

Вінницький національний технічний університет  
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**ЧЕРНОВА ІРИНА ОЛЕКСАНДРІВНА**

УДК 62-50

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**МЕТОДИ СИНТЕЗУ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕКВІВАЛЕНТНИХ  
МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ БАГАТОВИМІРНИХ  
ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи  
Технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ І.О. Чернова

Науковий керівник Мокін Борис Іванович

академік НАПН України, заслужений діяч науки і техніки  
України, доктор технічних наук, професор

Вінниця – 2018

## АНОТАЦІЯ

*Чернова І. О.* Методи синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Вінницький національний технічний університет, Вінниця, 2018.

Як відомо з теоретичної електротехніки, технічної кібернетики та теорії автоматичного керування, процес у динамічному об'єкті, в якому має місце лише один накопичувач маси чи енергії, завжди може бути описаний математичною моделлю у вигляді диференціального рівняння першого порядку, а якщо ж цей динамічний об'єкт має два, три або  $n$  накопичувачів маси чи енергії, то процеси в ньому можуть бути описані диференціальними рівняннями, відповідно, другого, третього чи  $n$ -го порядку. Але, як показано в теорії вимірювань, при диференціюванні будь-якого реального фізичного процесу швидко накопичується похибка вимірювання параметрів цього процесу, оскільки високошвидкісні завади, що накладаються на будь-який процес, навіть якщо вони мають незначний рівень, при диференціюванні вносять суттєві похибки в результат вимірювання, а якщо ці завади диференціюються до того ж ще кілька разів, що має місце при використанні математичних моделей процесів у вигляді диференціальних рівнянь з порядком, вищим першого, то результати вимірювань, отримані в процесі моделювання конкретного фізичного об'єкта, спотворюються у ще більшій мірі. Тому дуже часто при використанні математичної моделі реального фізичного процесу у вигляді диференціального рівняння невисокого порядку можна отримати результати моделювання більш наближені до цього реального фізичного процесу, аніж при використанні в якості математичної моделі цього процесу диференціального рівняння з високим порядком, визначеним дійсною кількістю елементарних накопичувачів енергії чи маси у фізичному об'єкті, процеси в

якому моделюються. Процес заміни математичних моделей реальних фізичних процесів у вигляді диференціальних рівнянь високих порядків математичними моделями у вигляді диференціальних рівнянь невисокого порядку, які за певним критерієм достатньо адекватно відображають цей реальний фізичний процес, що моделюється, називається еквівалентуванням, а самі математичні моделі мінімального порядку називають еквівалентними математичними моделями.

На можливість використання під час моделювання реальних фізичних процесів з багатьма накопичувачами маси та енергії еквівалентних моделей невисокого порядку вперше вказав у шестидесятих роках минулого століття відомий київський вчений, академік Ішлінський, який висловив гіпотезу про те, що рух динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням з порядком, вищим третього, в діапазоні зміни координат руху можна еквівалентно (без внесення суттєвих похибок) описувати диференціальним рівнянням з порядком, не вищим третього. З тих пір ця гіпотеза Ішлінського бездоказово сприймається як аксіома, для якої необхідно було рано чи пізно віднайти умови, за яких вона є справедливою.

А тому важливим та актуальним є отримання відповіді на те, за яких умов можна замість математичних моделей реальних динамічних процесів, що мають вигляд диференціальних рівнянь високого порядку, використовувати, не вносячи суттєвих похибок, еквівалентні математичні моделі, що мають вигляд диференціальних рівнянь мінімально-допустимого порядку, та відповіді на те, як ідентифікувати синтезовані еквівалентні моделі.

А тому важливим є отримання відповіді на те, за яких умов можна замість математичних моделей реальних динамічних процесів, що мають вигляд диференціальних рівнянь високого порядку, використовувати, не вносячи суттєвих похибок, еквівалентні математичні моделі, що мають вигляд диференціальних рівнянь мінімально-допустимого порядку, та відповіді на те, як ідентифікувати синтезовані еквівалентні моделі.

Метою дисертаційного дослідження полягає у зменшенні витрат часу на розв'язання задач аналізу та оптимізації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах шляхом використання еквівалентних математичних моделей мінімального порядку і методів їх синтезу та ідентифікації.

Науковою новизною виконаного дисертаційного дослідження визначено:

1. Вперше визначено умови, за яких процеси в мінімально-фазових динамічних об'єктах (МФДО), що описуються лінійними диференціальними рівняннями високих порядків, можна еквівалентно описувати, не виходячи за клас МФДО, диференціальними рівняннями з різницею порядків старших похідних у лівій і правій частинах, не вищою трьох, що дозволяє зменшити витрати часу при їх застосуванні в задачах аналізу та оптимізації процесів у цих об'єктах.

2. Для лінійних багатовимірних МФДО вперше розроблено методи ідентифікації процесів у них математичними моделями з різницею порядків старших похідних у лівій і правій частинах, не вищою трьох, еквівалентними за частотою зрізу, якщо об'єкти працюють в режимі прямої передачі сигналу, та еквівалентними за критичною частотою, якщо об'єкти замикаються одиничним від'ємним зв'язком. В основу методів покладена система рівнянь, одна частина яких синтезується з урахуванням граничних умов, що задаються мінімальною частотою та частотою зрізу у випадку прямої передачі сигналу, або мінімальною та критичною частотами у випадку замикання об'єкта зворотнім зв'язком, а друга частина в обох випадках синтезується за стандартною процедурою методу найменших квадратів з використанням логарифмічних амплітудних частотних характеристик (ЛАЧХ). Показано, що еквівалентні математичні моделі лінійного багатовимірного МФДО, синтезовані з використанням частоти зрізу та критичної частоти, відрізняються, що є ще одним доказом того, що будувати еквівалентні математичні моделі необхідно з урахуванням як характеру процесів в МФДО високого порядку, так і характеру задачі, що покладається на нього.

3. Запропоновано методи синтезу еквівалентних математичних моделей МФДО високого порядку в класі немінімально-фазових систем не вище другого порядку, що дозволяє пришвидшити обробку даних за цією моделлю, та методи ідентифікації синтезованих у такий спосіб еквівалентних математичних моделей. Один із цих методів при еквівалентуванні динамічних об'єктів, що працюють в режимі прямої передачі сигналу, базується на незмінності частоти зрізу до і після еквівалентування та методі найменших квадратів відносно ЛАЧХ об'єкта і його еквівалентної моделі, а другий метод при еквівалентуванні динамічних об'єктів, що являють собою замкнуті системи, базується на незмінності критичної частоти до і після еквівалентування та методі найменших квадратів відносно фазових частотних характеристик об'єкта і його еквівалентної моделі.

4. Вперше доведено, що оптимальною математичною моделлю стаціонарного часового ряду, який є стохастичною моделлю процесу в дискретному динамічному об'єкті, є модель авторегресії-ковзного середнього, що має третій порядок і по авторегресійній складовій, і по складовій ковзного середнього, що дозволяє пришвидшити обробку і такого класу моделей теж. В якості критеріїв оптимальності для цього доведення вибрано умову закладення в модель інформації про критичну частоту спектра об'єкта, процеси в якому моделюються, та умову закладення в модель інформації про напрям і зміну напрямку тренду ковзного середнього.

5. Узагальнено на другий порядок лінійної частини відомий метод синтезу математичних моделей нелінійних динамічних систем з нелінійними характеристиками у вигляді поліномів та моделями першого порядку інерційної частини, який базується на алгоритмі переведення кратних інтегралів Вольтерра, заданих у часовій області, в однократні інтеграли, для розв'язання яких використовуються амплітудно-фазові частотні характеристики інерційної частини цих систем.

Практична цінність отриманих в дисертації результатів полягає в першу чергу у тому, що вони доповнюють теорію синтезу та ідентифікації

математичних моделей динамічних систем умовами використання замість математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів, тобто об'єктів високих порядків в задачах їх аналізу та оптимізації еквівалентних математичних моделей з мінімально-допустимим порядком, а також доповнюють цю теорію методами ідентифікації еквівалентних моделей, для яких створено конкретні алгоритми реалізації та розрахункові співвідношення для оцінювання адекватності.

Отримані результати доповнили також програми таких навчальних дисциплін, як «Методологія та організація наукових досліджень» та «Методологія та організація наукових досліджень в галузі інформаційних технологій» студентам спеціальностей 141 «Електроенергетика» та 126 «Інформаційні системи та технології», що викладаються студентам магістерської підготовки, що засвідчено відповідним актом. У цих програмах та лекційних курсах наводяться основні положення еквівалентування математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів та переваги, які це дає.

Ефективність запропонованих методів синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів підтверджена в процесі розроблення еквівалентних математичних моделей системи керування тяговим електроприводом електромобіля. Саме ці результати дисертаційного дослідження, що націлені на розв'язання конкретних задач розроблення та використання еквівалентних моделей процесів у реальних пристроях автомобільного транспорту, передані для впровадження у ТОВ «АТП «Слободянюк», що засвідчено відповідним актом.

**Ключові слова:** математична модель багатовимірного лінійного динамічного об'єкту, мінімально-фазова система, диференціальне рівняння високого порядку, передаточна функція, логарифмічні частотні характеристики, частота зрізу, критична частота, еквівалентування багатовимірних динамічних об'єктів моделями мінімально-допустимого порядку, замкнута мінімально-фазова лінійна система автоматичного керування, немінімально-фазова

система, еквівалентна математична модель не вище другого порядку, модель авторегресії-ковзного середнього часового ряду мінімального порядку, еквівалентна математична модель не вище другого порядку нелінійної системи з поліноміальними нелінійностями.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1]. О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "До питання вибору оптимальної математичної моделі стаціонарного часового ряду", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №4, с. 74-80, 2018.

[2]. О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "Метод ідентифікації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу", *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*, №3, 2014. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/415>. Дата звернення: Лис. 15, 2018.

[3]. О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "Ідентифікація еквівалентної за критичною частотою математичної моделі мінімального порядку для багатовимірного динамічного об'єкта", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №5, с. 9-14, 2014.

[4]. А. Б. Мокин, В. Б. Мокин, Б. И. Мокин, и И. А. Чернова, "Определение условий и разработка методов описания процессов в сложных динамических объектах эквивалентными моделями не выше третьего порядка", *Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики"*, № 2, с. 37-49, 2016.

[5]. Б. И. Мокин, и И. А. Чернова, "Построение математической модели минимального порядка для линейной динамической системы с обратной связью", *Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики"*, №2, с. 59-66, 2017.

[6]. Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, та І. О. Чернова, "Еквівалентування моделей мінімально-фазових лінійних систем автоматичного керування з ПІД-регуляторами в класі немінімально-фазових", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №3, с. 81-88, 2018.

[7]. В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, Б. І. Мокін, С. О. Довгополук, та І. О. Чернова, "Еквівалентування математичних моделей мінімально-фазових систем високого порядку в класі немінімально-фазових", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №6, с. 111-121, 2017.

[8]. Б. І. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова, та С. О. Довгополук, "Еквівалентування замкнутої лінійної динамічної системи за наявності похідної у правій частині її математичної моделі", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №3, с. 68-76, 2017.

[9]. A. B. Mokin, V. B. Mokin, B. I. Mokin, and I. A. Chernova, "Determining the Conditions and Designing the Methods for Description of Processes in Complex Dynamic Objects by Equivalent Models not Higher than the Third-Order", *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 48, issue 3, pp. 83-97, 2016.

[10]. B. I. Mokin, and I. A. Chernova, "Construction of a Mathematical Model of the Minimum Order for a Linear Dynamical System With Feedback", *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 49, issue 3, pp. 69-77, 2017.

[11]. Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "Узагальнення Фур'є-інтегрального метода ідентифікації на еквівалентні математичні моделі нелінійних динамічних систем з другим порядком їх інерційної складової", на *XIV Міжн. наук. конф. Контроль і управління в складних системах (КУСС-2018)*, Вінниця, 2018, с. 22.

[12]. B. I. Mokin, and I. O. Chernova, "Equivalent to the Critical Frequency Mathematical Model of Minimum Order for a Complex Dynamic Object", на *XXII Міжн. наук. конференції з автоматичного управління «Автоматика 2015»*, Одеса, 2015, с. 12-13.



[13]. В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, Б. І. Мокін, С. О. Довгополук, та І. О. Чернова, "Еквівалентування математичних моделей мінімально-фазових систем високого порядку в класі немінімально-фазових", на *IV Міжн. наук. конф. «Вимірювання, контроль та діагностика в технічних системах (ВКДТС-2017)»*, Вінниця, 2017, с. 162.

[14]. В. І. Mokin, О. В. Mokin, V. B. Mokin, and I. O. Chernova, "Mathematical Models of Minimum Order for Complex Systems Equivalent Regarding Cutoff Frequency", in *Proc. 3rd Intern. Scien. Conf. Nonlinear analysis and applications*, Київ, 2015, pp. 40-41.

[15]. Б. И. Мокин, и И. А. Чернова, "Эквивалентирование линейной динамической системы, исходная математическая модель которой имеет производные в правой части", на *XXIII Міжн. конф. з автоматичного управління «Автоматика 2016»*, Суми, 2016, с. 26-28.

[16]. Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "Еквівалентні моделі динамічних систем з операцією диференціювання у правій частині", на *XLV Науково-техн. конф. підрозділів Вінницького національного технічного університету (НТКП ВНТУ-2016)*, Вінниця, 2016, с. 2409-2410.

[17]. Б. І. Мокін, І. О. Чернова, та С. О. Довгополук, "Новий підхід до визначення мінімально-допустимого порядку математичної моделі замкнutoї системи автоматичного керування з ПД-регулятором", на *XLVI Науково-техн. конф. підрозділів Вінницького національного технічного університету (НТКП ВНТУ-2017)*, Вінниця, 2017, с. 1561-1563.

[18]. Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова, та С. О. Довгополук, "Синтез математичних моделей замкнутих систем автоматичного керування з ПД-регуляторами в немінімально-фазовому просторі", на *XLVII Науково-техн. конф. підрозділів Вінницького національного технічного університету (НТКП ВНТУ-2018)*, Вінниця, 2018, с. 1787-1789.

## ABSTRACT

*Chernova I. O.* Methods of synthesis and identification of equivalent mathematical models of multidimensional dynamic objects – Qualification research paper, manuscript copyright.

Thesis for the degree of a candidate of technical sciences in specialty 01.05.02 «Mathematical Modeling and Computational Methods». – Vinnytsia National Technical University. Vinnytsia, 2018.

Thesis researches the creation of methods for synthesis and identification of mathematical models of minimum order for decreasing time when used in tasks of analysis and optimisation of processes in multidimensional dynamic objects.

For the first time the research proves that the process in minimum phase dynamic objects with negative feedback which are described by the linear differential equation of the high orders, may be equivalently described within the scope of minimum phase ones by the differential equations of minimum order, which equals the sum of maximum order of the derivative in the right part and a three num.

For the minimum phase linear multidimensional dynamic objects, that operate in the mode of the real time signal transmission and which do not have the derivatives in the right part of the differential mathematical model, there had been for the first time developed the method for identification of the processes by the mathematical models not higher than that of the third order, equivalent as for the cutoff frequency. The algorithm of the method is based on the system of the equations, one part of which shall be synthesised with the consideration of the boundary conditions, set by the minimum frequency and cutoff frequency, and the other part shall be synthesised using the standard procedure of the least squares method with the use of Bode magnitude plots. The suggested method of synthesis and identification of the equivalent models had been transformed into the multidimensional continuous linear minimum phase dynamic objects, described by the differential equations with the derivatives in the right part.

For the closed minimum phase linear multidimensional dynamic objects, the

mathematical models of the open loop of which do not have the derivatives in the right part of the differential mathematical model, there had been for the first time developed the method of synthesis and identification of processes by the mathematical models not higher than those of the third order, but equivalent as for the critical frequency. The suggested method of synthesis and identification of the equivalent models is transformed into the closed multidimensional continuous linear minimum phase dynamic objects, the open loops of which are described by the differential equations with the derivatives in the right part.

There had been suggested the method of synthesis and identification of the equivalent mathematical models of minimum phase dynamic systems of the high order with the algorithm, plunged into the frequency domain, in the class of non-minimum phase, that is, in the kind of differential models not higher than those of the second order with an argument, which is late by a certain time during the signal transmission from the input to the output of the system.

It had been proved that the optimal mathematical model of the stationary time series, which is the model of the process on the statistically distributed discrete dynamic object is the model of autoregression-moving average of the third order on the autoregressive component as well as on the component of the moving average. Entering information on the object's spectrum critical frequency as well as direction and redirection of the moving average trend on the model were the conditions, chosen as the optimal criteria to prove this argument.

There had been generalised the synthesis method of mathematical models of nonlinear dynamic systems with nonlinear characteristics in the form of polynomials and the models of inertial part in the form of magnitude and phase responses, which is based on the algorithm of converting multiple Volterra integral equations, set in the time domain, into the single integral equations, for the solution of which there used the magnitude and phase responses of the inertial part of these systems, on the tasks of reduction of nonlinear dynamic systems with random order of their nonlinear characteristics and the second order of the transfer functions of their inertia components. On the example of nonlinear dynamic systems with the third order of

nonlinear characteristics and the second order of the inertia part of these systems there had been specified the algorithm of parametric identification of their equivalent models.

Practical value of the results obtained is that, first of all, they complement to the theory of synthesis and identification of the mathematical models of dynamic systems with the conditions of using the equivalent mathematical models with the minimum allowed order instead of mathematical models of multidimensional dynamic objects, that is, objects of the high orders in the tasks of their analysis and optimisation, they also complement this theory with the methods for identification of the equivalent models, for which there had been created specific realisation algorithms and calculation correlations for the evaluation of the adequacy.

**Key words:** minimum phase system, non-minimum phase system, linear multidimensional continuous and discrete dynamic objects, stochastic and nonlinear dynamic objects, mathematical models in the form of differential equations, transfer functions, frequency responses and Volterra integral equations, synthesis of mathematical models in the time domain, plain of complex numbers and in frequency domain, reduction, methods of identification as for the cutoff frequency and critical frequency, optimisation of models parameters.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ **Error! Bookmark not defined.**

ВСТУП..... 16

РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ НАУКОВИХ ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ЗАВДАНЬ ДОСЛІДЖЕННЯ ..... **Error! Bookmark not defined.**

1.1 Характеристика класів математичних моделей, в яких здійснюватиметься еквівалентування, та математичного апарату, який буде використовуватись при цьому..... **Error! Bookmark not defined.**

1.2 Аналіз наукових публікацій по синтезу та ідентифікації математичних моделей неперервних лінійних багатовимірних динамічних об'єктів у класі мінімально-фазових ..... **Error! Bookmark not defined.**

1.3 Аналіз наукових публікацій по синтезу та ідентифікації математичних моделей неперервних лінійних багатовимірних динамічних об'єктів у класі немінимально-фазових..... **Error! Bookmark not defined.**

1.4 Аналіз наукових публікацій по синтезу та ідентифікації математичних моделей дискретних стохастичних багатовимірних лінійних об'єктів **Error! Bookmark not defined.**

1.5 Аналіз наукових публікацій по синтезу та ідентифікації математичних моделей неперервних нелінійних багатовимірних динамічних об'єктів **Error! Bookmark not defined.**

1.6 Висновки за матеріалами аналізу наукових публікацій та визначення задач дослідження за темою дисертації..... **Error! Bookmark not defined.**

РОЗДІЛ 2 СИНТЕЗ ЕКВІВАЛЕНТНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ БАГАТОВИМІРНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ У КЛАСІ МІНІМАЛЬНО-ФАЗОВИХ ..... **Error! Bookmark not defined.**

2.1 Визначення узагальнених умов, за яких математичні моделі неперервних багатовимірних лінійних динамічних об'єктів можна еквівалентувати моделями мінімального порядку, та умов визначення цього мінімуму **Error! Bookmark not defined.**

2.2 Розроблення методу синтезу та ідентифікації еквівалентної математичної моделі мінімального порядку в класі мінімально-фазових неперервних лінійних динамічних об'єктів для задач вимірювання сигналів і їх фільтрації **Error! Bookmark not defined.**

2.3 Розроблення методу синтезу та ідентифікації еквівалентної математичної моделі мінімального порядку в класі мінімально-фазових неперервних лінійних динамічних об'єктів для задач оцінювання стійкості **Error! Bookmark not defined.**

2.4 Розроблення методу оцінювання адекватності синтезованої еквівалентної моделі.....**Error! Bookmark not defined.**

2.5 Висновки за матеріалами другого розділу дисертації **Error! Bookmark not defined.**

РОЗДІЛ 3 СИНТЕЗ ЕКВІВАЛЕНТНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ БАГАТОВИМІРНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ У КЛАСІ НЕМІНІМАЛЬНО-ФАЗОВИХ .....**Error! Bookmark not defined.**

3.1 Визначення умов, за яких еквівалентні математичні моделі в класі немінімально-фазових матимуть порядок, не вищий другого **Error! Bookmark not defined.**

3.2 Розроблення методу синтезу та ідентифікації еквівалентної математичної моделі мінімального порядку в класі немінімально-фазових неперервних лінійних динамічних об'єктів для задач вимірювання сигналів і їх фільтрації.....**Error! Bookmark not defined.**

3.3 Розроблення методу синтезу та ідентифікації еквівалентної математичної моделі мінімального порядку в класі немінімально-фазових неперервних лінійних динамічних об'єктів для задач оцінювання стійкості **Error! Bookmark not defined.**

3.4 Приклад еквівалентування замкнутої системи автоматичного (чи автоматизованого) керування в класі немінімально-фазових динамічних систем в адачі оцінювання стійкості .....**Error! Bookmark not defined.**

3.5 Висновки за матеріалами третього розділу дисертації **Error! Bookmark not defined.**

РОЗДІЛ 4 СИНТЕЗ ЕКВІВАЛЕНТНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ БАГАТОВИМІРНИХ ДИСКРЕТНИХ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ТА НЕПЕРЕРВНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ **Error! Bookmark not defined.**

4.1. Визначення умов, за яких еквівалентна математична модель багатовимірного дискретного лінійного стохастичного об'єкта матиме порядок, не вищий третього.....**Error! Bookmark not defined.**

4.2. Розширення можливостей та узагальнення методу синтезу еквівалентних моделей нелінійних динамічних об'єктів на основі інтегральних рівнянь Вольтерра.....**Error! Bookmark not defined.**

4.3 Висновки за матеріалами четвертого розділу дисертації**Error! Bookmark not defined.**

ВИСНОВКИ .....**Error! Bookmark not defined.**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ..... 27

ДОДАТКИ .....**Error! Bookmark not defined.**

Додаток А Акти впровадження .....**Error! Bookmark not defined.**

Додаток Б Список публікацій за темою дисертації**Error! Bookmark not defined.**

## ВСТУП

### Обґрунтування вибору теми дослідження

Як відомо з теоретичної електротехніки [3], технічної кібернетики [16], [46], [69] та теорії автоматичного керування [30], [39], [75], процес у динамічному об'єкті, в якому має місце лише один накопичувач маси чи енергії, завжди може бути описаний математичною моделлю у вигляді диференціального рівняння першого порядку, а якщо ж цей динамічний об'єкт має два, три або  $n$  накопичувачів маси чи енергії, то процеси в ньому можуть бути описані диференціальними рівняннями, відповідно, другого, третього чи  $n$ -го порядку. І оскільки кожен конденсатор та кожна індуктивність є накопичувачем електромагнітної енергії, а кожна електронна система чи електротехнічний комплекс містять в собі десятки конденсаторів та котушок індуктивностей, то адекватними математичними моделями процесів у них фактично можуть бути лише диференціальні рівняння надзвичайно високих порядків. Аналогічно і кожна механічна система містить в собі десятки елементарних накопичувачів маси та потенціальної і кінетичної енергій, а тому адекватними математичними моделями процесів у них також можуть бути лише диференціальні рівняння надзвичайно високих порядків. Але, як показано в теорії вимірювань [13], при диференціюванні будь-якого реального фізичного процесу швидко накопичується похибка вимірювання параметрів цього процесу, оскільки високошвидкісні завади, що накладаються на будь-який процес, навіть якщо вони мають незначний рівень, при диференціюванні вносять суттєві похибки в результат вимірювання, а якщо ці завади диференціюються до того ж ще кілька разів, що має місце при використанні математичних моделей процесів у вигляді диференціальних рівнянь з порядком, вищим першого, то результати вимірювань, отримані в процесі моделювання конкретного фізичного об'єкта, спотворюються у ще більшій мірі. Тому дуже часто при використанні математичної моделі реального фізичного процесу у вигляді диференціального рівняння невисокого порядку можна отримати



результати моделювання більш наближені до цього реального фізичного процесу, аніж при використанні в якості математичної моделі цього процесу диференціального рівняння з високим порядком, визначеним дійсною кількістю елементарних накопичувачів енергії чи маси у фізичному об'єкті, процеси в якому моделюються. Процес заміни математичних моделей реальних фізичних процесів у вигляді диференціальних рівнянь високих порядків математичними моделями у вигляді диференціальних рівнянь невисокого порядку, які за певним критерієм достатньо адекватно відображають цей реальний фізичний процес, що моделюється, називається еквівалентуванням, а самі математичні моделі мінімального порядку називають еквівалентними математичними моделями.

На можливість використання під час моделювання реальних фізичних процесів з багатьма накопичувачами маси та енергії еквівалентних моделей невисокого порядку вперше вказав у шестидесятих роках минулого століття відомий київський вчений, академік Ішлінський, який висловив гіпотезу про те, що рух динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням з порядком, вищим третього, в діапазоні зміни координат руху можна еквівалентно (без внесення суттєвих похибок) описувати диференціальним рівнянням з порядком, не вищим третього або, навіть, не вищим другого [26], [27]. З тих пір ця гіпотеза Ішлінського бездоказово сприймається як аксіома, для якої необхідно було рано чи пізно віднайти умови, за яких вона є справедливою.

Інтуїтивно справедливість гіпотези академіка Ішлінського можна підтвердити у такий спосіб. Якщо перетворити математичну модель реального фізичного процесу у вигляді диференціального рівняння, яке описує цей фізичний процес у часі, по Лапласу, то отримаємо адекватну диференціальному рівнянню математичну модель на комплексній площині у вигляді передаточної функції, порядок якої буде дорівнювати порядку перетвореного диференціального рівняння. Від місця розташування на комплексній площині полюсів передаточної функції, тобто, коренів многочлена, що є знаменником

цієї функції, залежить характер складових розв'язку перетвореного по Лапласу диференціального рівняння. І чим ближчими до уявної осі на комплексній площині будуть розміщуватись полюси передаточної функції, які у тому числі є і парами спряжених комплексних чисел, тим більший розмах коливань розв'язку диференціального рівняння буде задавати ця пара спряжених комплексних полюсів передаточної функції. Полюси ж передаточної функції, які розташовані на комплексній площині далеко від уявної осі, вносять в розв'язок диференціального рівняння дуже незначний вклад, а тому, формуючи цей розв'язок, ними можна і знехтувати. А відкидаючи пару комплексно-спряжених полюсів передаточної функції, на основі теореми Вієтта одразу ж маємо право на дві одиниці зменшити порядок передаточної функції, що автоматично на дві одиниці зменшує і порядок диференціального рівняння, з якого ця передаточна функція застосуванням перетворення Лапласа отримана. Але при цьому потрібно дати відповідь на запитання: «А за яких умов нехтування парою комплексно-спряжених полюсів передаточної функції не вплине суттєво на розв'язок диференціального рівняння, яким моделюється реальний фізичний процес і порядок якого, через відкидання пари комплексно-спряжених полюсів передаточної функції, на дві одиниці понизиться?» Відповіді на це запитання в загальному вигляді не отримано.

А тому тема дисертаційного дослідження, в якому будуть отримані відповіді на те, за яких умов можна замість математичних моделей реальних динамічних процесів, що мають вигляд диференціальних рівнянь високого порядку, використовувати, не вносячи суттєвих похибок, еквівалентні математичні моделі, що мають вигляд диференціальних рівнянь мінімально-допустимого порядку, та відповіді на те, як ідентифікувати синтезовані еквівалентні моделі, є актуальною в рамках спеціальності 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**  
Дисертаційна робота виконана в рамках наукової школи «Розроблення математичних моделей процесів, що протікають в складних технічних та

організаційних системах, інформаційно-вимірювальних систем та систем автоматичного і автоматизованого керування цими процесами», створеної Заслуженим діячем науки і техніки України, академіком Національної академії педагогічних наук України, доктором технічних наук, професором Мокіним Б. І. Тема дисертаційної роботи відповідає науковому напрямку досліджень за науково-дослідною роботою Вінницького національного технічного університету (ВНТУ) на замовлення Міністерства освіти і науки України, де здобувач була виконавцем: «Інформаційна технологія обробки параметрів просторово-часових моделей даних динамічних багатозв'язних просторово-розподілених систем» (№ держреєстрації 0115U001122, 2015-2016 рр.). Основні задачі дисертації відповідають державним науково-технічним програмам, що визначені Законами України № 1977-ХІІ «Про наукову і науково-технічну діяльність», № 74/98-ВР «Про національну програму інформатизації» та державній науково-технічній програмі України за пріоритетним напрямком 6. «Інформатика, автоматизація і приладобудування».

**Мета і завдання дослідження.** Мета дисертаційного дослідження полягає у зменшенні витрат часу на розв'язання задач аналізу та оптимізації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах шляхом використання еквівалентних математичних моделей мінімального порядку і методів їх синтезу та ідентифікації.

Для досягнення поставленої мети в дисертаційній роботі поставлені і розв'язані наступні наукові завдання:

1. Здійснити аналіз наукових публікацій за темою дисертації і визначити множину завдань, які необхідно розв'язати для досягнення мети дисертаційного дослідження за сформульованою темою.

2. Довести, за яких умов процеси в багатовимірних лінійних неперервних динамічних об'єктах із класу мінімально-фазових можуть бути описані еквівалентними математичними моделями мінімального порядку та сформулювати умови визначення цього мінімуму.

3. Розробити методи синтезу та ідентифікації еквівалентних

математичних моделей мінімального порядку, що адекватно описують процеси, які мають місце у багатовимірних неперервних лінійних динамічних об'єктах, не виходячи з класу мінімально-фазових.

4. Розробити методику оцінювання похибки еквівалентування багатовимірних неперервних лінійних динамічних об'єктів математичними моделями мінімального порядку для визначення ступеня їх адекватності.

5. Розробити методи синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей мінімального порядку в класі немінимально-фазових, що адекватно описують процеси, які мають місце в багатовимірних неперервних лінійних динамічних об'єктах із класу мінімально-фазових.

6. Визначити оптимальну складність авторегресійних математичних моделей дискретних лінійних стохастичних динамічних об'єктів.

7. Модифікувати Фур'є-інтегральний метод ідентифікації неперервних нелінійних динамічних об'єктів для забезпечення можливості його використання в задачах синтезу еквівалентних математичних моделей не вище другого порядку.

*Об'єкт дослідження* – процеси в багатовимірних лінійних та нелінійних неперервних та дискретних динамічних об'єктах.

*Предмет дослідження* – математичні моделі мінімального порядку для адекватного опису процесів у багатовимірних, лінійних і нелінійних, неперервних і дискретних динамічних об'єктах та методи їх ідентифікації.

**Методи дослідження.** Під час виконання дисертаційного дослідження були використані методи теорії диференціальних рівнянь для визначення можливості їх використання в якості математичних моделей реальних фізичних процесів; методи теорії електротехніки для доведення факту, що порядок диференціального рівняння, яке використовується в якості математичної моделі процесу, що має місце у фізичному об'єкті, визначається кількістю елементарних накопичувачів маси чи енергії, яку містить в собі цей фізичний об'єкт; методи теорії функцій комплексної змінної для трансформації математичних моделей, заданих у часі на комплексну площину; методи теорії

автоматичного керування для аналізу залежності процесів, що мають місце в об'єкті керування, від критичної частоти та від місця розташування полюсів передаточної функції на комплексній площині, а також для побудови логарифмічних частотних характеристик динамічних об'єктів; методи теорії інтегральних рівнянь для розв'язання задач синтезу математичних моделей нелінійних динамічних об'єктів; методи теорії вимірювань для дослідження залежності результатів вимірювання від частоти зрізу динамічного об'єкта, змінні стану якого вимірюються, а також для Фур'є-аналізу сигналів на вході і виході динамічних об'єктів та розроблення способу оцінювання похибки еквівалентування математичної моделі високого порядку; методи теорії ймовірностей взагалі та стаціонарних часових рядів зокрема для визначення оптимального порядку авторегресійних моделей реакцій дискретних динамічних об'єктів; методи теорії ідентифікації динамічних систем для розроблення методів ідентифікації еквівалентних математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів та методи теорії оптимізації для використання в процесі синтезу цих методів ідентифікації, а також методи технічної кібернетики і комп'ютерного моделювання для доведення адекватності синтезованих еквівалентних моделей мінімального порядку математичним моделям багатовимірних динамічних об'єктів високого порядку.

### **Наукова новизна отриманих результатів**

Серед результатів, одержаних в процесі дисертаційного дослідження, наукову новизну несуть наступні результати:

1. Вперше визначено умови, за яких процеси в мінімально-фазових динамічних об'єктах (МФДО), що описуються лінійними диференціальними рівняннями високих порядків, можна еквівалентно описувати, не виходячи за клас МФДО, диференціальними рівняннями з різницею порядків старших похідних у лівій і правій частинах, не вищою трьох, що дозволяє зменшити витрати часу при їх застосуванні в задачах аналізу та оптимізації процесів у цих об'єктах.

2. Для лінійних багатовимірних МФДО вперше розроблено методи ідентифікації процесів у них математичними моделями з різницею порядків старших похідних у лівій і правій частинах, не вищою трьох, еквівалентними за частотою зрізу, якщо об'єкти працюють в режимі прямої передачі сигналу, та еквівалентними за критичною частотою, якщо об'єкти замикаються одиничним від'ємним зв'язком. В основу методів покладена система рівнянь, одна частина яких синтезується з урахуванням граничних умов, що задаються мінімальною частотою та частотою зрізу у випадку прямої передачі сигналу, або мінімальною та критичною частотами у випадку замикання об'єкта зворотнім зв'язком, а друга частина в обох випадках синтезується за стандартною процедурою методу найменших квадратів з використанням логарифмічних амплітудних частотних характеристик (ЛАЧХ). Показано, що еквівалентні математичні моделі лінійного багатовимірного МФДО, синтезовані з використанням частоти зрізу та критичної частоти, відрізняються, що є ще одним доказом того, що будувати еквівалентні математичні моделі необхідно з урахуванням як характеру процесів в МФДО високого порядку, так і характеру задачі, що покладається на нього.

3. Запропоновано методи синтезу еквівалентних математичних моделей МФДО високого порядку в класі немінімально-фазових систем не вище другого порядку, що дозволяє пришвидшити обробку даних за цією моделлю, та методи ідентифікації синтезованих у такий спосіб еквівалентних математичних моделей. Один із цих методів при еквівалентуванні динамічних об'єктів, що працюють в режимі прямої передачі сигналу, базується на незмінності частоти зрізу до і після еквівалентування та методі найменших квадратів відносно ЛАЧХ об'єкта і його еквівалентної моделі, а другий метод при еквівалентуванні динамічних об'єктів, що являють собою замкнуті системи, базується на незмінності критичної частоти до і після еквівалентування та методі найменших квадратів відносно фазових частотних характеристик об'єкта і його еквівалентної моделі.

4. Вперше доведено, що оптимальною математичною моделлю стаціонарного часового ряду, який є стохастичною моделлю процесу в дискретному динамічному об'єкті, є модель авторегресії-ковзного середнього, що має третій порядок і по авторегресійній складовій, і по складовій ковзного середнього, що дозволяє пришвидшити обробку і такого класу моделей теж. В якості критеріїв оптимальності для цього доведення вибрано умову закладення в модель інформації про критичну частоту спектра об'єкта, процеси в якому моделюються, та умову закладення в модель інформації про напрям і зміну напрямку тренду ковзного середнього.

5. Узагальнено на другий порядок лінійної частини відомий метод синтезу математичних моделей нелінійних динамічних систем з нелінійними характеристиками у вигляді поліномів та моделями першого порядку інерційної частини, який базується на алгоритмі переведення кратних інтегралів Вольтерра, заданих у часовій області, в однократні інтеграли, для розв'язання яких використовуються амплітудно-фазові частотні характеристики інерційної частини цих систем.

#### **Практичне значення отриманих результатів.**

Практична цінність отриманих в дисертації результатів полягає в першу чергу у тому, що вони доповнюють теорію синтезу та ідентифікації математичних моделей динамічних систем умовами використання замість математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів, тобто об'єктів високих порядків в задачах їх аналізу та оптимізації еквівалентних математичних моделей з мінімально-допустимим порядком, а також доповнюють цю теорію методами ідентифікації еквівалентних моделей, для яких створено конкретні алгоритми реалізації та розрахункові співвідношення для оцінювання адекватності.

Отримані результати доповнили також програми таких навчальних дисциплін, як «Методологія та організація наукових досліджень» та «Методологія та організація наукових досліджень в галузі інформаційних технологій» студентам спеціальностей 141 «Електроенергетика» та 126

«Інформаційні системи та технології», що викладаються студентам магістерської підготовки, що засвідчено відповідним актом (Додаток А). У цих програмах та лекційних курсах наводяться основні положення еквівалентування математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів та переваги, які це дає.

Ефективність запропонованих методів синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів підтверджена в процесі розроблення еквівалентних математичних моделей системи керування тяговим електроприводом електромобіля. Саме ці результати дисертаційного дослідження, що націлені на розв'язання конкретних задач розроблення та використання еквівалентних моделей процесів у реальних пристроях автомобільного транспорту, передані для впровадження у ТОВ «АТП «Слободянюк», що засвідчено відповідним актом (Додаток А).

#### **Особистий внесок здобувача.**

Основні наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, авторові належать наступні наукові результати: [44] – розв'язання питання вибору оптимальної математичної моделі стаціонарного часового ряду; [49] – синтез методу ідентифікації процесів в багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу; [50] – розроблення алгоритму ідентифікації еквівалентної за критичною частотою математичної моделі мінімального порядку для багатовимірного динамічного об'єкта; [51] – визначення умов і розробка методів опису процесів в складних динамічних об'єктах еквівалентними моделями не вище третього порядку; [57] – синтез еквівалентної математичної моделі лінійної системи автоматичного керування з ПД-регулятором в класі немінімально-фахових систем 2-го порядку; [58] – розроблення алгоритму мінімізації порядку еквівалентних моделей для систем



автоматичного керування з ПД-регулятором; [59] – побудова математичної моделі мінімального порядку для лінійної динамічної системи зі зворотним зв'язком; в роботі [60] – еквівалентування математичних моделей мінімально-фазових систем високого порядку в класі немінімально-фазових з використанням критерію найменших квадратів; [61] – еквівалентування замкнутої лінійної динамічної системи за наявності похідної у правій частині її математичної моделі, яка відповідає наявності ПД-регулятора; [62] – узагальнення Фур'є-інтегрального методу ідентифікації на еквівалентні математичні моделі нелінійних динамічних систем з другим порядком їх інерційної складової; [92] – визначення умов та розроблення методів опису процесів у складних динамічних об'єктах за еквівалентними моделями, не вищими за третій порядок; [94] – побудова математичної моделі мінімального порядку для лінійної динамічної системи зі зворотним зв'язком; [95] – еквівалентування багатовимірного динамічного об'єкта математичною моделлю мінімального порядку за умови незмінності критичної частоти; [102] – синтез еквівалентної математичної моделі вимірювальної системи в класі немінімально-фазових з використанням частоти зрізу; [103] – синтез еквівалентної математичної моделі в класі мінімально-фазових систем з використанням критичної частоти і методу найменших квадратів; [104] – розроблення алгоритму методу ідентифікації еквівалентної моделі багатовимірного динамічного об'єкта; [105] – визначення мінімального порядку моделі для систем автоматичного керування з ПД-регулятором; [106] – синтез математичної моделі замкнутої системи автоматичного керування з ПД-регулятором мінімального порядку в немінімально-фазовому просторі.

**Апробація матеріалів дисертації.** Результати, отримані в дисертаційному дослідженні, доповідались та обговорювались на п'яти міжнародних наукових конференціях: на III Міжнародній науковій конференції «Нелінійний аналіз і застосування», присвяченій пам'яті член-кор. НАН України В. Мельника (Київ, 1-3 квітня 2015 р.), на XXII Міжнародній науковій

конференції з автоматичного управління «Автоматика 2015» (Одеса, 10-11 вересня, 2015), на 23-й Міжнародній конференції з автоматичного управління «Автоматика 2016» (Суми, 22-23 вересня 2016), на IV Міжнародній науковій конференції «Вимірювання, контроль та діагностика в технічних системах (ВКДТС-2017)» (Вінниця, 31 жовтня – 2 листопада 2017 р.) та на Міжнародній науковій конференції з контролю і управління в складних системах (КУСС-2018) (Вінниця, 15-17 жовтня 2018 р.), а також на чотирьох (XLIV–XLVII) науково-технічних конференцій підрозділів Вінницького національного технічного університету, що проводились у м. Вінниці у 2015-2018 роках (11-13 березня 2015 р. (без публікації тез), 2-11 березня 2016 р., 15-24 березня 2017 р., 14-23 березня 2018 р.).

#### **Публікації.**

Результати дисертаційного дослідження опубліковані у 18 наукових роботах, із яких 6 опубліковано у наукових журналах, що входять до переліку фахових видань України [44], [49], [50], [57], [60], [61], у т.ч. в одному електронному фаховому виданні [49], 2 опубліковано у періодичному журналі у США, що входить до наукометричної бази видань Scopus [92], [94], 2 опубліковано у науковому журналі з міжнародним статусом [51], [59], 5 є матеріалами міжнародних [62], [95], [102], [103], [104] і 3 – регіональних [58], [105], [106] наукових конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних літературних джерел зі 106 найменувань і додатків. Загальний обсяг дисертації складають 179 сторінки, з яких основний зміст дисертації викладено на 146 сторінках, на яких розміщено поряд із текстом 16 рисунків.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1]. М. В. Ананьев, "Вибір початкових даних для ідентифікації об'єктів керування", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №6, с. 7-10, 2012.
- [2]. А. И. Андреев, и В. Е. Львов, "Анализ замкнутых систем автоматического управления судном по курсу", на *XIV Міжн. конф. з автоматичного управління. Автоматика 2009*, Чернівці, 2009, с. 242-243.
- [3]. Л. А. Бессонов, *Теоретические основы электротехники. Электрические цепи*, Москва: Высшая школа, 1978, 528 с.
- [4]. Дж. Бокс, та Г. Дженкинс, *Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып.1*, Москва: Мир, 1974, 408 с.
- [5]. Дж. Бокс, та Г. Дженкинс, *Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып.2*, Москва: Мир. 1974, 197 с.
- [6]. В. П. Бабак, В. С. Хандецкий, та Е. Шрюфер, *Обработка сигналов*, Київ: Либіль, 1999, 496 с.
- [7]. В. М. Булавацкий, "Некоторые задачи моделирования дробно-дифференциальной геофильтрационной динамики в рамках обобщенных математических моделей", *МНТЖ «Проблемы управления и информатики»*, №3 с. 59-71, 2016.
- [8]. Е. В. Братусь, П. И. Бидюк, и А. А. Болдак, "Разработка методов восстановления пропущенных значений прогнозирования для взаимозависимых временных рядов", *МНТЖ «Проблемы управления и информатики»*, №5, с. 13-21, 2017.
- [9]. О. В. Березюк, "Удосконалення математичної моделі концентрацій забруднювальних речовин у фільтраті полігонів твердих побутових відходів", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №4, с. 28-31, 2016.
- [10]. Й. Й. Білинський, Б. П. Книш, та Д. В. Шеванюк, "Математична модель вимірювального перетворювача компонентів скрапленого нафтового газу", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №3, с. 7-12, 2016.

- [11]. А. Ю. Волковский, "Дискретное управление процессами поддержания климатических условий в животноводческом комплексе", *Научный журнал КубГАУ*, №68(04), с. 1-16, 2011.
- [12]. Г. Ван-Трис, *Синтез оптимальных нелинейных систем управления*, М.: Мир, 1964, 167 с.
- [13]. Е. Вашны, *Динамика измерительных цепей*, М.: Энергия, 1969, 288 с.
- [14]. В. В. Васильев, Л. А. Симак, и А. М. Рыбникова, *Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем в среде Matlab/SIMULINK*, Киев: НАН Украины, 2008, 91 с.
- [15]. Х. Гурецкий, *Анализ и синтез систем управления с запаздыванием*, Перевод с польского, М.: Машиностроение, 1974, 328 с.
- [16]. В. М. Глушков и др., *Энциклопедия кибернетики. (В двух томах)*. Том первый, Киев, Главная редакция УСЭ, 1975. – 607 с. 86.
- [17]. В. Ф. Губарев, и А. О. Жуков, "Исследование метода итеративной идентификации многомерных дискретных систем", *МНТЖ «Проблемы управления и информатики»*, №5, с. 23-38, 2008.
- [18]. Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская, О. П. Кваша, Г. Л. Смирнов, и Г. И. Феклисов, *Численные методы*, Москва: Высшая школа, 1976, 368 с.
- [19]. В. М. Дубовой, *Моделювання систем контролю та керування*, Вінниця: ВНТУ, 2005, 175 с.
- [20]. В. М. Дубовой, Р. Н. Кветний, О. І Михальов, та А. В. Усов, *Моделювання та оптимізація систем: підручник*, Вінниця: ПП «ГД «Едельвейс», 2017, 804 с.
- [21]. Г. О. Добрушкін, та В. Я. Данилов, "Основні підходи до розпізнавання мовленнєвої інформації (Частина 1)", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №4, с. 50-64, 2009.
- [22]. Г. О. Добрушкін, та В. Я. Данилов, "Основні підходи до розпізнавання мовленнєвої інформації (Частина 2)", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №2, с. 61-73, 2010.

- [23]. Л. Э. Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Вып.3*, Москва: Наука, 1965, 424 с.
- [24]. П. Эйкхофф, *Основы идентификации систем управления*, Москва: Мир, 1975, 683 с.
- [25]. А. О. Жуков, "Рекурсивный поход к идентификации многомерных систем в условиях ограниченной неопределенности", на XVI *Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2009»*, Чернівці, 2009, с. 63-65.
- [26]. А. Ю. Ишлинский, *Механика гироскопических систем*, Москва: Изд-во АН СССР, 1963, 213 с.
- [27]. А. Ю. Ишлинский, *Инерциальное управление баллистическими ракетами. Некоторые теоретические вопросы*, Москва: Наука, 1968, 143 с.
- [28]. А. Г. Ивахненко, "Метод группового учета аргументов – конкурент метода стохастической аппроксимации", *Автоматика*, №3, с. 57-74, 1968.
- [29]. С. В. Иносов, "Статистическая идентификация системы централизованного теплоснабжения с автоматизированной отопительной котельной", на XVI *Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2009»*, Чернівці, 2009, с.153-155.
- [30]. П. В. Куропаткин, *Теория автоматического управления. Учебное пособие*, Москва: Высшая школа, 1973, 528 с.
- [31]. Р. Н. Кветний, *Методи комп'ютерних обчислень: навчальний посібник*, Вінниця: ВДТУ, 2001, 148 с.
- [32]. В. М. Кунцевич, "Синтез управления линейными и нелинейными динамическими системами при ограниченных погрешностях измерения вектора состояний", *МНТЖ «Проблемы управления и информатики»*, №1, с. 6-17, 2016.
- [33]. А. Г. Кику, Е. Ю. Рева, та В. Ю. Шейко, "Улучшение качества фильтрации переменных состояния дискретных динамических объектов", на

*XVI Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2009»*, Чернівці, 2009, с. 67-69.

[34]. Ю. В. Котенко, и П. И. Кравец, "Методика синтеза нейросетевой модели объекта управления минимальной структуры", на *XIV Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2007»*, частина 1, Севастополь, 2007, с. 103.

[35]. А. И. Купин, В. М. Назаренко, "Исследование авторегрессионных моделей нейросетевой идентификации для процессов обогащительной технологии", на *XIV Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2007»*, частина 2, Севастополь, 2007, с. 147-149.

[36]. А. І. Купін, "Узагальнений алгоритм нейромережевої ідентифікації ТП збагачення залізної руди", *Вісник Криворізького технічного університету*, Вип. 13, с. 147-150, 2006.

[37]. П. Д. Лежнюк, та О. О. Мірошник, "Застосування перетворень Фур'є та вейвлет-спектрограм для ідентифікації спотворень режимів роботи розподільних мереж 0,38/0,22 кВ", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №1, с. 71-79, 2015.

[38]. Л. Р. Ладієва, та Р. М. Дубік, "Математична модель термомембранного розділення", на *XVI Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2009»*, Чернівці, 2009, с. 73-75.

[39]. И. М. Макаров, и Б. М. Менский, *Линейные автоматические системы*, Москва: Машиностроение, 1977, 464 с.

[40]. Е. Г. Макаров, *MathCAD: Учебный курс*, СПб.: Питер, 2009, 384 с.

[41]. Ю. Л. Мельников, "Идентификация параметров при минимуме априорной информации", на *XIII Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2006»*, Вінниця, 2007, с. 52-55.

[42]. М. Ш. Мистриханов, и Е. Ю. Зыбин, "Идентификация множества эргодических линейных дискретных систем", на *XVI Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2009»*, Чернівці, 2009, с. 80-81.

[43]. А. И. Михалев, "Цифровая обработка данных: от Фурье к Wavelets", *Системные технологии*, Днепропетровск, 2007, 200 с.

[44]. О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "До питання вибору оптимальної математичної моделі стаціонарного часового ряду", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №4, с. 74-80, 2018.

[45]. Б. І. Мокін, та О. Б. Мокін, "Фур'є-інтегральна ідентифікація нелінійних динамічних систем", на *XVI Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2009»*, Чернівці, 2009, с. 82-83.

[46]. Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, та О. Б. Мокін, *Математичні методи ідентифікації динамічних систем*, Вінниця: ВНТУ, 2010, 260 с.

[47]. О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, та Б. І. Мокін, "Визначення умов, за яких рух динамічних об'єктів з порядком математичних моделей, вищим трьох, можна описувати еквівалентними моделями з порядком, не вищим трьох", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №4, с. 7-15, 2014.

[48]. О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, та Б. І. Мокін, "Метод ідентифікації моделі авторегресії-ковзного середнього АРКС(p,q) з довільними значеннями порядків p,q, який узагальнює методику Юла – Уокера", *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*, №2, с. 1-6, 2014.

[Електронний ресурс]. Доступно: <https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/406>

[49]. О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "Метод ідентифікації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу", *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*, №3, 2014. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/415>. Дата звернення: Лис. 15, 2018.

[50]. О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "Ідентифікація еквівалентної за критичною частотою математичної моделі

мінімального порядку для багатовимірного динамічного об'єкта", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №5, с. 9-14, 2014.

[51]. А. Б. Мокин, В. Б. Мокин, Б. И. Мокин, и И. А. Чернова, "Определение условий и разработка методов описания процессов в сложных динамических объектах эквивалентными моделями не выше третьего порядка", *Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики"*, № 2, с. 37-49, 2016.

[52]. О. Б. Мокін, та Б. І. Мокін, "Моделювання та оптимізація руху багатомасових електричних транспортних засобів поверхнями зі складним рельєфом", Вінниця: ВНТУ, 2013, 192 с.

[53]. Б. И. Мокин, "Восстановление входных сигналов измерительных систем с нелинейными характеристиками преобразования", на *3-м Всесоюзном симпозиуме «Методы теории идентификации в задачах измерительной техники и метрологии»*, Новосибирск, 1982, с. 207-209.

[54]. Б. И. Мокин, и Ю. Корбич, *Математические модели контроля и управления в энергетике*, Киев: Техника, 1990, 192 с.

[55]. О. Б. Мокін., Б. І. Мокін, та Я. В. Хом'юк, "Умови еквівалентування нелінійних динамічних систем зі степеневими нелінійностями в частотній області", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №5, с. 40-44, 2016.

[56]. Б. І. Мокін, та О. Б. Мокін, "Фур'є-інтегральний метод в задачах ідентифікації та відновлення вхідних сигналів нелінійних динамічних систем", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №3, с. 107-112, 2000.

[57]. Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, та І. О. Чернова, "Еквівалентування моделей мінімально-фазових лінійних систем автоматичного керування з ПД-регуляторами в класі немінимально-фазових", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №3, с. 81-88, 2018.

[58]. Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "Еквівалентні моделі динамічних систем з операцією диференціювання у правій частині", на *XLV Науково-техн.*



конф. підрозділів Вінницького національного технічного університету (НТКП ВНТУ-2016), Вінниця, 2016, с. 2409-2410.

[59]. Б. И. Мокин, и И. А. Чернова, "Построение математической модели минимального порядка для линейной динамической системы с обратной связью", *Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики"*, №2, с. 59-66, 2017.

[60]. В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, Б. І. Мокін, С. О. Довгополук, та І. О. Чернова, "Еквівалентування математичних моделей мінімально-фазових систем високого порядку в класі немінимально-фазових", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №6, с. 111-121, 2017.

[61]. Б. І. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова, та С. О. Довгополук, "Еквівалентування замкненої лінійної динамічної системи за наявності похідної у правій частині її математичної моделі", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №3, с. 68-76, 2017.

[62]. Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "Узагальнення Фур'є-інтегрального метода ідентифікації на еквівалентні математичні моделі нелінійних динамічних систем з другим порядком їх інерційної складової", на *XIV Міжн. наук. конф. Контроль і управління в складних системах (КУСС-2018)*, Вінниця, 2018, с. 22.

[63]. В. Е. Набивач, "Алгоритмы численного и численно-аналитического определения параметров версальной модели при исследовании устойчивости многомерных моделей линейных динамических систем с варьируемыми параметрами", на *XVI Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2009»*, Чернівці, 2009, с. 40-41.

[64]. Г. А. Оборский, А. Ф. Дащенко, А. В. Усов, и Д. В. Дмитришин, *Моделирование систем: монография*, Одесса: Астропринт, 2013, 664 с.

[65]. А. П. Олійник, А. А. Мороз, "Комплексна математична модель забруднення ґрунтів внаслідок реалізації технологічних процесів в нафтогазовій промисловості", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №1, с. 27-32, 2016.

[66]. М. Р. Петрик, "Высокоскоростные методы идентификации параметров моделей фильтрации-консолидации сжимаемых сред влагонасыщенных микропористых частиц", *МНТЖ «Проблемы управления и информатики»*, №1, с. 18-31, 2016.

[67]. О. І. Прилипко, та А. О. Овезгельдиев, "Моделі та методи організаційного управління поведінкою групи людей", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №6, с. 71-76, 2016.

[68]. С. Б. Приходько, "Идентификация нелинейных стохастических дифференциальных систем на основе математических моделей нормализованных случайных сигналов", на *XVI Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2009»*, Чернівці, 2009, с. 90-91.

[69]. К. Райниш, *Кибернетические основы и описание непрерывных систем*, М.: Энергия, 1978, 456 с.

[70]. Л. Г. Раскин, и О. В.Серая, "Оценивание параметров уравнения регрессии для малой выборки нечетких данных", на *XIII Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2006»*, Вінниця, 2007, с. 8-12.

[71]. А. Н. Складчевич, *Приведение линейных операторов в задачах автоматического управления*, Рига: Зинатне, 1965, 155 с.

[72]. А. В. Солодов, и Ф. С. Петров, *Линейные автоматические системы с переменными параметрами*, Москва: Наука, 1971, 620 с.

[73]. В. А. Стоян, и С. Т. Даниш, "О математических моделях динамики трехмерных упругих тел. Часть 1. Тела с непрерывно наблюдаемым начально-краевым состоянием", *МНТЖ «Проблемы управления и информатики»*, №2, с. 37-44, 2017.

[74]. В. А. Стоян, и С. Т. Даниш, "О математических моделях динамики трехмерных упругих тел. Часть 2. Тела с дискретно наблюдаемым начально-краевым состоянием", *МНТЖ «Проблемы управления и информатики»*, №5, с. 22-29, 2017.

[75]. Д. Сю, и А. Мейер, *Современная теория автоматического управления и ее применение*, Москва: Машиностроение, 1972, 544 с.

- [76]. А. В. Усов, А. Н. Дубров, и Д. В. Дмитришин, *Моделирование систем с распределенными параметрами: монография*, Одесса: Астропринт, 2002, 664 с.
- [77]. Я. З. Цыпкин, *Основы информационной теории идентификации*, Москва: Наука, 1984, 320 с.
- [78]. А. Н. Шилин, и О. А. Крутякова, *Цифровое моделирование электротехнических и электронных устройств: монография*, Москва: ИД «Академия Естествознания», 2014, 131 с.
- [79]. А. Р. Шейкус, "Параметрична ідентифікація математичної моделі процесу ректифікації", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №3, с. 32-40, 2017.
- [80]. G. Box, and G. Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, San Francisco: Holden-Day, 1976, 575 pp.
- [81]. G. Box, G. Jenkins, and G. Reinsel, *Time Series Analysis: Forecasting and Control, 4th edition*, Wiley, 2008, 784 pp.
- [82]. L. O. Chua and C-Y. Ng, "Frequency domain analysis of nonlinear systems: general theory", *Electronic Circuits and Systems*, Vol. 3, No. 2, pp. 165-185, 1979.
- [83]. L. O. Chua and C-Y. Ng, "Frequency domain analysis of nonlinear systems: formulation of transfer functions", *Electronic Circuits and Systems*, Vol. 3, No. 4, pp. 257-269, 1979.
- [84]. R. Dorf, and R. Bishop, "Modern Control Systems, 12th edition", *Prentice Hall*, 2010, 1104 pp.
- [85]. M. Halas, "An algebraic framework generalizing the concept of transfer functions to nonlinear systems", *Automatica*, Vol. 44, No. 2, pp. 1181-1190, 2008.
- [86]. M. Halas, M. Huba and U. Kotta, "An overview of transfer function formalism for nonlinear systems", *Journal of Cybernetics and Informatics*, Vol. 8, No. 3, pp. 28-35, 2009.

[87]. M. Halas and U. Kotta, "A transfer function approach to the realisation problem of nonlinear systems", *International Journal of Control*, Vol. 85, No.1, pp. 320-331, 2012.

[88]. A. G. Ivakhnenko, and Ju. V. Koppa, "Group Method of Data Handling for the Solution of the Various Interpolation Problems of Cybernetics", *Sekond IFAC Symp. "Identification and Process Parameter Estimation"*, Prague, Paper 2.1., 1970.

[89]. Jozef Korbicz, and Borys I. Mokin, "Metody matematyczne w zagadnieniach kontroli i sterowania w energetyce", *Zielona Gora: Wydawnictwo wyzszej szkoly inzynierskiej*, Kijow: Technika, 1990, 158 p.

[90]. G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis and J. C. Golinval, "Past, present and future of nonlinear system identification instructional dynamics", *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 20, No. 2, pp. 505-592, 2006.

[91]. O. B. Mokin, and B. I. Mokin, "Renewal of input signals of nonlinear measuring converters by Fourier-integral method", *Croatia, Dubrovnik: Proceedings of XVII IMEKO World Congress (Metrology in the 3rd Millennium)*, pp. 468-471, 2003.

[92]. A. B. Mokin, V. B. Mokin, B. I. Mokin, and I. A. Chernova, "Determining the Conditions and Designing the Methods for Description of Processes in Complex Dynamic Objects by Equivalent Models not Higher than the Third-Order", *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 48, issue 3, pp. 83-97, 2016.

[93]. V. B. Mokin, "Simulation of Dynamics of Processes of Water Biological Purification with Account of their Serial-Concurrent Interrelation in the Aquatic Systems", *Hydrobiological journal*, № 4, pp. 100-107, 2012.

[94]. B. I. Mokin, and I. A. Chernova, "Construction of a Mathematical Model of the Minimum Order for a Linear Dynamical System With Feedback", *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 49, issue 3, pp. 69-77, 2017.

[95]. B. I. Mokin, and I. O. Chernova, "Equivalent to the Critical Frequency Mathematical Model of Minimum Order for a Complex Dynamic Object",

на XXII Міжн. наук. конференції з автоматичного управління «Автоматика 2015», Одеса, 2015, с. 12-13.

[96]. A. Nassirharand, and F. S. R. Mousavi, "Design of nonlinear lead and/or lag compensators", *International Journal of Control, Automation, and Systems*, Vol.6, No.3, pp. 394-400, 2008.

[97]. A. Nassirharand, and F. S. R. Mousavi, "Design of nonlinear controllers using describing functions with application to servomechanism", *Asian Journal of Control*, Vol.11, No.3, pp. 446-450, 2009.

[98]. A. Nassirharand and S. H. The, "Describing function-based identification of nonlinear transfer functions for nonlinear systems from experimental/simulation data", *Int. J. Modelling, Identification and Control*, Vol.25, No.2, pp. 93-101, 2016.

[99]. Seshadev Padhi, and Smita Pati, "Theory of Third-Order Differential Equations", *Springer*, 2014, 515 pages.

[100]. H. L. Van Trees, "Synthesis of Optimum Non-Linear Control Systems", MIT Press, Cambridge (Mass.), 1962.

[101]. Warisa Nakrim, "Third-order ordinary differential equations equivalent to linear second-order ordinary differential equations via tangent transformations", *Journal of Symbolic Computation. Elsevier*, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2016.01.006>.

[102]. В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, Б. І. Мокін, С. О. Довгополюк, та І. О. Чернова, "Еквівалентування математичних моделей мінімально-фазових систем високого порядку в класі немінімально-фазових", на *IV Міжн. наук. конф. «Вимірювання, контроль та діагностика в технічних системах (ВКДТС-2017)»*, Вінниця, 2017, с. 162.

[103]. В. І. Mokin, О. В. Mokin, V. B. Mokin, and I. O. Chernova, "Mathematical Models of Minimum Order for Complex Systems Equivalent Regarding Cutoff Frequency", in *Proc. 3rd Intern. Scien. Conf. Nonlinear analysis and applications*, Kiyv, 2015, pp 40-41.

[104]. Б. И. Мокин, и И. А. Чернова, "Эквивалентирование линейной динамической системы, исходная математическая модель которой имеет производные в правой части", на *XXIII Міжн. конф. з автоматичного управління «Автоматика 2016»*, Суми, 2016, с. 26-28.

[105]. Б. І. Мокін, І. О. Чернова, та С. О. Довгополюк, "Новий підхід до визначення мінімально-допустимого порядку математичної моделі замкнутої системи автоматичного керування з ПД-регулятором", на *XLVI Науково-техн. конф. підрозділів Вінницького національного технічного університету (НТКП ВНТУ-2017)*, Вінниця, 2017, с. 1561-1563.

[106]. Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова, та С. О. Довгополюк, "Синтез математичних моделей замкнутих систем автоматичного керування з ПД-регуляторами в немінімально-фазовому просторі", на *XLVII Науково-техн. конф. підрозділів Вінницького національного технічного університету (НТКП ВНТУ-2018)*, Вінниця, 2018, с. 1787-1789.