = 231,16e^{-194,25t} - 30,64e^{-25,75t} \text{ с}^{-1}.$$

**14.8** На вхід електричного кола, яке зображене на рис. 14.8 за нульових початкових умов подається напруга  $u(t) = 60e^{-\frac{500}{3}t}$  В. За допомогою імпульсної характеристики розрахувати струм  $i(t)$ , якщо  $C = 250$  мкФ,  $R = 10$  Ом,  $L = 0,18$  Гн.

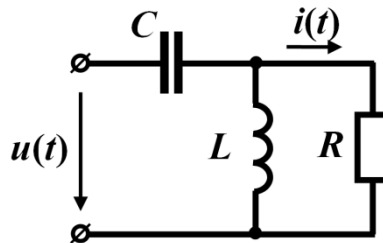


Рисунок 14.8

### Розв'язування

Операторне зображення струму

$$I(p) = \frac{U(p)LCp^2}{RLCp^2 + Lp + R}.$$

Тоді передатна функція і водночас зображення імпульсної характеристики

$$G(p) = K(p) = \frac{LCp^2}{RLCp^2 + Lp + R} = \frac{45 \cdot 10^{-6} p^2}{0,45 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,18p + 10}.$$

З метою застосування формули розкладання подамо функцію  $G(p)$  в такому вигляді:

$$G(p) = 0,1 - \frac{18 \cdot 10^{-3} p + 1}{0,45 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,18p + 1}.$$

Імпульсна характеристика відносно струму є оригіналом цієї функції

$$g_i(t) = 0,1\delta(t) + \frac{5}{3}e^{-\frac{200}{3}t} - \frac{125}{3}e^{-\frac{1000}{3}t}.$$

Для знаходження самого струму  $i(t)$  скористаємося цією характеристикою, застосувавши інтеграл Дюамеля

$$i(t) = \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t 60e^{-\frac{500}{3}\tau} \left[ \frac{5}{3}e^{-\frac{200}{3}(t-\tau)} - \frac{125}{3}e^{-\frac{1000}{3}(t-\tau)} + 0,1\delta(t-\tau) \right] d\tau.$$

Розрахунок перших двох складових не є складним, а щодо останньої, то доцільно скористатися відомим співвідношенням

$$\int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t).$$

Остаточно функція шуканого миттєвого струму має вигляд

$$i(t) = 15e^{-\frac{1000}{3}t} + e^{-\frac{200}{3}t} - 10e^{-\frac{500}{3}t}.$$

Проведемо просту перевірку правильності розрахунку. Для  $t = 0$  вхідна напруга дорівнює  $u(0) = 60$  В, а напруга на ємності через нульові початкові умови дорівнює нулю, тому струм  $i(0)$  має дорівнювати  $i(0) = \frac{u(0)}{R} = 6$  А. Якщо підставити у вираз для струму  $t = 0$ , отримаємо

$$i(0) = 15 + 1 - 10 = 6 \text{ А.}$$

**14.9** Розглянемо задачу з *ненульовими початковими умовами*. В колі (рис. 14.9) в момент часу  $t = 0$  ключ миттєво перемикається з положення *a* в положення *b*. Знайти струм  $i(t)$ . Параметри:  $C = 250$  мкФ,  $L = 0,1$  Гн,  $R = 8$  Ом,  $E = 48$  В. На часовому проміжку  $0 < t < t_1$  вхідна напруга  $u(t) = u_1(t) = 3000t$  В (рис. 14.10), а на проміжку  $t > t_1$   $u(t) = u_2(t) = 105e^{-50t}$  В, де  $t_1 = 0,01$  с.

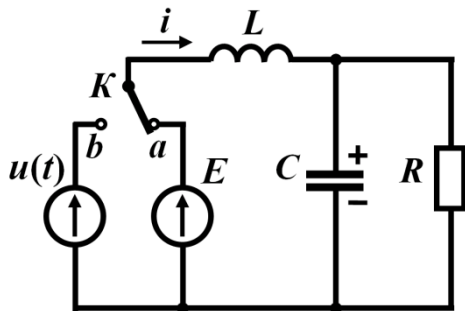


Рисунок 14.9

### Розв'язування

Застосуємо один з можливих способів розв'язування задач з ненульовими початковими умовами – спосіб, в основу якого покладено *принцип накладання*.

З цією метою для післякомутаційного стану кола побудуємо операторну схему (рис. 14.11). Для розрахунку додаткових е.р.с. визначимо незалежні початкові умови.

З розрахунку докомутаційного стану кола маємо, що

$$i(0) = \frac{E}{R} = 6 \text{ А}; \quad u_C(0) = E = 48 \text{ В.}$$

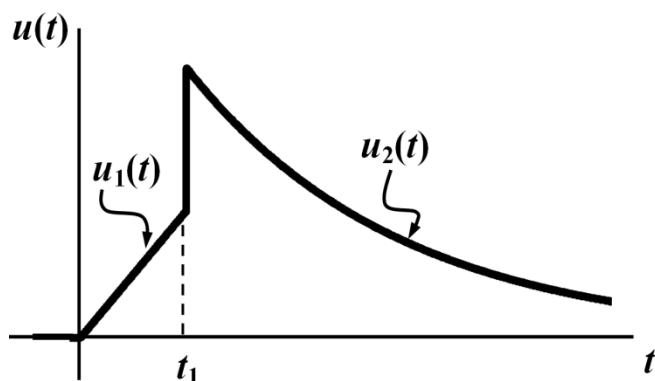


Рисунок 14.10

Згідно з принципом накладання еквівалентно заміщуємо вихідну операторну схему трьома допоміжними, в кожній з яких діє тільки одна е.р.с., як це показано на рис. 14.11. Від цих допоміжних операторних схем переходимо до їхніх оригіналів, кожен з яких має по одному зовнішньому джерелу е.р.с. В результаті такої дії отримуємо три електричних кола з *нульовими* початковими умовами. Це створює можливість використовувати для розрахунку перехідних часткових струмів в цих колах перехідні або імпульсні характеристики.

Оскільки напруга на двох часових проміжках має різні аналітичні вирази, то часткові струми в трьох схемах потрібно шукати окремо на кожному із них.

Отже, для першого часового інтервалу  $0 < t < t_1$  для кожної з трьох допоміжних схем маємо:

$$i_1'(t) = \int_0^t u_1(\tau) g_1(t - \tau) d\tau;$$

$$i_1''(t) = Li(0) g_1(t);$$

$$i_1'''(t) = \int_0^t u_C(0) g_2(t - \tau) d\tau .$$

На другому проміжку  $t > t_1$  змін зазнає тільки вираз для знаходження часткового струму першої допоміжної схеми

$$i_2'(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g_1(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_2(\tau) g_1(t - \tau) d\tau ,$$

інші часткові струми розраховуються за тими ж формулами. В цих співвідношеннях:

а)  $g_1(t) = \frac{1}{3} (40e^{-100t} - 10e^{-400t})$  См·с<sup>-1</sup> – імпульсна характеристика для струму  $i$  від дії вхідної напруги;

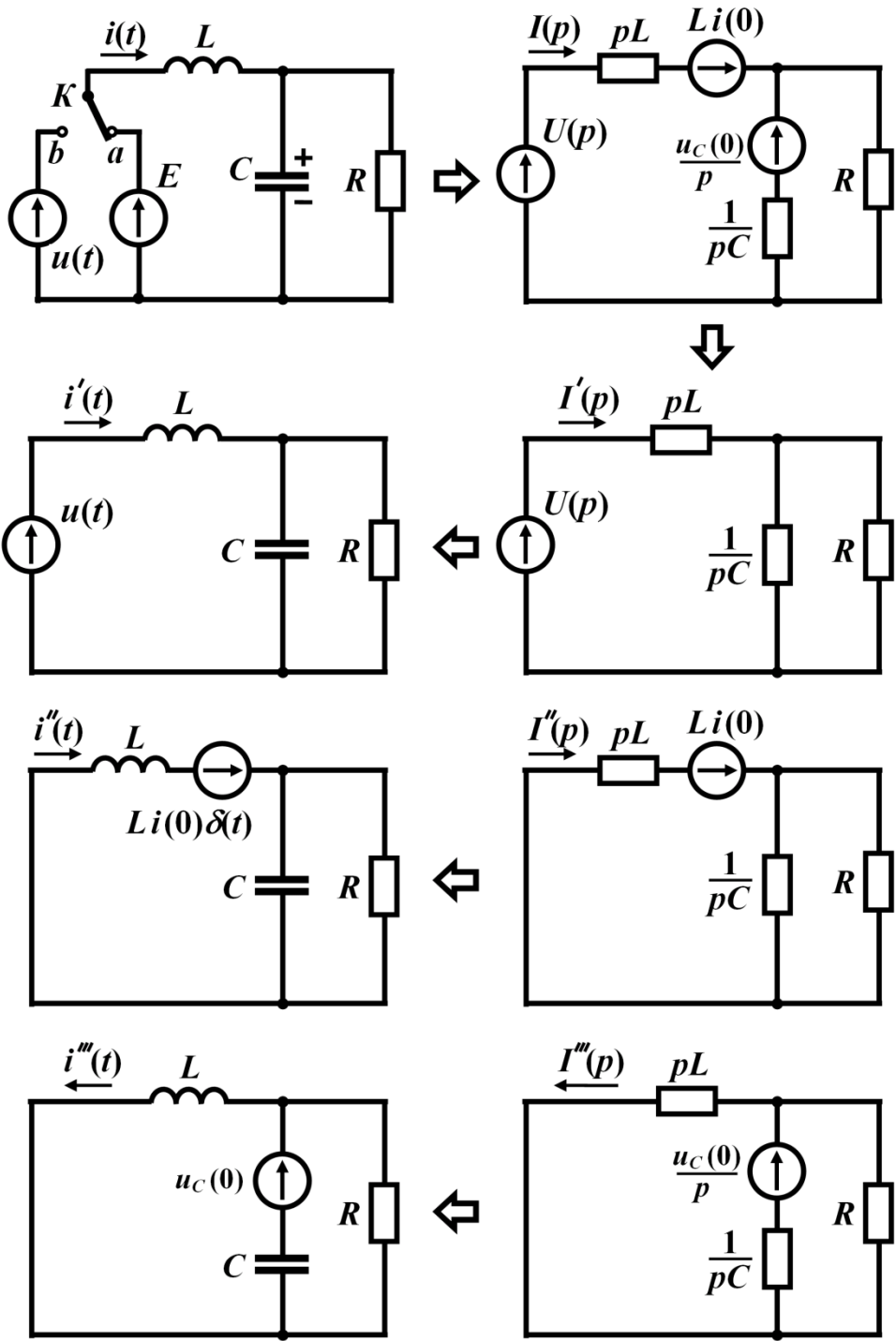


Рисунок 14.11

б)  $g_2(t) = \frac{1}{3}(40e^{-400t} - 10e^{-100t})$  См · с<sup>-1</sup> – імпульсна характеристика для того

ж струму  $i$ , але спричиненого дією додаткової е.р.с., що розташована у вітці з ємністю.

Як розраховувати імпульсні характеристики було показано в попередніх задачах, тому в даному прикладі наведено тільки їх кінцеві вирази.

Окремо зауважимо, що за умови використання імпульсних характеристик зникає необхідність враховувати стрибки вхідної напруги.

Отже, на першому часовому проміжку  $0 < t < t_1$  часткові струми дорівнюють:

$$i_1'(t) = \int_0^t 3 \cdot 10^3 \tau \cdot \frac{1}{3} [40e^{-100(t-\tau)} - 10e^{-400(t-\tau)}] d\tau = \\ = 375t - 3,94 + 4e^{-100t} - 6,25 \cdot 10^{-2} e^{-400t} \text{ А};$$

$$i_1''(t) = 0,1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} (40e^{-100t} - 10e^{-400t}) = 8e^{-100t} - 2e^{-400t} \text{ А};$$

$$i_1'''(t) = \int_0^t 48 \cdot \frac{1}{3} [40e^{-100(t-\tau)} - 10e^{-400(t-\tau)}] d\tau = 1,6e^{-100t} - 1,6e^{-400t} \text{ А}.$$

Тоді відповідно до принципу накладання повний струм

$$i_1 = i_1' + i_1'' - i_1''' = 375t - 3,94 + 10,4e^{-100t} - 0,46e^{-400t} \text{ А}.$$

На другому часовому проміжку, коли  $t > t_1$ , змін зазнає тільки перший частковий струм

$$i_2'(t) = \int_0^{t_1} 3 \cdot 10^3 \tau \cdot \frac{1}{3} [40e^{-100(t-\tau)} - 10e^{-400(t-\tau)}] d\tau + \\ + \int_{t_1}^t 105e^{-50\tau} \cdot \frac{1}{3} [40e^{-100(t-\tau)} - 10e^{-400(t-\tau)}] d\tau = \\ = 27e^{-50t} - 42,16e^{-100t} + 22,8e^{-400t} \text{ А}.$$

Повне значення струму для цього проміжку

$$i_2 = i_2' + i_1'' - i_1''' = 27e^{-50t} - 35,76e^{-100t} + 22,4e^{-400t} \text{ А}.$$

Таким чином,

$$i(t) = \begin{cases} 375t - 3,94 + 4e^{-100t} - 6,25 \cdot 10^{-2} e^{-400t}, & 0 < t < t_1, \\ 27e^{-50t} - 42,16e^{-100t} + 22,8e^{-400t}, & t > t_1. \end{cases}$$

Перевірити правильність розрахунку можна в такий спосіб.

Відповідно до закону комутації струм в індуктивності стрибкоподібно змінитися не може, через що має виконуватися рівність  $i_1(t_1) = i_2(t_1)$ . Підстановка числових значень підтверджує цю рівність, а відтак і правильність розрахунку всієї задачі.

**Задачі для самостійного розв'язування**

**14.10** Розрахувати перехідну та імпульсну характеристики для напруги на ємності в електричному колі, зображеному на рис. 14.12, а, якщо параметри  $C = 57,6 \text{ мкФ}$ ,  $L = 0,382 \text{ Гн}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 100 \text{ Ом}$ . Імпульсну характеристику потрібно визначити як через передатну функцію, так і через узагальнену похідну від перехідної характеристики.

*Відповідь:*  $h(t) = 0,909 + 1,015e^{-100t} \sin(200t - 116,4^\circ)$ ;  $g(t) = 227e^{-100t} \sin 200t \text{ с}^{-1}$ .

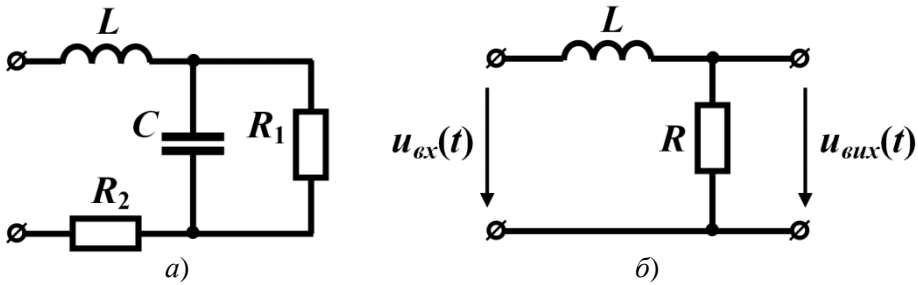


Рисунок 14.12

**14.11** Знайти вихідну напругу  $u_{вих}(t)$  чотириполюсника, схема якого наведена на рис. 14.12, б, коли за нульових початкових умов на його вхід в момент часу  $t = 0$  подається напруга, форму якої показано на рис. 14.13, де  $U = 100 \text{ В}$ , а  $t_2 = 2t_1 = 100 \text{ мс}$ . Параметри елементів чотириполюсника  $L = 1 \text{ Гн}$ ,  $R = 20 \text{ Ом}$ .

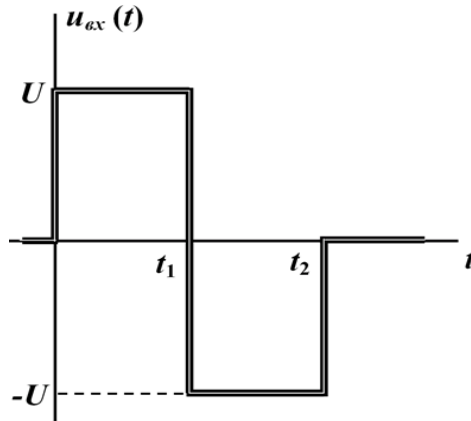


Рисунок 14.13

*Відповідь:*  $u_{вих}(t) = \begin{cases} 100 - 100e^{-20t} \text{ В,} & 0 < t < t_1, \\ -100 + 443,6e^{-20t} \text{ В,} & t_1 < t < t_2, \\ -195,3e^{-20t} \text{ В,} & t > t_2. \end{cases}$



**14.12** В електричному колі з нульовими початковими умовами  $L = 0,5$  Гн,  $R = 20$  Ом (рис. 14.14, а). Скориставшись перехідною або імпульсною характеристиками, знайти вихідну напругу  $u_{вих}(t)$  для трьох різних форм вхідної напруги (рис. 14.14, б, в, з), які в момент часу  $t = 0$  прикладаються до кола. Для рис. 14.14, б напруга  $u_1(t) = 20e^{60t}$  В, а для рис. 14.14, в, з  $U = 50$  В. Моменти часу  $t_2 = 2t_1 = 40$  мс.

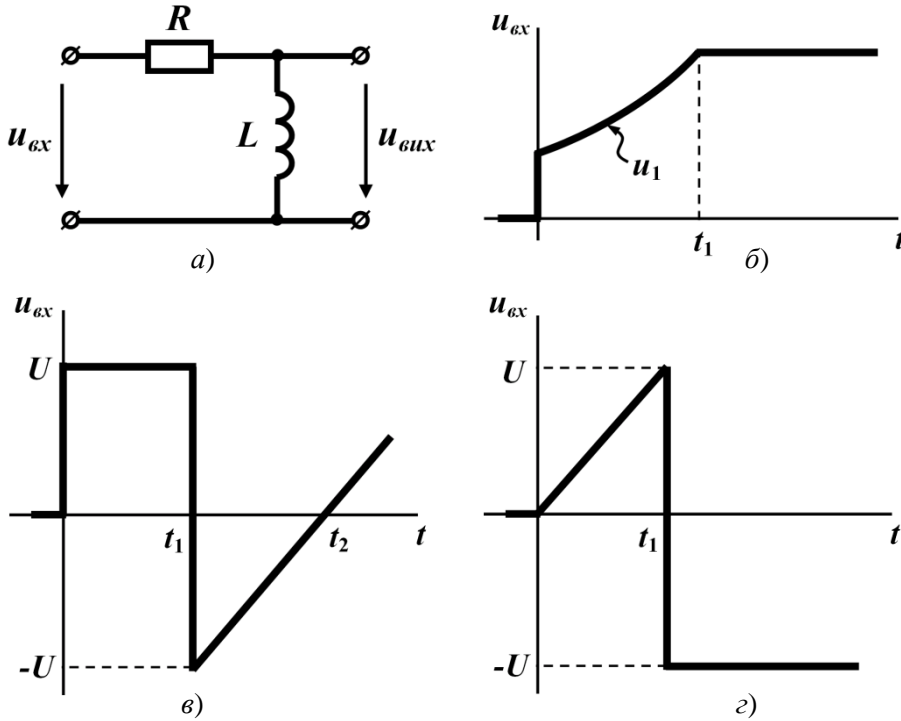


Рисунок 14.14

**Відповідь:** для б)  $u_{вих}(t) = \begin{cases} 8e^{-40t} + 12e^{-60t} \text{ В,} & 0 < t < t_1, \\ 96,7e^{-40t} \text{ В,} & t > t_1; \end{cases}$

для в)  $u_{вих}(t) = \begin{cases} 50e^{-40t} \text{ В,} & 0 < t < t_1, \\ 62,5 - 311,6e^{-40t} \text{ В,} & t > t_1; \end{cases}$

для з)  $u_{вих}(t) = \begin{cases} 67,5(1 - e^{-40t}) \text{ В,} & 0 < t < t_1, \\ -146e^{-40t} \text{ В,} & t > t_1. \end{cases}$

**14.13** В електричному колі (рис. 14.15, а) з нульовими початковими умовами  $C = 200 \text{ мкФ}$ ,  $R = 50 \text{ Ом}$ ,  $U = 25 \text{ В}$ ,  $t_2 = 2t_1 = 5 \text{ мс}$ . Розрахувати вихідну напругу. Задачу розв'язати для трьох різновидів вхідної напруги, графіки яких показано на рис. 14.15, б, в і г. На рис. 14.15, в напруга  $u_1 = 50(2e^{-20t} - 1) \text{ В}$ .

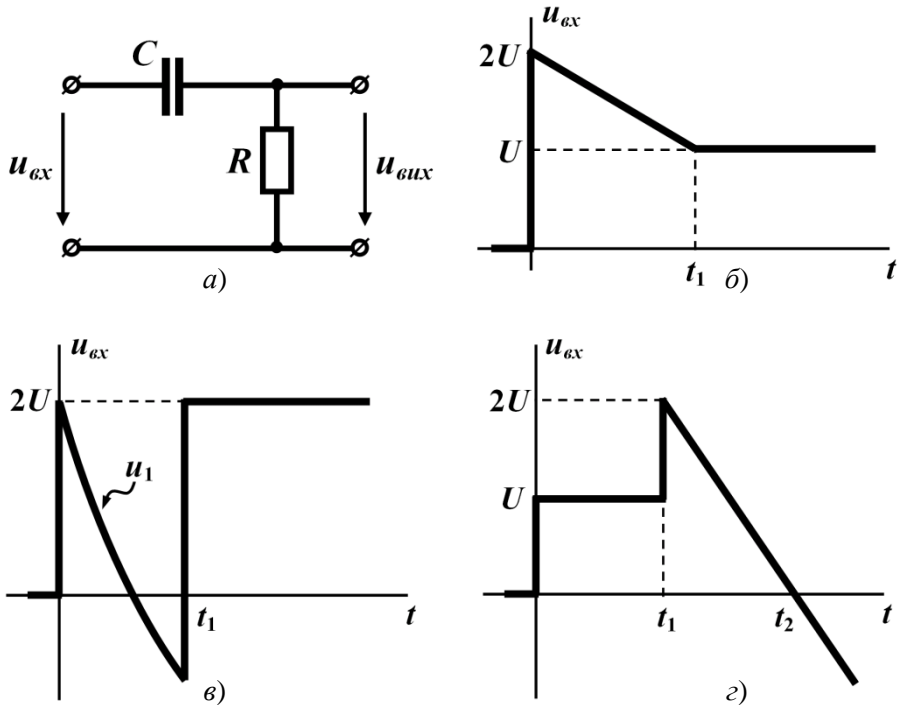


Рисунок 14.15

**Відповідь:** для б)  $u_{\text{вих}}(t) = \begin{cases} 100e^{-100t} - 50 \text{ В}, & 0 < t < t_1, \\ 17,6e^{-100t} \text{ В}, & t > t_1; \end{cases}$

для в)  $u_{\text{вих}}(t) = \begin{cases} 75e^{-100t} - 25e^{-20t} \text{ В}, & 0 < t < t_1, \\ 187e^{-100t} \text{ В}, & t > t_1; \end{cases}$

для г)  $u_{\text{вих}}(t) = \begin{cases} 25e^{-100t} \text{ В}, & 0 < t < t_1, \\ 231e^{-100t} \text{ В}, & t > t_1. \end{cases}$

**14.14** Електричне коло (рис. 14.16) з конденсатором, зарядженим до напруги  $u_C(0) = 40 \text{ В}$  і полярністю, вказаною на рисунку, підмикають до зовнішнього

джерела е.р.с., напруга якого змінюється за законом  $u(t)$ . Параметри кола:  $L = 0,4$  Гн,  $C = 250$  мкФ,  $R_1 = R_2 = 15,3$  Ом. Розрахувати струм в опорі  $R_2$  для двох випадків, в першому з яких вхідна напруга  $u(t) = 60 - 20e^{-80t}$  В, а в другому

$$\text{випадку } u(t) = \begin{cases} 4 \cdot 10^3 t \text{ В, } 0 < t < t_1, \\ 40 \text{ В, } t > t_1 = 0,01 \text{ с.} \end{cases}$$

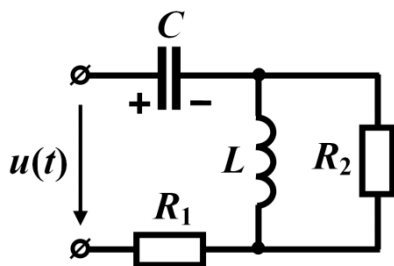


Рисунок 14.16

*Підказка.* Початкові умови ненульові, тому необхідно застосувати спосіб, наведений в прикладі 14.9, використавши перехідну характеристику.

**Відповідь:** 1)  $i_2(t) = 4,35e^{-80t} - 1,09e^{-50t} - 3,26e^{-100t}$  А;

$$2) i_2(t) = \begin{cases} 3,912e^{-50t} - 5,216e^{-100t} \text{ А, } 0 < t < t_1, \\ -0,388e^{-50t} + 1,873e^{-100t} \text{ А, } t > t_1. \end{cases}$$

## Розділ 15

### ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

В задачах цього розділу розглянуто приклади розрахунку перехідних процесів в лініях, втратами енергії в яких можна знехтувати.

**15.1** Повітряну лінію, довжиною  $l = 140$  км, з первинними параметрами  $L_0 = 2,5 \frac{\text{мГн}}{\text{км}}$  і  $C_0 = 5,1 \frac{\text{нФ}}{\text{км}}$  підмикають до ідеального джерела постійної напруги  $U = 420$  В. Лінію навантажено активним опором  $R_H = 1400$  Ом. Необхідно побудувати:

1) графік розподілу напруги і струму *вздовж лінії* через  $t_1 = 1,2$  мс від початку перехідного процесу;

2) залежність напруги і струму *від часу* в інтервалі  $0 < t < t_1$  в точці, розташованій на відстані  $l_1 = 42$  км від початку лінії (рис. 15.1).

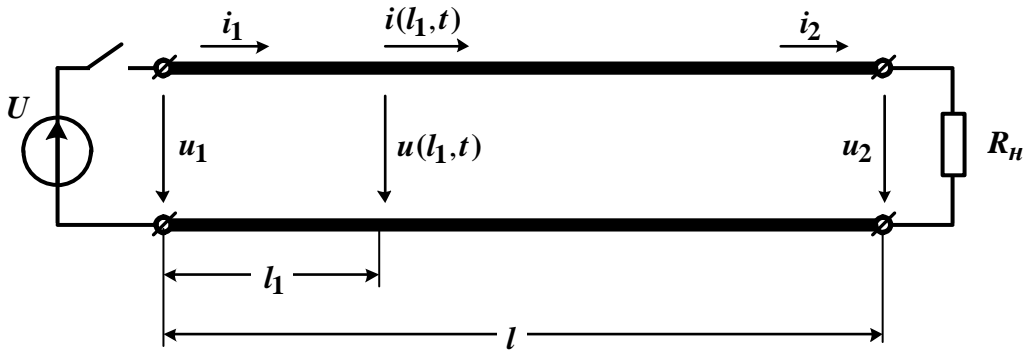


Рисунок 15.1

#### Розв'язування

Спочатку визначимо фазову швидкість поширення хвилі вздовж лінії

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 5,1 \cdot 10^{-9}}} = 2,8 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

та хвильовий опір лінії

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 700 \text{ Ом.}$$

1. Після підмикання лінії до джерела постійної напруги падаюча хвиля напруги прямокутної форми  $U'_n = U = 420 \text{ В}$  (пунктирна лінія на рис. 15.2, а) рухатиметься вздовж лінії в напрямку до її кінця зі швидкістю  $v$  і досягне останнього за час  $t' = \frac{l}{v} = \frac{140}{2,8 \cdot 10^5} = 0,5 \text{ мс}$ .

Подібним чином поводить себе і струм у лінії, значення падаючої хвилі якого становитиме  $I'_n = \frac{U}{Z_C} = 0,6 \text{ А}$  (пунктирна лінія на рис. 15.2, б).

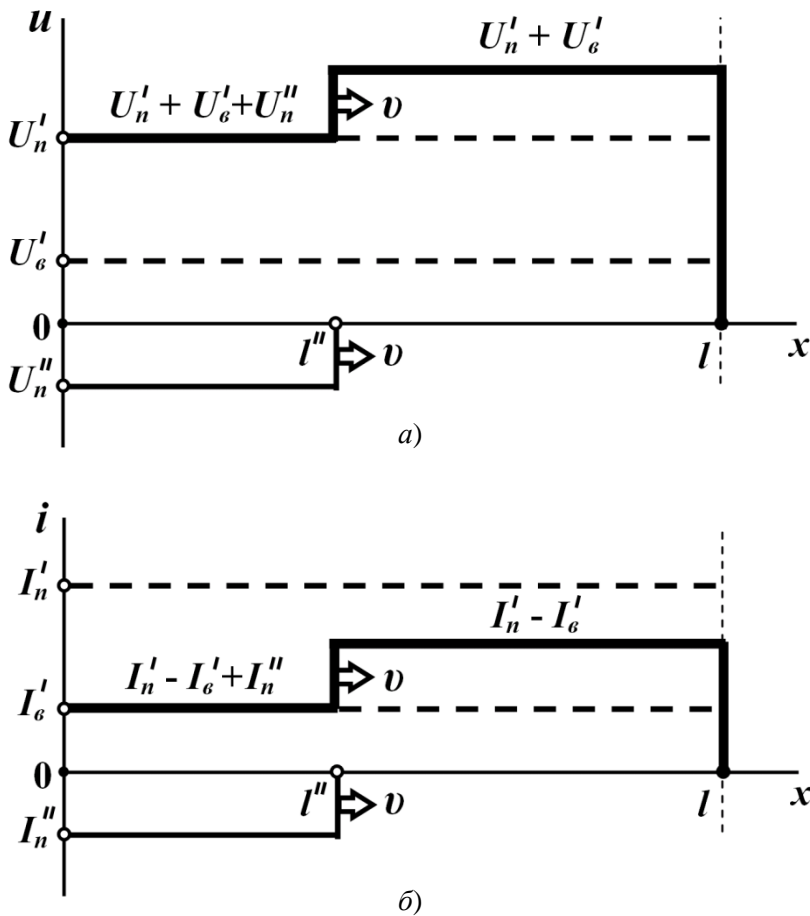


Рисунок 15.2

В кінці лінії перші падаючі хвилі напруги і струму відбиваються з коефіцієн-

том відбиття

$$N_2 = \frac{R_n - Z_C}{R_n + Z_C} = \frac{1}{3},$$

що породжує перші відбиті хвилі напруги  $U'_e = U'_n N_2 = 140 \text{ В}$  і струму  $I'_e = I'_n N_2 = 0,2 \text{ А}$  (пунктирна лінія на рис. 15.2, *a* і *б*, відповідно), які рухаються з тією ж швидкістю  $v$ , що і падаючі, але вже в зворотному напрямку – від кінця лінії до її початку. Останнього вони досягають за час  $t'' = 1 \text{ мс}$  з моменту комутації і там зазнають повторного відбиття. Оскільки внутрішній опір ідеального джерела напруги дорівнює нулю, коефіцієнт відбиття від початку лінії набуває значення  $N_1 = -1$ , через що значення другої падаючої хвилі напруги становитиме  $U''_n = U'_e N_1 = -140 \text{ В}$ , а струму –  $I''_n = -0,2 \text{ А}$  (тонка суцільна лінія на рис. 15.2, *a* і *б* відповідно). До зазначеного в умові задачі моменту часу  $t_1 = 1,2 \text{ мс}$  ці хвилі подолають відстань  $l'' = v(t_1 - t'') = 56 \text{ км}$  від початку лінії. В цьому випадку значення загальної напруги дорівнюватиме

$$u = U'_n + U'_e + U''_n = 420 \text{ В},$$

а загального струму –

$$i = I'_n - I'_e + I''_n = 0,2 \text{ А}.$$

На рис. 15.2, *a* і *б* потовщеною лінією показано розподіл загальних напруги і струму вздовж лінії на момент часу  $t_1 = 1,2 \text{ мс}$ .

2. З моменту комутації в точці лінії, яка розташована на відстані  $l_1 = 42 \text{ км}$  від її початку, напруга дорівнюватиме нулю увесь час, поки туди через час  $T_1 = \frac{l_1}{v} = 0,15 \text{ мс}$  не надійде падаюча хвиля, і з її надходженням напруга в цій точці миттєво набуде значення напруги першої падаючої хвилі. Такою вона залишатиметься до моменту

$$T_2 = T_1 + \frac{2(l - l_1)}{v} = 0,85 \text{ мс},$$

тобто до тих пір, поки перша падаюча хвиля не досягне кінця лінії, після чого перша відбита хвиля  $U'_e = 140 \text{ В}$ , не дійде до даної точки. В результаті напруга у вказаній точці дорівнюватиме сумі напруг перших падаючої і відбитої хвиль  $u = U'_n + U'_e = 560 \text{ В}$  і залишатиметься деякий час незмінною. Це триватиме, поки перша відбита хвиля не дійде до початку лінії, після чого породжена нею друга падаюча хвиля не дістанеться координати даної точки. В результаті в момент часу

$$T_3 = T_1 + T_2 + \frac{2l_1}{v} = 1,15 \text{ мс}$$

напруга там стане рівною  $420 \text{ В}$ .

Графік зміни у часі напруги для точки  $l_1 = 42 \text{ км}$  на часовому інтервалі  $0 < t < t_1$  показано на рис. 15.3, *a*.

Зміна у часі струму для даної точки визначається і будується подібним чином (рис. 15.3, б).

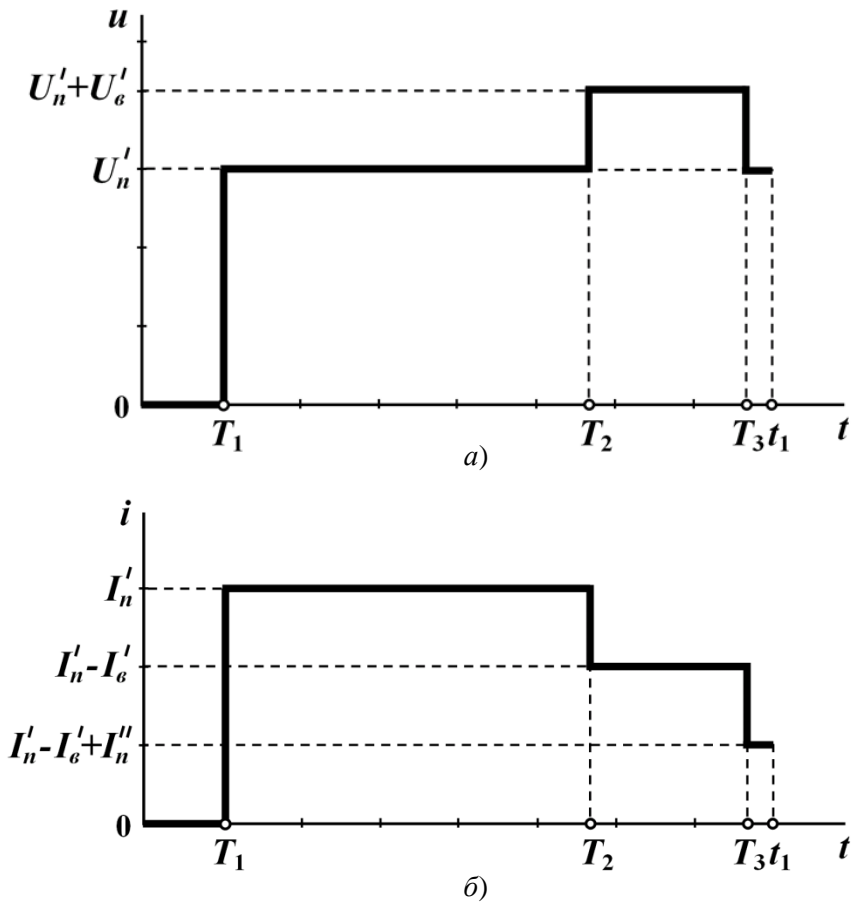


Рисунок 15.3

**15.2** Лінія без втрат, довжиною  $l = 120$  км і хвильовим опором  $Z_C = 400$  Ом, підмикається до джерела постійної напруги з е.р.с.  $E = 1400$  В і внутрішнім опором  $R_0 = 100$  Ом. Лінію навантажено суто активним опором  $R_H = 600$  Ом. Фазова швидкість поширення хвилі  $v = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ . Потрібно для точки, розташованої на середині довгої лінії, побудувати графік залежності напруги від часу в інтервалі  $0 < t < t_{np}$ , де  $t_{np}$  – практична тривалість перехідного процесу, яка дорівнює моменту часу, коли напруга в лінії починає відрізнятися від усталеного значення

$$U_{ycm} = \frac{ER_H}{R_0 + R_H} = 1200 \text{ В не більше, ніж на } 1\%.$$

### Розв'язування

Оскільки в лінії спостерігається процес багаторазового відбиття хвиль напруги і струму від початку та кінця лінії, його зручно відобразити у графічний спосіб за допомогою діаграми, на якій на осі ординат відкладено час, а на осі абсцис – відстань (рис. 15.4).

Коефіцієнти відбиття:

$$\text{- від кінця лінії } N_2 = \frac{R_n - Z_C}{R_n + Z_C} = 0,2;$$

$$\text{- від початку лінії } N_1 = \frac{R_0 - Z_C}{R_0 + Z_C} = -0,6.$$

Якщо внутрішній опір джерела становить  $R_0$ , то величина напруги першої падаючої хвилі визначається за виразом

$$u_{n1} = \frac{EZ_C}{R_0 + Z_C} = 1,12 \text{ кВ},$$

а струму –

$$i_{n1} = \frac{u_{n1}}{Z_C} = 2,8 \text{ А}.$$

На діаграмі умовно можна зобразити рух першої падаючої хвилі вздовж лінії  $u_{n1}$ , звідки видно, що до кінця лінії ця хвиля підходить в момент  $t_1 = \frac{l}{v} = 0,4 \text{ мс}$ .

Перша відбита хвиля  $u_{e1} = u_{n1}N_2$  рухається від кінця лінії до її початку, де породжує другу падаючу хвилю  $u_{n2} = u_{e1}N_1 = u_{n1}N_1N_2$ . Схожим чином визначаються всі наступні падаючі і відбиті хвилі:

$$u_{e2} = u_{n2}N_2 = u_{n1}N_1N_2^2; \quad u_{n3} = u_{e2}N_1 = u_{n1}N_1^2N_2^2;$$

$$u_{e3} = u_{n3}N_2 = u_{n1}N_1^2N_2^3; \quad u_{n4} = u_{e3}N_1 = u_{n1}N_1^3N_2^3$$

і т. д. (рис. 15.4).

Узагальнюємо і знаходимо співвідношення для довільної  $k$ -ої відбитої хвилі

$$u_{ek} = u_{n1} (N_1N_2)^{k-1} N_2$$

і для  $(k+1)$ -ої падаючої

$$u_{n(k+1)} = u_{n1} (N_1N_2)^k.$$

Діаграма дозволяє достатньо просто визначити напругу в будь-якій точці лінії і в будь-який момент часу як суму падаючих і відбитих хвиль, що їм відповідає. Так, наприклад, напруга в точці лінії  $l_1$  в момент часу  $T_1$ , як це безпосередньо видно з діаграми, становить

$$u(l_1, T_1) = U_1 = (u_{n1} + u_{n2} + u_{n3} + u_{n4}) + (u_{e1} + u_{e2} + u_{e3}).$$



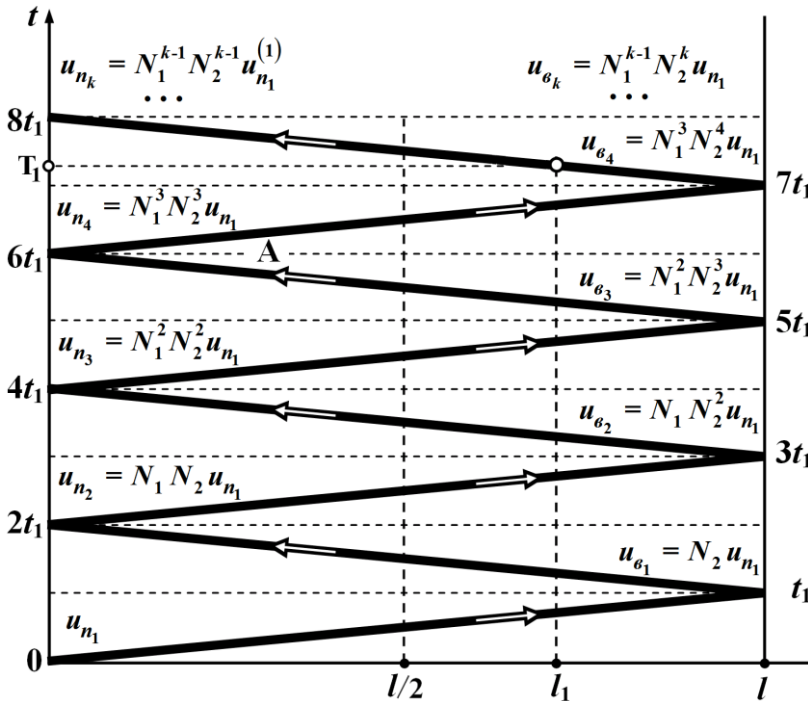


Рисунок 15.4

Щоб побудувати графік залежності напруги від часу в точці, розташованій на середині лінії, послідовно розрахуємо значення напруги в цій точці в різні моменти часу. Так, до моменту часу, що дорівнює  $\frac{t_1}{2}$ , напруги в даній точці немає, а за настання цього моменту напруга стає рівною  $u_{n1} = 1,12 \text{ кВ}$  і залишатиметься такою, поки до вказаної точки не повернеться нова відбита хвиля  $u_{\epsilon 1} = u_{n1} N_2 = 1120 \cdot 0,2 = 224 \text{ В}$ . Це станеться в момент часу  $\frac{3t_1}{2}$ . Схожим чином розраховується напруга і для інших моментів часу. Для побудови графіка шуканої напруги результати розрахунку доцільно звести в таблицю (табл. 15.1).

Таблиця 15.1

Інтервал часу	$u_n$	$u_\epsilon$	$u\left(\frac{l}{2}, t\right)$
	В	В	В
$0 < t < \frac{t_1}{2}$	0	0	0
$\frac{t_1}{2} < t < \frac{3t_1}{2}$	$u_{n1} = 1120$	0	$u_{n1} = 1120$

Продовження таблиці 15.1

Інтервал часу	$u_n$	$u_e$	$u\left(\frac{l}{2}, t\right)$
	В	В	В
$\frac{3t_1}{2} < t < \frac{5t_1}{2}$	$u_{n1} = 1120$	$u_{e1} = 224$	$u_{n1} + u_{e1} = 1344$
$\frac{5t_1}{2} < t < \frac{7t_1}{2}$	$u_{n2} = -134,4$	$u_{e1} = 224$	$u_{n1} + u_{e1} + u_{n2} = 1209,6$
$\frac{7t_1}{2} < t < \frac{9t_1}{2}$	$u_{n2} = -134,4$	$u_{e2} = -26,88$	1182,72
$\frac{9t_1}{2} < t < \frac{11t_1}{2}$	$u_{n3} = 16,13$	$u_{e2} = -26,88$	1198,85

Розрахунки доводять, що для останнього інтервалу часу напруга вже практично набула свого усталеного значення. За даними табл. 15.1 будемо графік  $u\left(\frac{l}{2}\right) = f(t)$  (рис. 15.5).

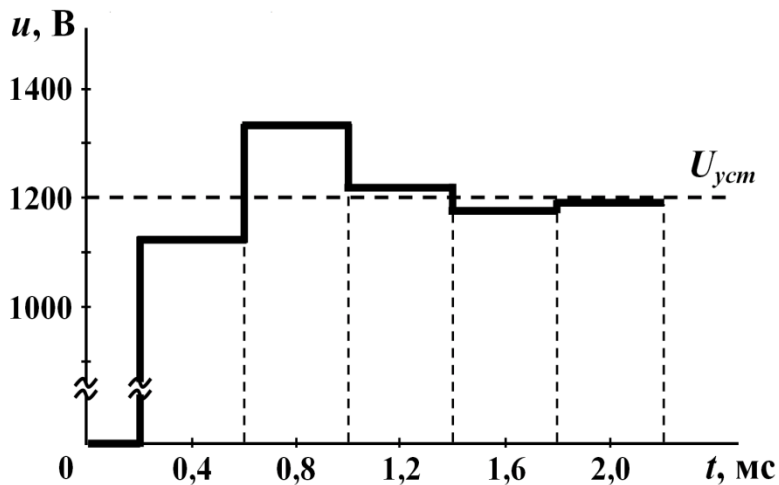


Рисунок 15.5

Діаграма струму буде такою ж як і напруги. Слід тільки пам'ятати, що, наприклад, в точці лінії  $l_1$  в момент часу  $T_1$  вираз для струму матиме вигляд

$$i(l_1, T_1) = I_1 = (i_{n1} + i_{n2} + i_{n3} + i_{n4}) - (i_{e1} + i_{e2} + i_{e3}).$$

**15.3** Ідеальне  $R_0 = 0$  джерело напруги з е.р.с.  $E = 480$  В підмикають до кабельної лінії, довжиною  $l_1 = 15$  км з хвильовим опором  $Z_{C1} = 80$  Ом, яка потім переходить в повітряну лінію з параметрами  $l_2 = 24$  км і  $Z_{C2} = 400$  Ом, навантажену на опір  $R_H = 400$  Ом. В місці з'єднання двох ліній увімкнено навантаження  $R = 600$  Ом (рис. 15.6). Потрібно для цієї точки побудувати залежність напруги і струмів  $i_1$  та  $i_2$  від часу в інтервалі  $0 < t < 800$  мкс. Фазова швидкість поширення хвилі в кабелі становить  $v_1 = 2,5 \cdot 10^5$  км  $\cdot$  с $^{-1}$ , а в повітряній лінії –  $v_2 = 3 \cdot 10^5$  км  $\cdot$  с $^{-1}$ . Втратами в обох лініях знехтувати.

### Розв'язування

Навантаженням кабельної лінії є паралельне з'єднання хвильового опору повітряної лінії  $Z_{C2}$  та опору  $R$

$$R_{H1} = \frac{RZ_{C2}}{R + Z_{C2}} = \frac{600 \cdot 400}{600 + 400} = 240 \text{ Ом.}$$

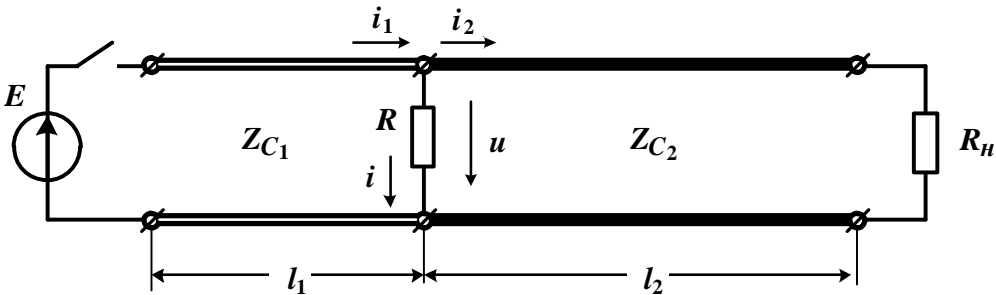


Рисунок 15.6

Перш ніж будувати діаграму розподілу напруги, визначимо:

- коефіцієнт відбиття від початку кабельної лінії

$$N_1 = \frac{R_0 - Z_{C1}}{R_0 + Z_{C1}} = -1;$$

- коефіцієнт відбиття кабельної лінії від точки з'єднання

$$N_2 = \frac{R_{H1} - Z_{C1}}{R_{H1} + Z_{C1}} = \frac{240 - 80}{240 + 80} = 0,5;$$

- коефіцієнт відбиття повітряної лінії від її навантаження

$$N_3 = \frac{R_H - Z_{C2}}{R_H + Z_{C2}} = \frac{400 - 400}{400 + 400} = 0;$$

- коефіцієнт заломлення під час переходу хвилі напруги з кабельної лінії до повітряної в місці з'єднання двох ліній

$$N_{3л} = \frac{2R_{H1}}{R_{H1} + Z_{C1}} = \frac{2 \cdot 240}{80 + 240} = 1,5.$$

Оскільки повітряна лінія працює в узгодженому режимі, то в ній відсутня відбита хвиля, через що і в кабельній лінії не буде заломленої хвилі, тільки падаюча хвиля та хвиля, відбита від місця з'єднання, тобто від навантаження  $R_{н1}$ .

Діаграми руху хвиль в обох лініях показано на рис. 15.7.

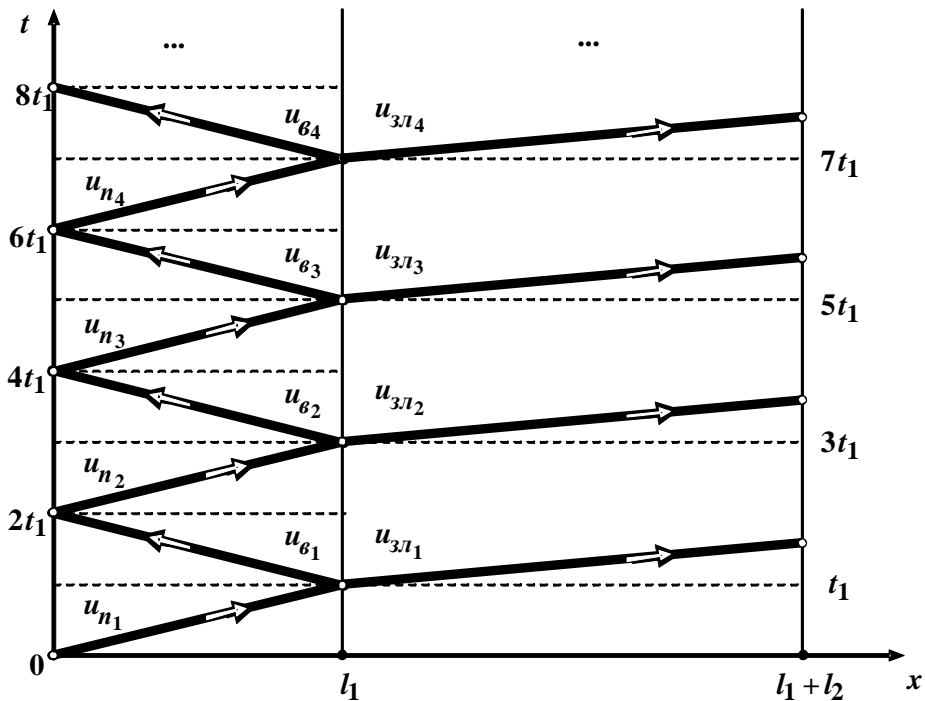


Рисунок 15.7

Як видно з рисунка, в місці з'єднання обох ліній протягом проміжку  $0 < t < t_1$ , де

$$t_1 = \frac{l_1}{v_1} = \frac{15}{2,5 \cdot 10^5} = 60 \text{ мкс},$$

який є часом руху падаючої хвилі від початку першої (кабельної) лінії до її кінця, і напруга, і струми будуть відсутніми ( $u_{n1} = 0$ ,  $i_{n1} = 0$  і  $i_{3l1} = 0$ ).

В момент часу  $t_1$  падаюча хвиля напруги  $u_{n1} = 480 \text{ В}$ , значення якої дорівнює е.р.с.  $E$  ідеального джерела, дійде до кінця кабельної лінії і тієї ж миті з'явиться відбита хвиля

$$u_{61} = u_{n1} N_2 = 240 \text{ В}.$$

Тому напруга в місці з'єднання буде дорівнювати сумі

$$U_1 = u_{n1} + u_{61} = 720 \text{ В}.$$

Падаюча хвиля струму в момент  $t_1$

$$i_{n1} = \frac{u_{n1}}{Z_{C1}} = \frac{480}{80} = 6 \text{ A},$$

а значення його відбитої хвилі

$$i_{e1} = i_{n1} N_2 = 3 \text{ A},$$

через що загальний струм в кінці кабельної лінії

$$I_{k1} = i_{n1} - i_{e1} = 3 \text{ A}.$$

Струм на початку повітряної лінії в цей момент часу можна розрахувати за виразом

$$I_{n1} = i_{3n1} = \frac{u_{3n1}}{Z_{C2}} = \frac{720}{400} = 1,8 \text{ A},$$

де

$$u_{3n1} = u_{n1} N_{3n1} = 720 \text{ В} -$$

заломлена хвиля напруги в повітряній лінії.

Розраховані напруги і струми надалі не зазнаватимуть змін у часі, поки відбита хвиля напруги в кабельній лінії не дійде до її початку, там не відіб'ється, утворивши другу падаючу хвилю напруги

$$u_{n2} = u_{e1} N_1 = -240 \text{ В},$$

а остання знову не повернеться до кінця кабельної лінії, тобто до місця з'єднання ліній, на що має бути витрачено  $2t_1 = 120$  мкс часу. Таким чином, починаючи з моменту  $t_1$  і протягом всього інтервалу  $t_1 \leq t \leq 3t_1$

$$U_1 = 720 \text{ В}; I_{k1} = 3 \text{ А}; I_{n1} = i_{3n1} = 1,8 \text{ А}.$$

В момент часу  $t = 3t_1$  окрім падаючої хвилі  $u_{n2}$  в кабельній лінії з'являється відбита хвиля

$$u_{e2} = u_{n2} N_2 = -120 \text{ В},$$

внаслідок чого напруга становитиме

$$U_2 = U_1 + u_{n2} + u_{e2} = 720 - 240 - 120 = 360 \text{ В},$$

а значення струмів

$$i_{n2} = \frac{u_{n2}}{Z_{C1}} = \frac{-240}{80} = -3 \text{ А};$$

$$i_{e2} = i_{n2} N_2 = -1,5 \text{ А};$$

$$I_{k2} = I_{k1} + i_{n2} - i_{e2} = 1,5 \text{ А};$$

$$i_{3n2} = \frac{u_{3n2}}{Z_{C2}} = \frac{u_{n2} N_{3n2}}{Z_{C2}} = \frac{-240 \cdot 1,5}{400} = -0,9 \text{ А};$$

$$I_{n2} = I_{n1} + i_{3n2} = 0,9 \text{ А}.$$

Отже, починаючи з моменту  $3t_1$  і протягом всього інтервалу  $3t_1 \leq t \leq 5t_1$

$$U_2 = 360 \text{ В};$$

$$I_{k2} = 1,5 \text{ А}; I_{n1} = 0,9 \text{ А}.$$

Схожим чином необхідно виконувати розрахунки і для інших часових проміжків (див. табл. 15.2).

Таблиця 15.2

Інтервал часу	$U_i$	$I_{ki}$	$I_{ni}$
$0 < t < t_1$	0	0	0
$t_1 \leq t < 3t_1$	$U_1 = 720 \text{ В}$	$I_{k1} = 3 \text{ А}$	$I_{n1} = 1,8 \text{ А}$
$3t_1 \leq t < 5t_1$	$U_2 = 360 \text{ В}$	$I_{k2} = 1,5 \text{ А}$	$I_{n2} = 0,9 \text{ А}$
$5t_1 \leq t < 7t_1$	$U_3 = 540 \text{ В}$	$I_{k3} = 2,25 \text{ А}$	$I_{n3} = 1,35 \text{ А}$
$7t_1 \leq t < 9t_1$	$U_4 = 450 \text{ В}$	$I_{k4} = 1,875 \text{ А}$	$I_{n4} = 1,125 \text{ А}$
$9t_1 \leq t < 11t_1$	$U_5 = 495 \text{ В}$	$I_{k5} = 0,0625 \text{ А}$	$I_{n5} = 1,2375 \text{ А}$
$11t_1 \leq t < 13t_1$	$U_6 = 472,5 \text{ В}$	$I_{k6} = 1,97 \text{ А}$	$I_{n6} = 1,18 \text{ А}$

Усталене значення напруги в лінії без втрат вздовж усієї її довжини дорівнює значенню напруги джерела живлення

$$U_{ycm} = E = 480 \text{ В.}$$

Усталене значення струму в повітряній лінії

$$I_{nycm} = \frac{U_{ycm}}{R_H} = 1,2 \text{ А,}$$

струму в опорі  $R$

$$I_{Rycm} = \frac{U_{ycm}}{R} = \frac{480}{600} = 0,8 \text{ А,}$$

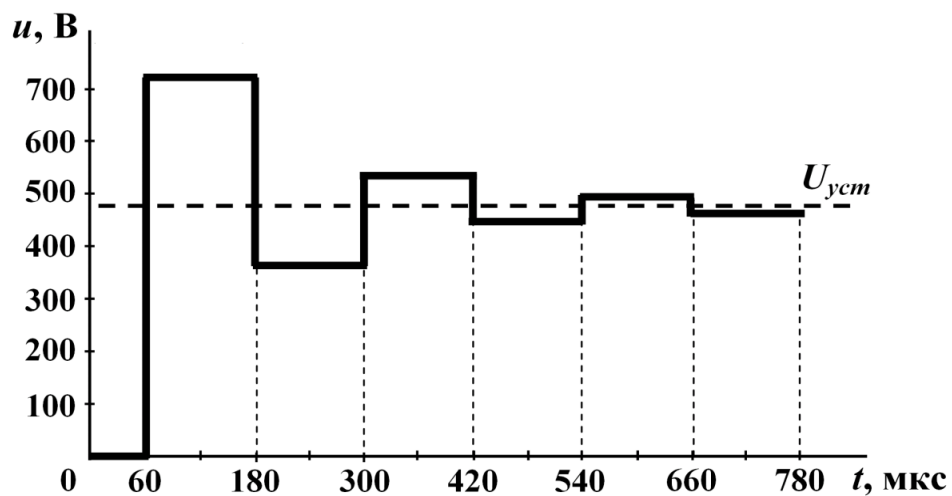
а в кабельній лінії відповідно до закону Кірхгофа

$$I_{kycm} = I_{Rycm} + I_{nycm} = 2 \text{ А.}$$

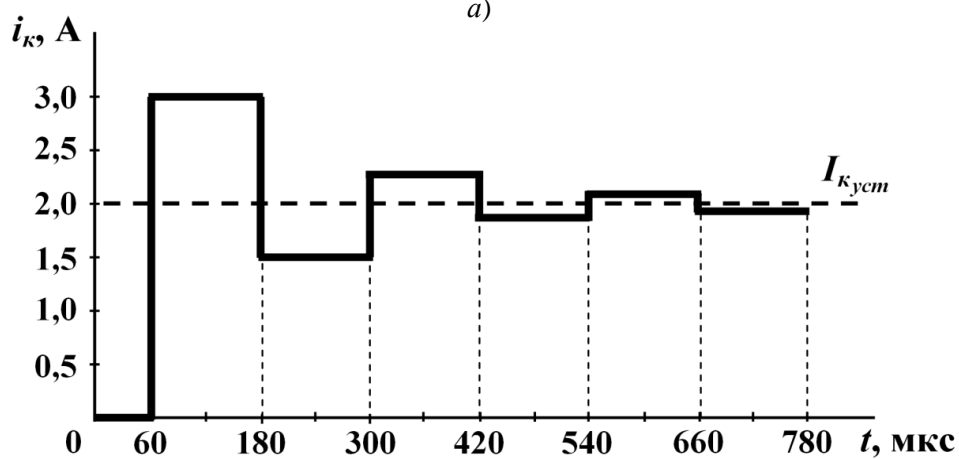
На рис. 15.8, *a* наведено графік зміни напруги у часі в місці з'єднання двох ліній, а на рис. 15.8, *б* і *в* – графіки струмів в кабельній та повітряній лініях.

В усіх випадках пунктирними лініями показано усталені значення напруги та струмів.

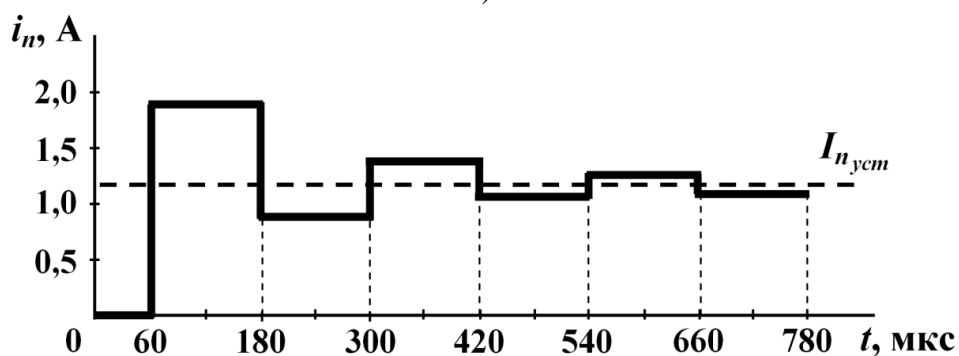
Наприкінці звертаємо увагу на те, що якщо хвильовий опір під'єднаної (другої) лінії  $Z_{C2}$  буде більшим, аніж хвильовий опір першої лінії  $Z_{C1}$ , то значення першого фронту хвилі, який підходить до другої лінії, може значно перевищувати напругу джерела.



a)



b)



c)

Рисунок 15.8

**15.4** В електричному колі за умови попередньої задачі (див. рис. 15.6) після настання усталеного режиму відмикається додаткове навантаження  $R$  (рис. 15.9). Побудувати графік залежності напруги від часу в інтервалі  $0 < t < T = 500$  мкс в точці, яку розташовано в кабельній лінії на відстані  $\frac{l_1}{2}$  від її початку. Для цього ж інтервалу часу необхідно побудувати графік зміни струму в опорі навантаження.

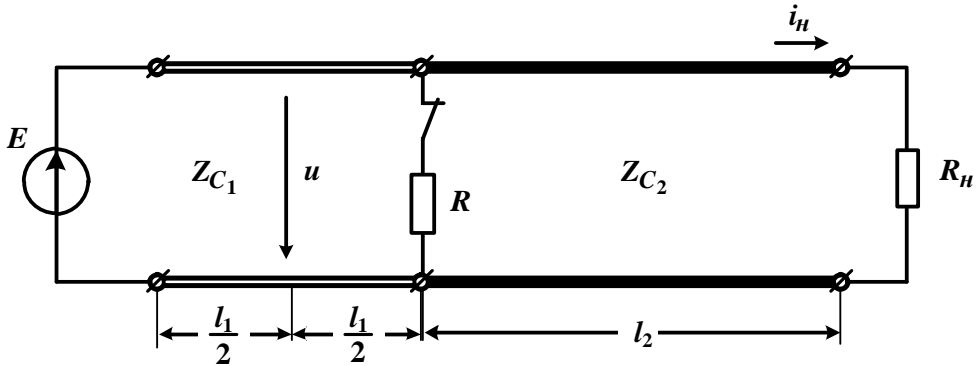


Рисунок 15.9

### Розв'язування

Аналіз перехідних процесів в довгих лініях за *ненульових початкових умов* згідно з методом накладання зводиться до розрахунку кола з нульовими початковими умовами. Для цього на усталений докомутаційний режим необхідно накласти додаткові хвилі напруг та струмів, що виникають внаслідок комутації. І у випадку, коли ключ розмикає вітку, ці хвилі необхідно визначати як результат увімкнення до вітки джерела струму, струм якого за значенням дорівнюватиме усталеному струму в даній вітці до розмикання, а за напрямком буде протилежним до нього (рис. 15.10). Це джерело визначає *тільки перші хвилі* напруги і струму. Відповідно їхні значення залежать, по-перше, від струму  $I_{R_{уст}} = 0,8$  А (див. розв'язок задачі 15.3) і, по-друге, від хвильових опорів обох ліній. Значення ж інших хвиль напруг і струмів визначаються за загальними правилами.

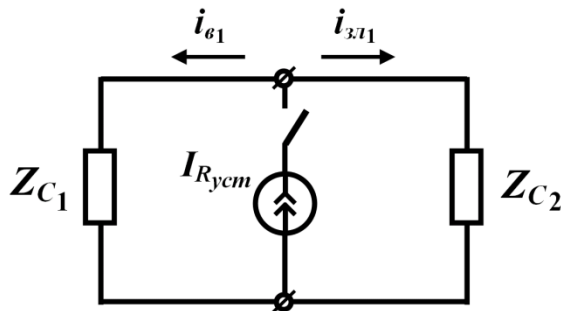


Рисунок 15.10

Отже, в першу чергу визначимо:



- коефіцієнт відбиття від початку лінії

$$N_1 = \frac{Z_0 - Z_{C1}}{Z_0 + Z_{C1}} = -1,$$

де  $Z_0$  – внутрішній опір джерела. В нашому випадку джерело ідеальне, тому  $Z_0 = 0$ ;

- коефіцієнт відбиття від місця з'єднання двох ліній

$$N_2 = \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}} = \frac{2}{3};$$

- коефіцієнт відбиття від кінця повітряної лінії

$$N_3 = \frac{R_n - Z_{C2}}{R_n + Z_{C2}} = 0;$$

- коефіцієнт заломлення в точці з'єднання двох ліній

$$N_{31} = \frac{2Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} = \frac{5}{3}.$$

Розглянемо інтервал часу  $0 < t < t_1$ , де  $t_1$  – час руху хвилі струму від джерела струму до місця розташування вхідних клем кабельної лінії. Через це вважатимемо дану хвилю першою відбитою хвилею струму. Для неї маємо

$$i_{\epsilon 1} = I_{R_{yctm}} \frac{Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} = 0,667 \text{ A.}$$

Перша ж хвиля струму в повітряній лінії, яка рухається від джерела струму в напрямку навантаження  $R_n$  як начебто перша заломлена хвиля (і надалі саме за таку її сприйматимемо), дорівнює

$$i_{31} = I_{R_{yctm}} \frac{Z_{C1}}{Z_{C1} + Z_{C2}} = 0,1333 \text{ A.}$$

Першу відбиту хвилю напруги в кабельній лінії розраховуємо за формулою  $u_{\epsilon 1} = i_{\epsilon 1} Z_{C1} = 53,33 \text{ В}$ , а першу заломлену хвилю напруги в повітряній лінії –  $u_{31} = i_{31} Z_{C2} = 53,33 \text{ В}$ .

Таким чином, загальні струми і напруги в інтервалі  $0 < t < t_1$

$$I_{k1} = I_{k_{yctm}} - i_{\epsilon 1} = 2 - 0,667 = 1,333 \text{ A,}$$

$$I_{n1} = I_{n_{yctm}} + i_{31} = 1,2 + 0,1333 = 1,333 \text{ A,}$$

$$U_{k1} = U_{k_{yctm}} + u_{\epsilon 1} = 480 + 53,3 = 533,3 \text{ В,}$$

$$U_{n1} = U_{n_{yctm}} + u_{31} = 533,3 \text{ В.}$$

Стосовно струмів, то, звичайно ж, ці струми мають бути однаковими, оскільки в місці з'єднання двох ліній після відмикання опору розгалуження зникає.

Подальший рух хвиль зобразимо на діаграмі (рис. 15.11) і за допомогою цієї діаграми розрахуємо їх значення.

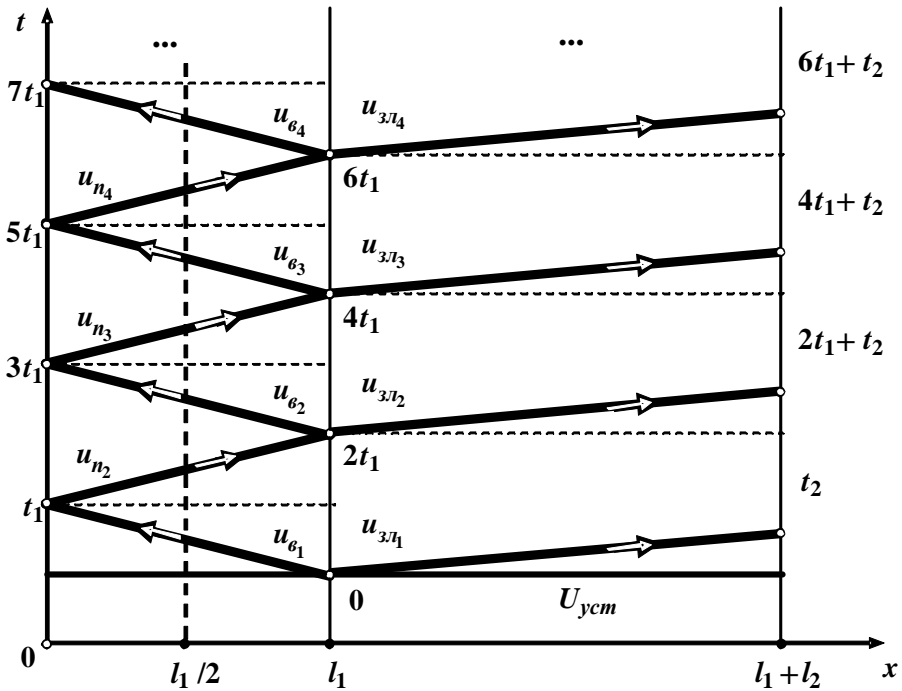


Рисунок 15.11

Отже,

$$u_{n2} = u_{e1} N_1 = 53,33 \cdot (-1) = -53,33 \text{ В}; \quad u_{3n2} = u_{n1} N_{3n} = -53,33 \cdot \frac{5}{3} = -88,88 \text{ В};$$

$$u_{e2} = u_{n1} N_2 = -53,33 \cdot \frac{2}{3} = -35,55 \text{ В}; \quad i_{3n2} = \frac{u_{3n2}}{Z_{C2}} = \frac{-88,88}{400} = -0,2222 \text{ А};$$

$$u_{n3} = u_{e2} N_1 = 35,55 \text{ В}; \quad u_{3n3} = u_{n3} N_{3n} = 59,25 \text{ В}; \quad i_{3n3} = \frac{u_{3n3}}{Z_{C2}} = 0,148 \text{ А};$$

$$u_{e3} = 23,7 \text{ В}; \quad u_{n4} = -23,7 \text{ В}; \quad u_{3n4} = -39,5 \text{ В}; \quad i_{3n4} = -0,099 \text{ А};$$

$$u_{e4} = -15,8 \text{ В}; \quad u_{n5} = 15,8 \text{ В}; \quad u_{3n5} = 26,33 \text{ В}; \quad i_{3n5} = 0,066 \text{ А};$$

$$u_{e5} = 10,53 \text{ В}; \quad u_{n6} = -10,53 \text{ В}; \quad u_{3n6} = 17,55 \text{ В}; \quad i_{3n6} = -0,044 \text{ А};$$

$$u_{e6} = -7,02 \text{ В}; \quad u_{n7} = 7,02 \text{ В}; \quad u_{3n7} = 11,7 \text{ В}; \quad i_{3n7} = 0,029 \text{ А}.$$

За отриманими даними складемо залежність зміни напруги від часу в точці, розташованій на середині кабельної лінії. Здійснимо це спочатку в табличній формі (див. табл. 15.3), а потім побудуємо і графік (рис. 15.12).

Час руху хвилі вздовж кабельної лінії складає

$$t_1 = \frac{l_1}{v} = 60 \text{ мкс},$$

а повітряною лінією –

$$t_2 = \frac{l_2}{v_2} = 80 \text{ мкс.}$$

Таблица 15.3

Интервал часу	$u_k \left( \frac{l_1}{2}, t \right)$
	<b>B</b>
$0 < t < \frac{t_1}{2}$	$u_1 = U_{ycm} = 480$
$\frac{t_1}{2} \leq t < \frac{3t_1}{2}$	$u_2 = u_1 + u_{\epsilon 1} = 533,3$
$\frac{3t_1}{2} \leq t < \frac{5t_1}{2}$	$u_3 = u_2 + u_{n2} = 480$
$\frac{5t_1}{2} \leq t < \frac{7t_1}{2}$	$u_4 = u_3 + u_{\epsilon 2} = 444,45$
$\frac{7t_1}{2} \leq t < \frac{9t_1}{2}$	$u_5 = u_4 + u_{n3} = 480$
$\frac{9t_1}{2} \leq t < \frac{11t_1}{2}$	$u_6 = u_5 + u_{\epsilon 3} = 503,7$
$\frac{11t_1}{2} \leq t < \frac{13t_1}{2}$	$u_7 = u_6 + u_{n4} = 480$
$\frac{13t_1}{2} \leq t < \frac{15t_1}{2}$	$u_8 = u_7 + u_{\epsilon 4} = 464,2$

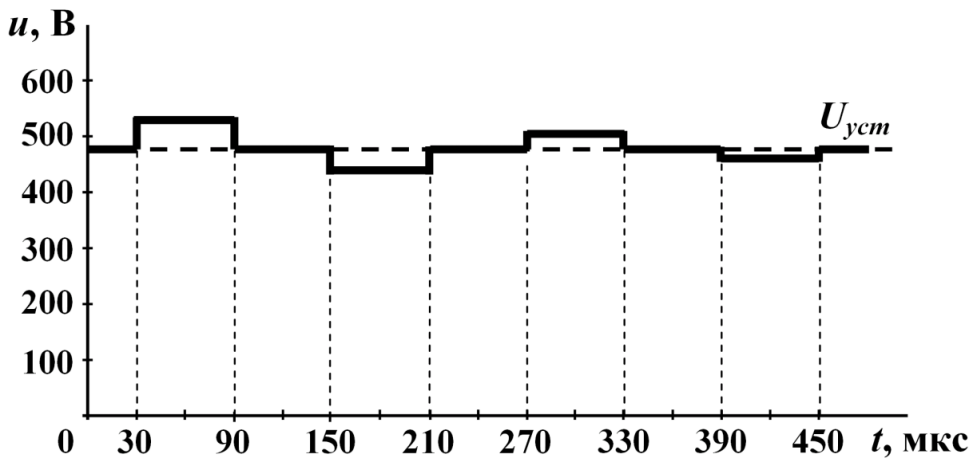


Рисунок 15.12

Таку ж таблицю складемо і для струму в навантаженні (табл. 15.4), за даними якої побудуємо графік (рис. 15.13).

Таблиця 15.4

Інтервал часу	$i_H(t)$
	А
$0 < t < t_2$	$i_1 = I_{н_{узм}} = 1,2$
$t_2 \leq t < 2t_1 + t_2$	$i_2 = i_1 + i_{3т1} = 1,333$
$2t_1 + t_2 \leq t < 4t_1 + t_2$	$i_3 = i_2 + i_{3т2} = 1,111$
$4t_1 + t_2 \leq t < 6t_1 + t_2$	$i_4 = i_3 + i_{3т3} = 1,259$
$6t_1 + t_2 \leq t < 8t_1 + t_2$	$i_5 = i_4 + i_{3т4} = 1,16$
$8t_1 + t_2 \leq t < 10t_1 + t_2$	$i_6 = i_5 + i_{3т5} = 1,226$

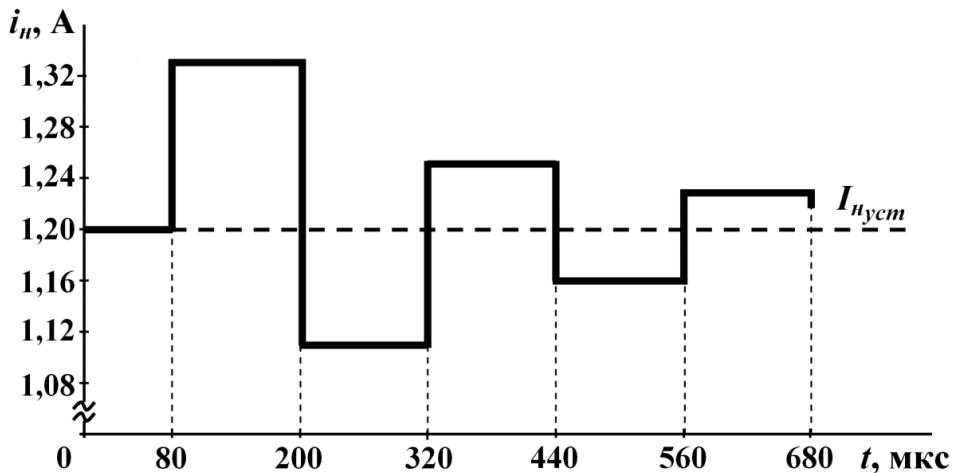


Рисунок 15.13

**15.5** До входу лінії без втрат з хвильовим опором  $Z_C = 40$  Ом для згладжування крутого фронту падаючої хвилі паралельно під'єднали ємність  $C = 5$  мкФ. Лінію підкнули до джерела постійної напруги з е.р.с.  $E = 500$  В і внутрішнім опором  $R_0 = 10$  Ом. Визначити форму падаючої хвилі напруги як функцію часу та показати розподіл цієї напруги вздовж лінії через час  $T = 40$  мкс після комутації.

Фазову швидкість поширення хвилі вважати рівною швидкості світла.

### Розв'язування

Як відомо, для визначення форми першої падаючої хвилі використовують схему заміщення із зосередженими параметрами. В цій схемі довгу лінію заміщують активним опором зі значенням, що дорівнює хвильовому опору лінії (рис. 15.14).

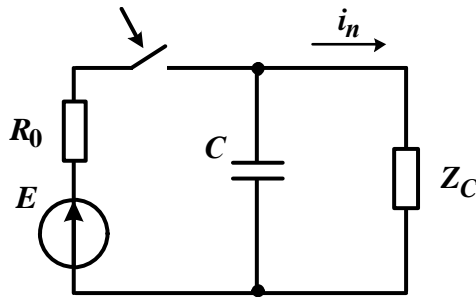


Рисунок 15.14

Для розрахунку перехідного процесу в такій схемі заміщення можливе застосування будь-якого з відомих методів (наприклад, класичний метод, операторний тощо). В результаті в точці, розташованій на початку лінії, для падаючої хвилі струму маємо

$$i_n = 10(1 - e^{-2,5 \cdot 10^4 t}) \text{ А},$$

а для падаючої хвилі напруги –

$$u_n = i_n Z_C = 400(1 - e^{-2,5 \cdot 10^4 t}) \text{ В}.$$

Щоб побудувати графік розподілу падаючої хвилі вздовж лінії в деякий момент часу, потрібно записати напругу падаючої хвилі як функцію двох змінних, однією з яких є час  $t$ , а другою – відстань  $x$ . Так, для падаючої хвилі напруги цей вираз має вигляд

$$u_n(t, x) = \begin{cases} 400 \left( 1 - e^{-2,5 \cdot 10^4 \left( t - \frac{x}{v} \right)} \right), & t > \frac{x}{v}, \\ 0, & t < \frac{x}{v}. \end{cases}$$

Тоді для заданого часу  $T = 40$  мкс маємо

$$u_n = 400 \left( 1 - e^{-2,5 \cdot 10^4 \left( 4 \cdot 10^{-5} - \frac{x}{v} \right)} \right) \text{ В}.$$

Графік цієї напруги показано на рис. 15.15.

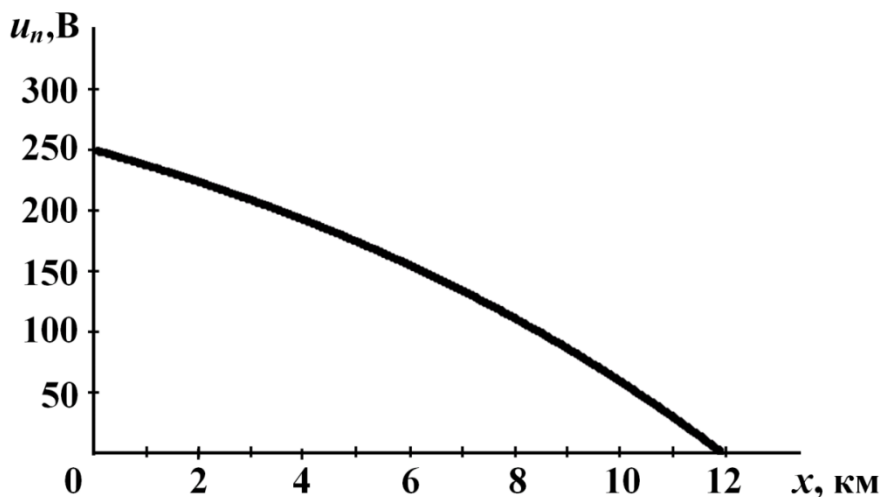


Рисунок 15.15

**15.6** Визначити форму напруги на навантаженні для лінії з вихідними даними, що відповідають даним попередньої задачі (див. задачу 15.5), якщо ємність  $C$  увімкнута паралельно навантаженню  $R_n = 60$  Ом (рис. 15.16). Додатково розрахувати коефіцієнт відбиття від кінця лінії.

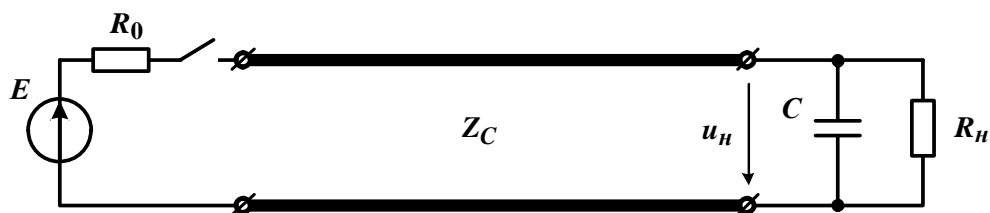


Рисунок 15.16

### Розв'язування

Внаслідок вмикання лінії до джерела з внутрішнім опором  $R_0$  в ній утворюється падаюча хвиля з прямокутним фронтом, висота якого становить

$$u_n = U = \frac{EZ_C}{R_0 + Z_C} = 400 \text{ В.}$$

Схемою заміщення для розрахунку перехідного процесу в кінці лінії є схема із зосередженими параметрами (рис. 15.17), для розрахунку перехідного процесу в якій можна застосувати будь-який з відомих методів.

В результаті для напруги на опорі навантаження, яка водночас є напругою і на ємності, отримуємо співвідношення

$$u_n = u_C = \frac{2UR_n}{R_n + Z_C} (1 - e^{-pt}) = 480(1 - e^{-8333t}) \text{ В,}$$

де  $p = -\frac{R_n + Z_C}{R_n Z_C C} = -8333 \text{ с}^{-1}$ , якщо вважати момент приходу падаючої хвилі до кінця лінії початком перехідного процесу  $t = 0$ .

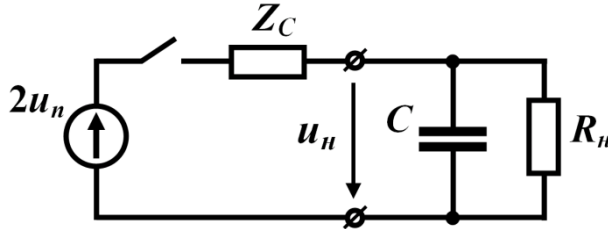


Рисунок 15.17

За відомою падаючою хвилею напруги в кінці лінії  $u_n$  та загальною напругою навантаження  $u_n$  легко зйти напругу відбитої хвилі

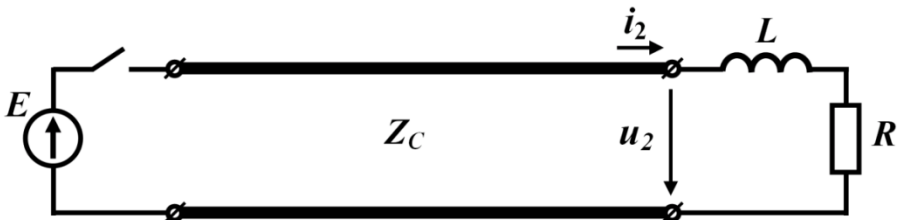
$$u_e = u_n - u_n = 480(1 - e^{-8333t}) - 400 = 80(1 - 6e^{-8333t}) \text{ В.}$$

Коефіцієнт відбиття від кінця лінії

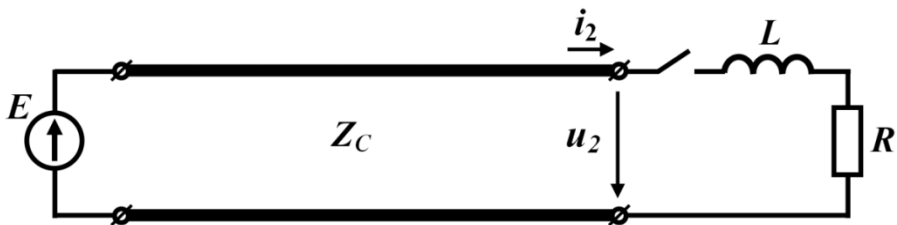
$$N = \frac{u_e}{u_n} = 0,2(1 - 6e^{-8333t}).$$

Варто зауважити, що коли в будь-якій точці лінії увімкнено зосереджений реактивний елемент, то коефіцієнт відбиття є функцією часу.

**15.7** Розглянути два випадки вмикання активно-індуктивного навантаження  $R = 100 \text{ Ом}$  і  $L = 0,8 \text{ Гн}$  в довгій лінії (рис. 15.18 а і б).



а)



б)

Рисунок 15.18

1. Довга лінія без втрат з хвильовим опором  $Z_C = 400$  Ом, яка вже тривалий час (усталений режим) навантажена активно-індуктивним опором, підмикається до ідеального джерела напруги з е.р.с.  $E = 1000$  В (див. рис. 15.18, а).

2. Значене активно-індуктивне навантаження вмикається в кінці цієї ж лінії, яка тривалий час була підімкнута до того ж самого джерела живлення (див. рис. 15.18, б).

Розрахувати напругу на навантаженні та коефіцієнт відбиття від кінця лінії для двох випадків:

а) в перший момент появи відбитої хвилі, яка з'явиться після приходу падаючої;

б) в перший момент після замикання ключа.

### Розв'язування

1. В першому випадку, коли довгу лінію, навантажену активно-індуктивним опором, підмикають до ідеального джерела, від початку лінії до її кінця поширюється падаюча хвиля  $u_n = E = 1000$  В. Для розрахунку перехідного процесу в кінці лінії складемо схему заміщення із зосередженими параметрами (рис. 15.19).

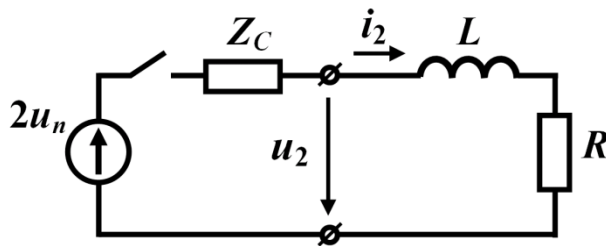


Рисунок 15.19

Струм в навантаженні

$$i_2 = \frac{2E}{R + Z_C} (1 - e^{pt}),$$

де  $p = -\frac{R + Z_C}{L} = -625 \frac{1}{\text{с}}$ .

В даному випадку відлік часу необхідно розпочинати з моменту приходу падаючої хвилі до кінця лінії.

Тоді напруга на навантаженні

$$u_2 = Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} = \frac{2E}{R + Z_C} (R + Z_C e^{pt}) = 400(1 + 4e^{-625t}) \text{ В.}$$

Оскільки  $u_2 = u_n + u_{\text{в}}$ , то для відбитої хвилі напруги маємо

$$u_{\text{в}} = u_2 - u_n = 400 + 1600e^{-625t} - 1000 = 200(8e^{-625t} - 3) \text{ В.}$$

Отже,  $u_2(0) = 2000$  В, а



$$N_2 = \frac{u_{e2}}{u_{n2}} = 0,2(8e^{-625t} - 3).$$

2. В другому випадку до моменту замикання ключа в лінії була присутня тільки падаюча хвиля напруги  $u_n = E$ , а після комутації в кінці лінії з'являються ще й відбиті хвилі напруги і струму, які поширюються в напрямку до початку лінії. Тому напруга на навантаженні дорівнює сумі

$$u_2 = u_n + u_e = E + u_e,$$

а струм –

$$i_2 = i_n - i_e.$$

Оскільки безпосередньо до моменту вмикання падаючої хвилі струму в навантаженні не було, то відповідно до закону комутації її не буде і в момент вмикання навантаження, через що

$$i_2 = -i_e.$$

За другим законом Кірхгофа маємо

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt} + Ri_2.$$

Враховуючи, що

$$i_2 = \frac{u_e}{Z_C},$$

а також скориставшись наведеними вище міркуваннями та співвідношеннями, отримуємо

$$L \frac{di_2}{dt} + (R + Z_C)i_2 = E.$$

Оскільки  $i_2(0) = 0$ , то розв'язком цього диференціального рівняння є

$$i_2 = \frac{E}{R + Z_C} (1 - e^{pt}),$$

де  $p = -\frac{R + Z_C}{L} = -625 \text{ с}^{-1}$ .

Відтак відбита хвиля напруги дорівнює

$$u_e = i_e Z_C = -i_2 Z_C = -\frac{EZ_C}{R + Z_C} (1 - e^{pt}) = -800(1 - e^{-625t}) \text{ В},$$

а напруга на навантаженні –

$$u_2 = u_n + u_e = 1000 - 800(1 - e^{-625t}) = 200(1 + 4e^{-625t}) \text{ В},$$

на підставі чого отримуємо

$$u_2(0) = 1000 \text{ В}.$$

Коефіцієнт відбиття  $N_2 = \frac{u_e}{u_n} = -0,8(1 - e^{-625t})$ .

**15.8** Лінію без втрат з хвильовим опором  $Z_C = 80$  Ом (рис. 15.20) підімкнуто до джерела з внутрішнім опором  $R_0 = 20$  Ом і індуктивністю  $L_0 = 0,2$  Гн.

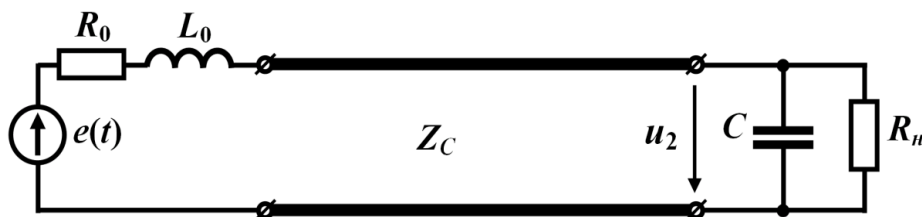


Рисунок 15.20

Навантаженням лінії є паралельно з'єднані ємність  $C = 75$  мкФ і активний опір  $R_n = 40$  Ом. В момент часу  $t = 0$  джерело надсилає в лінію імпульс напруги, форму якого показано на рис. 15.21, а, де  $E = 150$  В, а  $T = 1$  мс. Визначити падаючу хвилю напруги на навантаженні і побудувати графік загальної напруги на навантаженні.

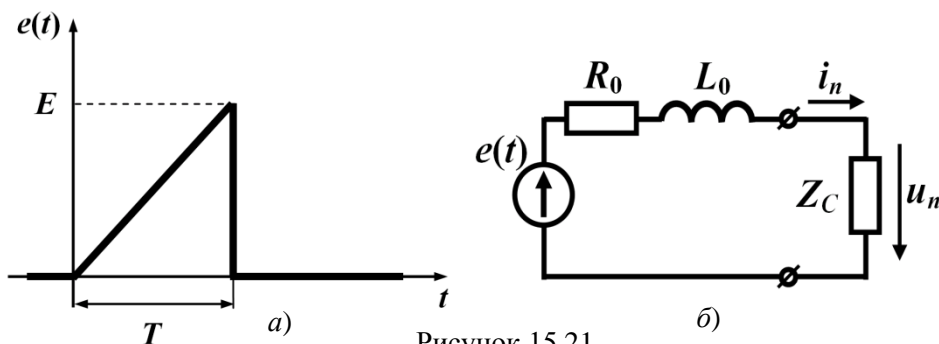


Рисунок 15.21

### Розв'язування

Форму падаючої хвилі визначимо, скориставшись схемою заміщення із зосередженими параметрами (рис. 15.21, б) та розрахувавши в ній перехідний процес.

В нашому випадку доцільно спочатку за допомогою інтеграла Дюамеля знайти струм падаючої хвилі, а потім через співвідношення

$$u_n = i_n Z_C$$

і падаючу хвилю напруги.

Перехідна характеристика для струму в даній схемі заміщення

$$h(t) = \frac{1}{R_0 + Z_C} (1 - e^{pt}),$$

де  $p = -\frac{R_0 + Z_C}{L} = -500 \frac{1}{\text{с}}$ .

Звідки

$$h(t) = 0,01(1 - e^{-500t}) \text{ См.}$$

Для інтервалу часу  $0 < t < T$  струм падаючої хвилі визначається за виразом

$$i_n(t) = e(0)h(t) + \int_0^t e'(\tau)h(t-\tau)dt,$$

де заданий за умовою імпульс напруги  $e(t) = 15 \cdot 10^4 t$  В, звідки значення  $e(0) = 0$ , а похідна  $e'(\tau) = 15 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{с}}$ .

Тоді для падаючої хвилі струму маємо

$$i_n(t) = \int_0^t 15 \cdot 10^4 \cdot 0,01 [1 - e^{-500(t-\tau)}] d\tau = 1500t - 3 + 3e^{-500t} \text{ А,}$$

а напруги  $u_n = 12 \cdot 10^4 t - 240 + 240e^{-500t}$  В.

В інтервалі часу  $t > T$  струм падаючої хвилі визначаємо як

$$\begin{aligned} i_n(t) &= e(0)h(t) + \int_0^T e'(\tau)h(t-\tau)d\tau - Eh(t-T) = \\ &= \int_0^T 15 \cdot 10^4 \cdot 0,01 [1 - e^{-500(t-\tau)}] d\tau - 150 \cdot 0,01 [1 - e^{-500(t-T)}] = \\ &= 0,527e^{-500t} \text{ А.} \end{aligned}$$

Хвиля напруги

$$u_n = i_n Z_C = 42,15e^{-500t} \text{ В.}$$

Таким чином, залежність падаючої хвилі напруги від часу  $t$  на початку лінії  $x = 0$  має вигляд

$$u_n(t) = \begin{cases} 12 \cdot 10^4 t - 240 + 240e^{-500t} \text{ В,} & 0 < t < T, \\ 42,15e^{-500t} \text{ В,} & t > T. \end{cases}$$

Тоді залежністю цієї ж хвилі одночасно і від часу  $t$ , і від відстані  $x$  від початку лінії до будь-якої її точки буде функція

$$u_n(t, x) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{v}, \\ 12 \cdot 10^4 \left( t - \frac{x}{v} \right) - 240 + 240e^{-500 \left( t - \frac{x}{v} \right)} \text{ В,} & \frac{x}{v} < t < T, \\ 42,15e^{-500 \left( t - \frac{x}{v} \right)} \text{ В,} & t > T, \end{cases}$$

що дозволяє розрахувати падаючу хвилю напруги в кінці лінії, де  $x = l$ ,

$$u_{n2}(t) = u_n(t, l) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_1, \\ 12 \cdot 10^4 (t - t_1) - 240 + 240e^{-500(t-t_1)} \text{ В}, & t_1 < t < T, \\ 42,15e^{-500(t-t_1)} \text{ В}, & t > T, \end{cases}$$

де  $t_1 = \frac{l}{v}$ .

Якщо падаюча хвиля напруги відома, то перехідний процес в кінці лінії розраховується за допомогою схеми заміщення із зосередженими параметрами (рис. 15.22). Для аналізу перехідного процесу скористаємось інтегралом Дюамеля і розрахунок виконаємо для двох часових інтервалів:  $0 < t < T$  і  $T < t < \frac{2l}{v}$ . За початок відліку часу ( $t = 0$ ) виберемо момент надходження падаючої хвилі до навантаження і створення відбитої хвилі, розрахунок проводимо до моменту часу, поки відбита хвиля не дійде до початку лінії і після відбиття знову не повернеться до кінця лінії, тобто на інтервалі  $0 < t < \frac{2l}{v}$ .

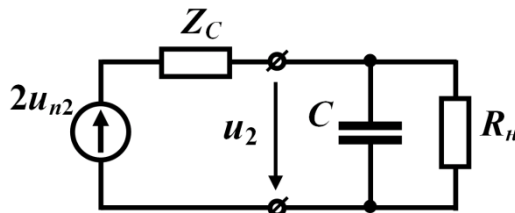


Рисунок 15.22

Перехідна характеристика схеми заміщення напруги на навантаженні

$$h_{u_2}(t) = \frac{R_n}{R_n + Z_C} \left( 1 - e^{-\frac{R_n + Z_C}{R_n Z_C C} t} \right) = \frac{1}{3} (1 - e^{-500t}).$$

Для інтервалу  $0 < t < T$  матимемо

$$u_2(t) = 2u_{n2}(0)h_{u_2}(t) + \int_0^t 2u'_{n2}(\tau)h_{u_2}(t-\tau) d\tau,$$

де  $u_{n2}(0) = 0$ , а

$$u'_{n2}(\tau) = 12 \cdot 10^4 - 12 \cdot 10^4 e^{-500\tau} \frac{\text{В}}{\text{с}}.$$

Після підстановки числових значень отримуємо

$$u_2(t) = 320(e^{-500t} - 1) + 8 \cdot 10^4 t (e^{-500t} + 1) \text{ В}.$$

Для наступного часового інтервалу  $t > T$  напруга на навантаженні

$$u_2(t) = \int_0^T 12 \cdot 10^4 (1 - e^{-500\tau}) \frac{1}{3} [1 - e^{-500(t-\tau)}] d\tau +$$

$$+ \int_T^t 4,215 \cdot 10^4 e^{-500\tau} \frac{1}{3} [1 - e^{-500(t-\tau)}] d\tau = (1,405 \cdot 10^4 t - 9,75) e^{-500t} \text{ В.}$$

Отже, остаточний результат набуває вигляду

$$u_2(t) = \begin{cases} 320(e^{-500t} - 1) + 8 \cdot 10^4 t (e^{-500t} + 1) \text{ В,} & 0 < t < T, \\ (1,405 \cdot 10^4 t - 9,75) e^{-500t} \text{ В,} & T < t < \frac{2l}{v}. \end{cases}$$

Графік отриманої напруги побудовано на рис. 15.23.

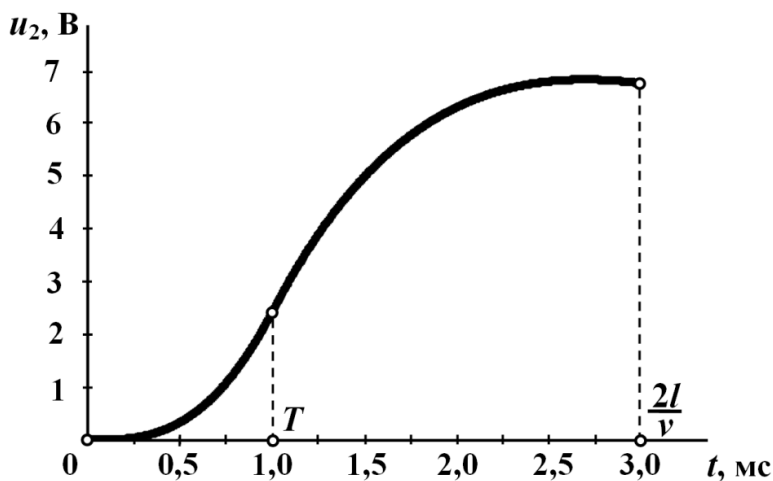


Рисунок 15.23

### Завдання для самостійного розв'язування

**15.9** Лінія без втрат, довжиною  $l = 360$  км з хвильовим опором  $Z_C = 400$  Ом, підмається в режимі холостого ходу до джерела постійної напруги з е.р.с.  $E = 1000$  В і внутрішнім опором  $R_0 = 100$  Ом. Фазова швидкість поширення хвиль дорівнює швидкості світла. Побудувати залежність напруги і струму в лінії від часу в інтервалі  $0 < t < 8$  мс в точці, розташованій на відстані 120 км від початку лінії.

*Підказка.* Для розв'язування задачі передусім доцільно побудувати діаграму руху, наприклад, як в задачі 15.2.

**Відповідь:** графіки наведено на рис. 15.24

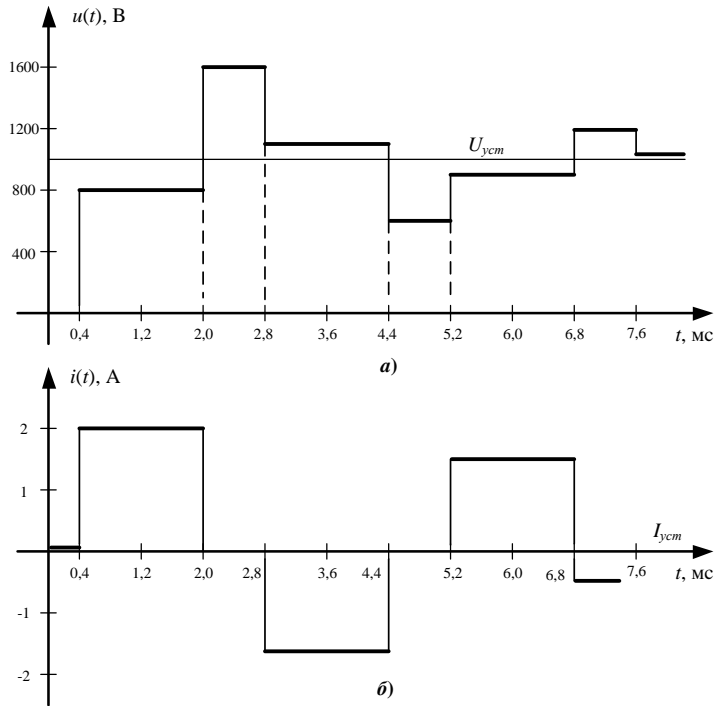


Рисунок 15.24

**15.10** Повітряну лінію, довжиною  $l_1 = 30$  км і хвильовим опором  $Z_{C1} = 510$  Ом, з'єднано з кабельною лінією, довжина якої  $l_2 = 10$  км, а значення хвильового опору  $Z_{C2} = 90$  Ом (рис. 15.25). Кабельна лінія працює в узгодженому режимі. Фазова швидкість поширення хвилі в повітряній лінії становить  $v_1 = 3 \cdot 10^5$  км  $\cdot$  с $^{-1}$ , а в кабельній –  $v_2 = 2 \cdot 10^5$  км  $\cdot$  с $^{-1}$ . Повітряну лінію підмикають до ідеального джерела напруги з е.р.с.  $E = 1020$  В. Побудувати в інтервалі  $0 < t < 1$ мс залежності напруги  $u_x(t)$  в точці, розташованій на середині повітряної лінії і напруги на навантаженні  $u_2(t)$ .

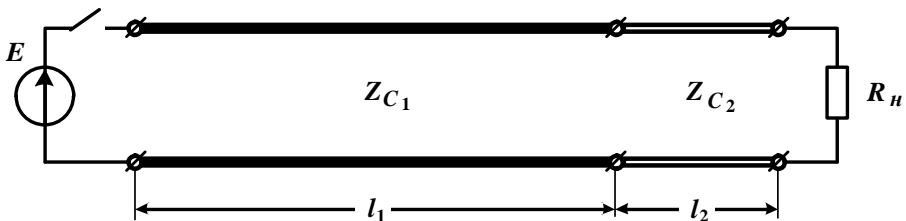


Рисунок 15.25

*Підказка.* Спробуйте побудувати діаграму руху.

*Відповідь:* графіки показано на рис. 15.26.

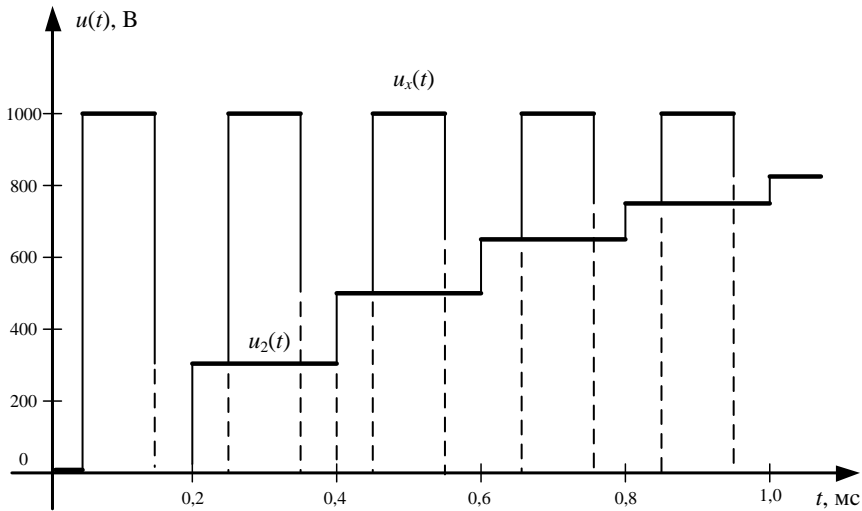


Рисунок 15.26

**15.11** В кінці лінії, яка живиться від джерела постійної напруги з е.р.с.  $E = 235$  В і внутрішнім опором  $R_0 = 20$  Ом, вмикається навантаження активно-індуктивного характеру  $R_H = 50$  Ом,  $L_H = 0,2$  Гн (рис. 15.27, а). Довжина лінії становить  $l = 150$  км, а її хвильовий опір –  $Z_C = 450$  Ом. Розрахувати напругу на навантаженні  $u_2(t)$ .

**Відповідь:** напруга в заданому інтервалі  $u_2(t) = 45 + 405 e^{-2500t}$  В.

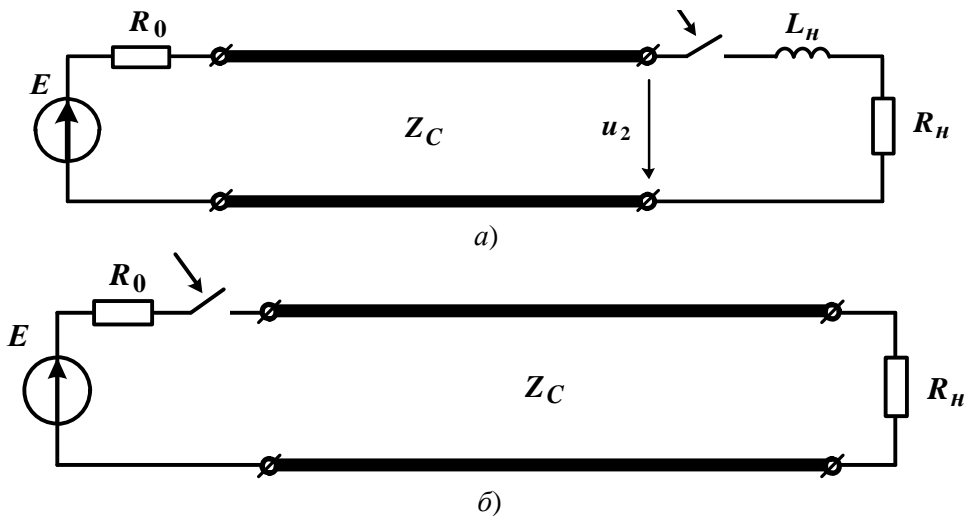


Рисунок 15.27

**15.12** Довгу лінію (рис. 15.27, б), довжиною  $l = 240$  км, яку навантажено активним опором  $R_H = 100$  Ом, підмикають до джерела постійної напруги з е.р.с.  $E = 1000$  В і внутрішнім опором  $R_0 = 400$  Ом. Хвильовий опір лінії  $Z_C = 400$  Ом. Фазова швидкість хвилі дорівнює швидкості світла. Визначити тривалість перехідного процесу в лінії і побудувати графік розподілу падаючих і відбитих хвиль напруги і струму вздовж лінії.

**Відповідь:** тривалість перехідного процесу в цій лінії скінченна і дорівнює  $t_m = 1,6$  мс, тому що немає відбиття на початку лінії. Графік розподілу хвиль подано на рис. 15.28.

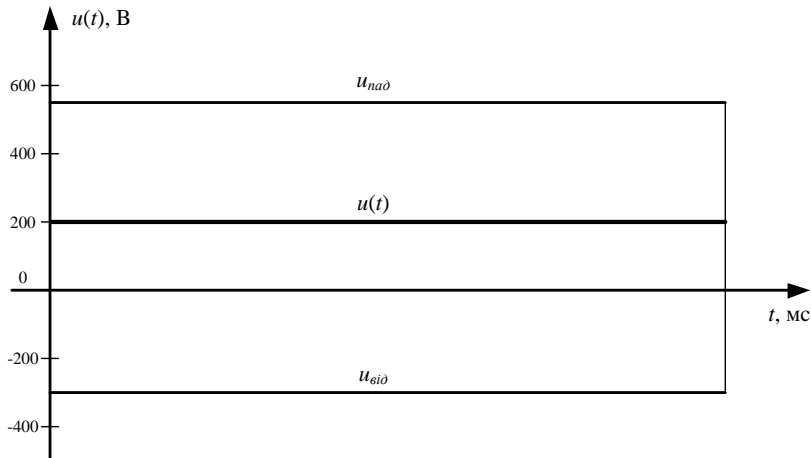


Рисунок 15.28

**15.13** Лінію без втрат підмикають до схеми (рис. 15.29), що складається з джерела постійної напруги з е.р.с.  $E = 500$  В і внутрішнім опором  $R_0 = 20$  Ом та паралельно увімкненої до джерела ємності  $C = 500$  мкФ. Довжина лінії  $l = 120$  км, хвильовий опір лінії  $Z_C = 500$  Ом. Лінія навантажена на активний опір  $R_H = 100$  Ом. Фазова швидкість поширення хвилі  $v = 3 \cdot 10^5$  км  $\cdot$  с $^{-1}$ . Визначити значення напруги на навантаженні в момент часу  $t_1 = 0,5$  мс, прийнявши за початок відліку часу момент комутації.

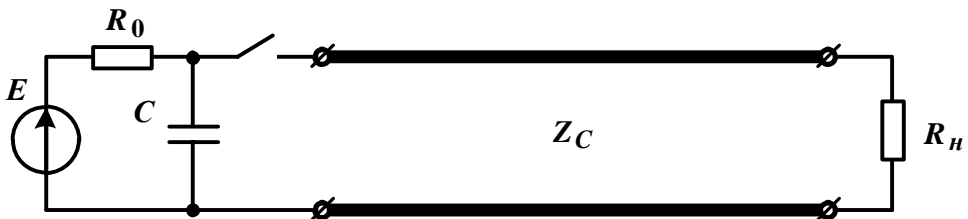


Рисунок 15.29

**Відповідь:**  $u_2(t) = 200 + 8e^{-1000t}$  В,  $\frac{l}{v} < t < \frac{3l}{v}$ ;  $u_2(t_1) = 204,8$  В.



**15.14** Довга лінія має такі параметри: довжина лінії  $l = 120$  км, її хвильовий опір  $Z_C = 400$  Ом. Навантаження лінії складається з послідовно з'єднаних ємності  $C = 10,6$  мкФ і активного опору  $R_H = 200$  Ом, як це показано на рис. 15.30.

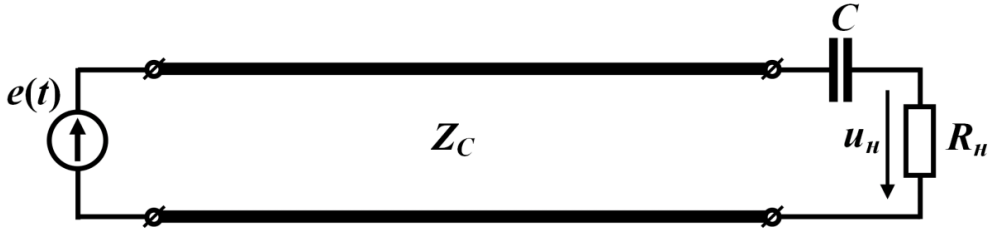


Рисунок 15.30

В лінію без втрат джерело подає прямокутний імпульс напруги  $u(t)$ . Знайти миттєву напругу  $u_H(t)$  на активному опорі навантаження і розрахувати її значення  $u_H(t_1)$  через  $t_1 = 1$  мс після подачі імпульсу, якщо  $U_0 = 120$  В, а  $\tau = 0,4$  мс (рис. 15.31).

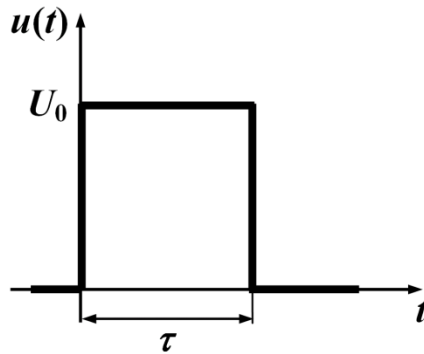


Рисунок 15.31

Відповідь: 
$$u_H(t) = \begin{cases} 64e^{-1000t} \text{ В,} & \frac{l}{v} < t < \frac{l}{v} + \tau, \\ -31,5e^{-1000t} \text{ В,} & \frac{l}{v} + \tau < t < \frac{3l}{v}; \end{cases}$$

$$u_H(t_1) = -11,6 \text{ В.}$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник [для студентів вищих навч. закл.] / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацев; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. – 456 с.
2. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник [для студентів вищих навч. закл.] / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацев, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. – 326 с.
3. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : підручник [для студентів вищих навч. закл.] / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 338 с.
4. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола : підруч. / В. С. Перхач – К. : Вища школа, 1992. – 439 с.
5. Теоретичні основи електротехніки. [у 3-х т.] : підруч. [для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти]. Т.1. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами / В. С. Бойко [та ін.]; заг. ред. І. М. Чиженко, В. С. Бойко – К. : Політехніка, 2004. – 272 с.
6. Теоретичні основи електротехніки. [у 3-х т.] : підруч. [для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти]. Т. 2. Перехідні процеси у лінійних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола / В. С. Бойко [та ін.]; заг. ред. І. М. Чиженко, В. С. Бойко – К. : НТУУ “КПІ”, 2008. – 224 с.
7. Теоретические основы электротехники. [в 3-х т.] Т. 1 : [учеб. для вузов] / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровин, В. Л. Чечурин – СПб : Питер, 2003. – 463 с.
8. Теоретические основы электротехники. [в 3-х т.] Т. 2: [учеб. для вузов] / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровин, В. Л. Чечурин – СПб : Питер, 2003. – 576 с.
9. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов – М. : Высшая школа, 1973. – 750 с.
10. Основы теории цепей : [учеб. для вузов] / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 528с.
11. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники / Атабеков Г. И. – М. : Энергия, 1978. – 280 с.
12. Теоретические основы электротехники / под ред. проф. П. А. Ионкина. – М. : Высшая школа, 1978. – 543 с.

Навчальне видання

**Карпов Юхим Овдійович**  
**Ведміцький Юрій Григорович**  
**Кухарчук Василь Васильович**  
**Усов Віктор Васильович**  
**Родінков Валерій Іванович**

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ.  
ЗАДАЧІ ТА ПРИКЛАДИ  
РОЗРАХУНКУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ**

**Навчальний посібник**

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено **Ю. Г. Ведміцьким**

Підписано до друку  
Формат 29,7 × 42 ¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman  
Друк різнографічний. Ум. друк. арк.  
Наклад 300 (1-й запуск – 100) пр. Зам № 2015

Вінницький національний технічний університет,  
навчально-методичний відділ ВНТУ.  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-85-32.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті  
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-87-38.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

