

Національний університет “Львівська політехніка”

Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ПРОЦЬКО ІГОР ОМЕЛЯНОВИЧ

УДК 004.421.2:517.443

ДИСЕРТАЦІЯ

**ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ
ДІЙСНИХ ГАРМОНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ
НА ОСНОВІ ЦИКЛІЧНИХ ЗГОРТОК**

01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи

Технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ І. О. Процько

Науковий консультант – Теслюк Василь Миколайович

доктор технічних наук, професор

Львів – 2019

АНОТАЦІЯ

Процько І. О. Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Національний університет “Львівська політехніка”, Львів. – Вінницький національний технічний університет, Вінниця. 2019.

Дисертація присвячена питанням дослідження та розвитку ефективного підходу обчислення дійсних дискретних гармонічних перетворень (дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі) на основі циклічних згорток.

Дискретні перетворення і згортка – два різні, але тісно взаємопов’язані процеси цифрового опрацювання інформації. Адже ефективне обчислення згортки реалізовується на основі теореми про швидку згортку, що базується на використанні швидких перетворень класу Фур’є. У цьому аспекті парадоксальним виглядає метод, за яким використовують для ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень циклічну згортку. Перші публікації, присвячені обчисленню ДПФ на основі циклічних згорток, з’явилися у кінці 60-х років ХХ століття. Значний внесок у теорію і практику ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень у цьому напрямі внесли Ч. Рейдер, Л. Блюстейн, Дж. Кулі, Г. Нуссбаумер, Р. Блейхут, Ш. Віноград, В.-Ч. Сіу та ін. Цей підхід продовжують інтенсивно вивчати та розвивати на програмному й апаратному рівнях. Відомі наукові роботи з швидких перетворень класу Фур’є вітчизняних науковців В. К. Задіраки, Л. А. Гнатіва, О. Б. Коханова, В. А. Лужецького, А. М. Терещенка, М. М. Яцимірського та ін.

Створене науково-інформаційне підґрунтя ставить актуальне завдання подальшого розвитку ефективного обчислення ДПФ на основі ЦЗ щодо розроблення узагальненої методології, яка забезпечить створення ефективних

програмних та апаратних засобів комп'ютерної реалізації обчислення дискретних перетворень класу Фур'є.

Вирішено **актуальну науково-прикладну проблему** підвищення ефективності обчислювальних характеристик дійсних дискретних гармонічних перетворень шляхом розроблення узагальненої методології, що вирішує завдання формування й аналізу структури дискретних гармонічних складових базису перетворення у вигляді набору ганкелевих циркулянтів і виконання обчислення перетворень на основі циклічних згорток.

Наукова новизна отриманих результатів.

Вперше:

- розроблено узагальнену методологію на основі циклічного розкладу підстановки, яка дозволила якісно підвищити ефективність виконання обчислення ДГП через циклічні згортки завдяки можливості вибору довільного обсягу перетворення;
- розроблено метод обчислення примітивної підстановки у вигляді твірного масиву або спрощеного твірного масиву, доповненого масивом знаків, який, на відміну від існуючих, забезпечує підвищення ефективності швидшого визначення послідовності переставлення;
- розроблено метод побудови узагальненої блочно-циклічної структури базисної матриці ДГП, у якому, на відміну від відомих, використано твірний масив для табличного формування структури з використанням спрощених значень аргументів базисної функції зі знаком для перших елементів циклічних підматриць;
- розроблено метод цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення з використанням табличних координат, завдяки якому зменшуються обчислювальні затрати і підвищується ефективність аналізу блочно-циклічної структури базису перетворення ДГП;

вдосконалено:

- метод побудови блочно-циклічної структури базису перетворення для ДГП обсягів, що дорівнюють цілому степеню простого числа, на основі

закономірного нарощення горизонтальних лінійок у структурі базису зі збільшенням обсягу перетворення, який забезпечує можливість визначення кількості ідентичних підматриць залежно від значень простого числа обсягу та його степеня;

– метод аналізу ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення ДГП для складених значень обсягів, який полягає у спрощенні пошуку за координатами ідентичних підматриць, що містять елементи, кратні обсягу перетворення, завдяки чому підвищується ефективність тривалості визначення наборів ідентичних підматриць;

– систему взаємозв'язку етапів обчислення твірних масивів, скороченої кількості гармонічних коефіцієнтів, кількості та обсягу циклічних згорток, що забезпечує можливість гнучкої адаптації виконання ДГП до відповідних програмних та апаратних обчислювальних ресурсів;

отримали подальший розвиток:

– схемна модель взаємозв'язку обчислювальних підзадач, яка дає змогу проводити послідовно-паралельну організацію обчислень дійсних ДГП на основі циклічних згорток;

– метод розроблення обчислювальних структурних схем із використанням блоків виконання циклічних згорток, який забезпечує можливість підвищити ефективність у вигляді показника площа-затримка в мікросхемах обчислення ДГП на основі циклічних згорток.

У першому розділі дисертації проаналізовано ефективні методи обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі швидких циклічних згорток. Однак, більшість методів обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток застосовуються для простих та цілих степенів простих обсягів перетворення (алгоритм Рейдера, Вінограда) або мають квадратичну обчислювальну складність (алгоритм Герцеля, Блюстейна). Стандартизовані ISO/IEC дискретні косинусні та синусні перетворення ще недостатньо досліджені та вивчені в аспекті ефективного обчислення. Тому розроблення узагальненої методології для синтезу швидких алгоритмів та побудови засобів

обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток є актуальним.

У другому розділі проаналізовано та обґрунтовано методологічні принципи та етапів для синтезу та обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. Узагальнено методологію приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток, що дає змогу синтезувати алгоритми косинусного, синусного, перетворення Хартлі та їх видів незалежно від значення обсягу перетворення.

Для синтезу алгоритмів застосовано твірний масив, який визначається циклічним розкладом підстановки рядків/стовпців аргументів функції базису перетворення. Розвинуто метод цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення, що використовує твірні масиви.

У результаті розроблення узагальненої методології одержано систематизовану сукупність принципів, методів, алгоритмів, способів для синтезу ефективних алгоритмів обчислення дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток.

У третьому, четвертому та п'ятому розділах відповідно до методології формування циклічних структур у матриці аргументів базису дискретних гармонічних перетворень проаналізовано базиси та встановлено особливості синтезу алгоритмів обчислення кожного з чотирьох видів дискретних косинусних перетворень, дискретних синусних перетворень, дискретних перетворень Хартлі на основі циклічних згорток. Показано відповідність принципів узагальненої методології на конкретних прикладах формування блочно-циклічної структури базису перетворення для кожного з чотирьох основних видів кожного з перетворень дискретних гармонічних перетворень. Отримано зведені таблиці особливостей синтезу алгоритмів дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі. У результаті синтезу алгоритму розроблено для конкретних прикладів структурні схеми модулів обчислення дискретних гармонічних перетворень.

У шостому розділі розглянуто обчислювальні затрати та засоби обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. Проаналізовано кількісні характеристики підвищення ефективності обчислення ДГП на основі ЦЗ. Обчислювальні витрати залежать від типу та виду дискретних гармонічних перетворень, обсягу N перетворення, i -кількості та L_i - обсягів базових операцій циклічних згорток, тобто від блочно-циклічної структури ядра перетворення. Для дискретних гармонічних перетворень обсягів, що дорівнюють цілочисельному степеню простого числа, які характеризуються однотипним нарощенням блочно-циклічних структур, виключається етап аналізу ідентичних підматриць, що прискорює процес синтезу алгоритму. Обчислення циклічних згорток для послідовностей гармонічних коефіцієнтів із повторенням групи елементів, що зустрічаються в запропонованих алгоритмах, зменшує обсяг виконання циклічних згорток і, відповідно, обчислювальну складність дійсних дискретних гармонічних перетворень.

Розвинуто метод побудови структурних схем прямого і зворотного виконання дискретних гармонічних перетворень, що містять систолічні конвольвери для виконання циклічних згорток. На системному етапі проектування інтегральних схем виконання дискретних гармонічних перетворень, що є стратегічним, метод побудови структурних схем дозволяє вибрати на основі варіантів твірних масивів відповідну конкретну структуру обчислювального модуля, кількість та обсяги циклічних згорток. Поєднання з передовими рішеннями наступних етапів проектування дає покращення технічних характеристик при розробленні інтегральних схем обчислення дискретних гармонічних перетворень.

Практичне значення отриманих результатів. На основі узагальненої методології розроблено програмне забезпечення для швидкого обчислення дискретних гармонічних перетворень довільного обсягу на основі циклічних згорток. Наведено результати програмної реалізації синтезу алгоритмів та обчислення ДКП-II на основі циклічних згорток. Порівняння обчислення розробленого програмного забезпечення на основі циклічних згорток з програмою бібліотеки FFTW3 на універсальній комп'ютерній системі показує,

що час виконання розробленої тестової програми менший для коротких обсягів перетворення. Тому є актуальним застосування узагальненої методології ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток для конструювання обчислень більших обсягів перетворень на основі коротких обсягів. Виконання ДГП на основі циклічних згорток, що базується на розроблених структурних схемах модуля обчислення ДГП, ефективно реалізується в інтегральних схемах, забезпечуючи зменшення площі зайнятості кристала завдяки локальності та регулярності зв'язків між процесорними елементами у блоках циклічних згорток.

Ключові слова: дійсний базис перетворення, синтез алгоритмів, циклічна згортка, твірний масив, дискретні гармонічні перетворення (ДГП), дискретні косинусні перетворення (ДКП), дискретні синусні перетворення (ДСП), дискретні перетворення Хартлі (ДПХ).

ABSTRACT

Ihor Prots'ko. Enhancement of the Efficient Computation of Real Harmonic Transforms Based on Cyclic Convolutions. – Qualified scientific work on the right of the manuscript.

Thesis for a scientific degree of Doctor of Engineering in the specialty 01.05.02 «Mathematical Modelling and Computation Methods». – Lviv Polytechnic National University, Lviv. – Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia. 2019.

The thesis is devoted to the research and development of an efficient approach for the computation of real discrete harmonic transforms (discrete cosine, sine and Hartley transform) based of cyclic convolutions.

Discrete transforms and convolutions represent two different but closely interrelated sections of digital processing of information. After all, an efficient computation of a convolution is realized on the basis of the fast convolution theorem, which is based on the use the fast transforms of Fourier class. In this aspect, the

method that uses cyclic convolutions to efficiently compute discrete harmonic transforms is a paradox. The first publications devoted to the computation of the DFT based on cyclic convolutions appeared in the late 60's. The significant contribution to the theory and practice of efficient computation of discrete harmonic transforms in this direction was made by C. M. Rader, L. I. Bluestein, J. W. Cooley, H.J. Nussbaumer, R. E. Blahut, S. Vinograd, V.-C. Siu. This approach continues to be intensively investigated and developed, both at the software and hardware levels. Consequently, the created scientific and informational basis of effective methods requires further development of research in the direction of developing a generalized methodology for the efficient computation of discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions for software and hardware implementations that meet the requirements of modern scientific and technological progress.

The actual **scientific and applied problem** of increasing the efficiency of computational characteristics (the number of arithmetic operations, the number of cyclic convolutions, the run duration) of real discrete harmonic transforms is solved by developing a generalized methodology that solves the problem of forming and analyzing the structure of discrete harmonic constituents of the transformation basis in the form of a set of hankel circulants and performing calculations of transforms based on cyclic convolutions.

The scientific novelty of the obtained results.

For the first time offered:

- the generalized methodology has been developed based on the cyclic decomposition of substitution, which provides an opportunity of the enhancement the efficient computation of DHT based on cyclic convolutions for an arbitrary size of transform;
- a method for computation of the primitive substitution in the form of a hashing array or simplified hashing array supplemented by an array of signs that provides an opportunity of the enhancement the efficient of fast computation the sequence of permutation;
- the method of constructing a generalized structure of the basic matrix of the DHT in which, unlike the known ones, the hashing array is used for the table form of a

structure with the simplified value of the argument of the basic function with a sign for the first elements of the cyclic submatrices;

- the method of the integer search of identical submatrices in the block-cyclic structure of the transformation basis by means of the table coordinates, which reduces the computational costs of the analysis of the block-cyclic structure of the basis of DHT;

improved:

- the method of constructing the block-cyclic structure of the transformation basis of DHT for sizes equal to integer power of a prime number on the basis of the regular growth of horizontal lines in the structure of the basis with an increase of the size of transform, which ensures the possibility of determining the number of identical submatrices depending on the values of a prime number of size and its degree;

- the method of analyzing identical submatrices in the block-cyclic structure of the transformation basis of DHT for composite sizes, which is to simplify the search for coordinates of identical sub-matrices containing elements of a multiple for size of transform, which speeds up the definition of a set of identical sub-matrices;

- the system of interconnection of the stages of computation of hashing arrays, the reduction of the number of harmonic coefficients, the number and volume of cyclic convolution, which provides the possibility of flexible adaptation of the implementation of the DHT to the corresponding software and hardware computing resources;

received further development:

- the schematic model of the serial-parallel interconnection of the main subtasks of synthesis of the algorithm and its implementation, which enables to effectively organize the computation of real discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions;

- the method for the development of structural schemes using blocks of execution of cyclic convolutions, which enables an opportunity of the enhancement the efficient the area-delay index in the chip of the computation of real discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions.

The first chapter contains the overview and analysis of existing methods for computation of discrete harmonic transforms based on the fast cyclic convolutions. However, most methods for computation of discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions are used only for a prime and the power of prime sizes of transform (Rader, Vinograd algorithms) or have the quadratic computational complexity (Goertzel, Bluestein algorithms). The standardized ISO/IEC of the discrete cosine and sine transforms are not yet sufficiently explored in terms of efficient computation. Therefore, the development of a generalized methodology for the synthesis of fast algorithms based on cyclic convolutions and the construction of efficient discrete harmonic transforms computation means is relevant.

The second chapter contains the analysis and substantiation of the methodological principles and stages for the synthesis and computation of discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions. The methodology of the formation and analysis of the structure of discrete harmonic constituents of the basis of transform in the form of a set of cyclic submatrices is generalized, which enables to synthesize effective algorithms of cosine, sine, Hartley transform and their types regardless of the value of the size of transform.

For the synthesis of efficient algorithms a hashing array is used which is determined by the cyclic decomposition of the substitution of rows/columns of arguments of the basis functions of the transform. The method of an integer search of the identical cyclic submatrices in the structure of the basis matrix of transform is developed, which uses the hashing arrays.

As a result of the development of a generalized methodology, a systematic set of principles, methods, algorithms, structures for synthesis of effective algorithms for computation of the real discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions has been obtained.

The third, fourth and fifth chapters contain the analysis of the peculiarities of synthesis algorithms for efficient computation of each of the four types of discrete cosine, sine, Hartley transforms based on cyclic convolutions according to the methodology of forming cyclic structures in the matrix of arguments of the basis

functions of discrete harmonic transforms. We show compliance with the principles of the generalized methodology by the specific examples forming the cyclic blocks in the basis structure for four main types of transforms of each of discrete harmonic transforms. The consolidated tables of peculiarities of the synthesis of algorithms and the results of the specific examples of structural schemes of modules for computation of discrete harmonic transforms have been obtained.

The sixth chapter contains the analysis of computational complexity and means of efficient computation of discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions. The computational complexity depends on the type of discrete harmonic transforms, the size N of the transform, the number and volume of cyclic convolutions, that is, on the structure of the transform kernel. For discrete harmonic transforms of sizes equal to integer powers of a prime number, characterized by the same horizontal type of building-up the block-cyclic submatrices, the stage of analysis of identical submatrices is eliminated, which accelerates the process of synthesis of the algorithm. The computation of cyclic convolutions for the sequences of harmonic coefficients with the repetition of a group of elements found in the proposed algorithms reduces the amount of cycle convolutions and, accordingly, the computational complexity of the real discrete harmonic transform.

The method of development of the structural schemes of direct and reverse computation of discrete harmonic transforms, containing systolic convolvers for performing cyclic convolutions, has been developed. At the system stage of the design of integral circuits for the implementation of discrete harmonic transforms, which is a strategic stage, the construction of structural schemes allows you a choice, based on the parameters of the hashing arrays, the corresponding specific structure of the computing module and the volume of cyclic convolutions. The combination with the advanced decisions of the following design stages improves the technical characteristics of the developed integrated circuits of modules for computation of discrete harmonic transforms.

Practical value of the obtained results. On the basis of the generalized methodology, a software for the fast computation of an arbitrary size of discrete

harmonic transforms based on cyclic convolutions has been developed. The results of the software realization of synthesis of algorithms and computation of DCT-II on the basis of fast cyclic convolutions are presented. The comparison of the computation of the developed software with the program of the library FFTW3 on the universal computer system shows that the execution time of the developed test program is shorter for short volumes of transform. Therefore, it is relevant to apply a generalized methodology for efficient computation of discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions for constructing computation of larger sizes of transform using the smaller sizes. The implementation of the DHT based on cyclic convolutions, based on the developed structural diagrams of the DHT computation module, is effectively implemented in integrated circuits, providing a reduction in the employment area of the crystal due to the localization and regularity of the connections between the processor elements in the blocks of cyclic convolutions.

Key words: real basis, synthesis of algorithms, cyclic convolution, hashing array, discrete harmonic transforms, discrete cosine (DCT) transform, discrete sine (DST) transform, discrete Hartley transform (DHT).

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації :

- [1] I. Prots'ko, "Algorithm of Efficient Computation of DCT I-IV Using Cyclic Convolutions", *Int. J. Circuits, Syst. and Signal Process.*, vol. 7, iss. 1, pp. 1-9, 2013. (Indexes: Compendex, Scopus, IET Inspec, etc.)
- [2] I. Prots'ko, "Algorithm of efficient computation of generalized discrete Hartley transform based on cyclic convolutions", *IET Signal Process.*, vol. 8, iss. 4, pp.301-308, 2014. (Indexes: Scopus, IET Inspec, SCI, Ei Compendex).
- [3] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Algorithm of efficient computation DST^{I-IV} using cyclic convolutions", *WSEAS Trans. Signal Process.*, vol. 10, pp. 278-288, 2014. (Indexes: Compendex, Elsevier, Scopus, IET Inspec, etc.)
- [4] I. Prots'ko, and R. Rykmas, "The Runtime Benchmarking of DCT-II based on Cyclic Convolutions", *Int. J. Condition Monitoring and Diagnostic Engineering*

- Management*, vol. 21, no. 2, pp. 11-16, 2018. (Indexes: Scopus, Inspec, Acoustics Abstracts, Engineering Index Monthly, International Aerospace Abstracts, etc.)
- [5] I. Prots'ko, "The algorithm and structures for efficient computation of type II/III DCT/ DST/ DHT using cyclic convolutions", *Int. J. Signal Proces. Syst.*, vol. 2, no. 2, pp. 119-127, 2014. (Indexes: IET Inspec, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, etc.)
- [6] I. Prots'ko, and R. Rykmas, "Becoming of Discrete Harmonic Transform Using Cyclic Convolutions", *American J. Circuits, Syst. and Signal Process.*, vol. 1, no.3, pp. 114-119, 2015. (Indexes: Worldcat, ResearchBib, Academickeys)
- [7] I. Prots'ko, "Synthesis of Efficient Algorithms of DST for Types I, IV via Cyclic Convolutions", *Int. J. Electronic Engineering and Computer Science*, vol. 1, no.1, pp. 6-13, 2016.
- [8] I. Prots'ko, and V. Teslyuk, "Development of WFTA based on the hashing array", *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 2(45), с.135-142, 2018. (Indexes: Web of Science, Index Copernicus, INSPEC, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat)
- [9] І. Процько, "Підхід ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень через циклічні згортки", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 626, с. 74-78, 2008.
- [10] І. Процько, "Взаємозв'язок ефективних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток для обсягів 2^n ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 685, с. 125-130, 2010.
- [11] І. Процько, та Р. Рикмас, "Аналіз циклічних підматриць в структурі базису дискретних гармонічних перетворень", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №710, с. 209-214, 2011.
- [12] Р. Никифорчин, та І. Процько, "Формування блочно-матричних структур для алгоритмів гармонічного перетворення даних", *Вісник національного*

- університету "Львівська політехніка": *Автоматика, вимірювання та керування*, № 530, с. 175-180, 2005.
- [13] Р. Никифорчин, та І. Процько, "Секціонування базової матриці дискретного гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 564, с. 40-45, 2006.
- [14] І. Процько, "Обчислювальні структури адаптивного до обсягу ШПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 651, с. 145-151, 2009.
- [15] І. Процько, "Особливості обчислення циклічних згорток для ідентичних послідовностей", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 719, с.200-206, 2011.
- [16] І. Процько, "Аналіз алгебраїчної системи аргументів для простого обсягу ДПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 711, с. 48-53, 2011.
- [17] І. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДКП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 732, с.274-280, 2012.
- [18] І. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДКП на основі циклічних згорток", *Моделювання та інформаційні технології*" збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, Вип. 65, с. 110-118, 2012.
- [19] І. Процько, "Ефективне обчислення дискретних косинусних перетворень", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 591, с. 58-63, 2007.

- [20] І. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДСП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі*, № 743, с. 140-151, 2012.
- [21] І. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДСП на основі циклічних згорток", *Збірн. наук. праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*, Вип. 65, с. 196-205, 2012.
- [22] І. Процько, "Приведення до ефективних обчислень довільних обсягів ортогональних перетворень Хартлі", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 522, с. 85-89, 2004.
- [23] І. Процько, "Ефективне обчислення дискретного перетворення Хартлі на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи та мережі*, № 688, с. 190-196, 2010.
- [24] І. Процько, "Синтез та обчислення основних типів ДПХ на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 744, с.302-311, 2012.
- [25] І. Процько, "Схема алгоритму синтезу гармонічних дискретних перетворень в підсистемі аналізу САПР", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №694, с. 297-302, 2011.
- [26] О. Грищук, та І. Процько, "Обчислення значень канонічного розкладу одновимірної величини", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 501, с. 30-32, 2004.
- [27] І. Процько, "Розробка схеми узагальненого ефективного алгоритму гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі*, № 549, с.157-164, 2005.

- [28] І. Процько, "Узагальнене ефективне дискретне гармонічне перетворення даних", *Технічні вісті. Львів*, № 1(22), 2(23), с. 88-92, 2006.
- [29] І. Процько, "Розпаралелення на рівні підзадач алгоритму ШГП на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 826, с.306-312, 2015.

Наукові праці апробаційного характеру:

- [30] І. Процько, та В. Радомський, "Узагальнений підхід швидкого трансформування класу Фур'є на основі згорток" на *V Всеукр. міжн. конф. УкрОБРАЗ'2000*, Київ, 2000, с. 249-252.
- [31] І. Процько, та В. Радомський, "Обчислення швидкого трансформування Фур'є за допомогою згорток", на *II Національній наук.-практ. конф. "Системний аналіз та інформаційні технології": Збірка тез доповідей*, Київ: НТУУ "КПІ", 2000, с. 97-98.
- [32] I. Protsko, "Adaptive synthesis to transform size of Fast Fourier Algorithm", in *Proc. VIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2003)*, Lviv-Slavske, 18-22 february 2003. pp. 230-231.
- [33] I. Prots'ko, "Computational parallel models of the discrete harmonic transforms", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2005)*, Lviv-Polyana, 23-26 february, 2005, pp. 230-231.
- [34] R. Nykyforchin, and I. Prots'ko, "Computational algorithm of the discrete harmonic components for microelectronic systems", in *Proc. Ist Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2005)*, Lviv-Polyana, 25-28 may, 2005, pp. 21-22.
- [35] I. Protsko, "Fast Cosine Transform Algorithm on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. 2nd Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2006)*, Lviv-Polyana, 24-27 may, 2006, pp. 65-66.

- [36] I. Protsko, "The Efficient Algorithm of Discrete Cosine Transform", in *Proc. IXth Int.l Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2007)*, Polyana, 20-24 february, 2007, pp. 163-164.
- [37] I. Процько, "Обчислювальні паралельні моделі гармонічних дискретних перетворень", на наук.-прак. конф. *Математичне моделювання складних систем*, Львів, 2007, с. 214-219.
- [38] I. Prots'ko, "The generalized technique of computation the discrete harmonic transforms", in *Proc. IVth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2008)*, Polyana, 21-24 may, 2008, pp. 101-102.
- [39] I. Prots'ko, "Computational structure of adaptive to transform size FFT", in *Proc. Xth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2009)*, Polyana, 24-28 february, 2009, pp. 255-257.
- [40] I. Prots'ko, "The compare of computation FFT on base cyclic convolutions for size of $N=2^n$ ", in *Proc. Vth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2009)*, Polyana, 22-24 april, 2009, pp. 70-72.
- [41] I. Prots'ko, " Interconnection discrete harmonic transforms sizes 2^n on base circular convolutions", in *Proc. VIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2010)*, Polyana, 20-23 april, 2010, pp.49-50.
- [42] I. Prots'ko, "The Efficient Computation of Discrete Hartley Transform on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. Vth Int. Scientific and Technical Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT 2010)*, Lviv, 14-16 october, 2010, pp.157-158.
- [43] I. Prots'ko, "The Efficient Computation DHT using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2011)*, Polyana, 24-28 february, 2011, pp. 85-86.
- [44] I. Prots'ko, and R. Rikmas, "Analysis cyclic submatrices in structure of basis discrete harmonic transform", in *Proc. VIIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2011)*, Polyana, 12-14 may, 2011, pp. 64-66.

- [45] I. Prots'ko, "The specific of computation cyclic convolutions for identical sequences", in *Proc. VIth Int.Scienc. and Tech. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2011)*, Lviv, 16-19 november, 2011, pp. 301-302.
- [46] I. Prots'ko, "Analysis algebraic system of arguments for prime size DHT", in *Proc. XIth Int. Conf. Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET'2012)*, Lviv-Slavske, 24-28 february, 2012, pp. 428.
- [47] I. Prots'ko, "Generalized approach for synthesis and computation DST using cyclic convolutions", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2012)*, Polyana, 18-21 april, 2012, pp.66-67.
- [48] I. Prots'ko, and R. Rikmas "Analysys parallel processing DHT using convolution on SIMT model", in *Proc. VIIth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2012)*, Lviv, 20-24 november, 2012, pp.136-137.
- [49] I. Prots'ko, "The Module of DCT^{II} for Size N=8 using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2013)*, Polyana, february 2013, pp. 299-301.
- [50] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The program implementation of the synthesis the efficient algorithms for computation of DCT-II via cyclic convolutions", in *Proc. IXth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2014)*, Lviv, 18-22 november, 2014, pp. 116-118.
- [51] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Computational structure of DST-II using convolvers", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2015)*, Polyana, february, 2015, pp.200-202.
- [52] I. Prots'ko, R. Rikmas, and M. Mashevskya "Performance evaluation of the program of DCT-II using cyclic convolutions", in *Proc. XIIth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2017)*, Lviv, 5-8 september 2017, pp.116-118.

- [53] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The efficient computation of integer DCT based on cyclic convolutions", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Computer Sciences & Information Technologies (CSIT'2018)*, Lviv, 11-14 september 2018, pp.245-248.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації :

- [54] І. О. Процько, "Спосіб приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток", *G06F 17/16 (2006.01), Н03М 7/30 (2006.01), Патент 96540 Україна*, 10.11.2011, Бюл. № 21.
- [55] І. О. Процько, та В. А. Радомський, "Пристрій для обчислення швидкого трансформування Фур'є", *G06F7/00, G06F15/00, Декл. патент 346144 Україна*, 15.03.2001, Бюл. № 2.
- [56] І. О. Процько, та В. М. Теслюк, "Пристрій канонічного розкладу числа на множники", *G06F7/04(2006.01), G06F17/10(2006.01), Патент 116912 Україна*, 25.05.2018, Бюл. № 10.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	25
ВСТУП	26
РОЗДІЛ 1 Аналіз обчислень дискретних гармонічних перетворень (ДГП) на основі циклічних згорток.....	36
1.1 Інтенсивний розвиток обчислювальних алгоритмів для швидких перетворень класу Фур'є.....	36
1.2 Становлення обчислення швидкого перетворення Фур'є на основі циклічних згорток.....	40
1.2.1 Алгоритми Рейдера, Герцеля, Блюстейна.....	40
1.2.2 Алгоритм Вінограда перетворення Фур'є.....	42
1.3 Становлення обчислення швидкої циклічної згортки.....	45
1.3.1 Теорема про швидку згортку.....	45
1.3.2 Інтерполяційний алгоритм обчислення згортки Тоома - Кука.....	47
1.3.3 Алгоритм Агарвала - Кулі.....	47
1.3.4 Обчислення згортки на основі поліноміальних перетворень.....	49
1.3.5 Обчислення згортки на основі теоретико-числових перетворень.....	51
1.3.6 Аналіз інших ефективних обчислень циклічної згортки.....	52
1.4 Аналіз обчислень дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток.....	55
Висновки до першого розділу	61
РОЗДІЛ 2 Методологія приведення обчислення дискретних гармонічних перетворень до циклічних згорток.....	64
2.1 Дійсні дискретні гармонічні перетворення та їхні основні властивості...	64
2.2 Аналіз дійсної базисної матриці ДГП як алгебраїчної структури.....	70
2.2.1 Аналіз сформованих алгебраїчних структур для простого обсягу перетворення.....	71
2.2.2 Аналіз сформованих алгебраїчних структур для складеного обсягу	

перетворення.....	82
2.3 Узагальнений синтез алгоритму обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток.....	92
2.3.1 Формування твірних масивів за матрицями аргументів базису дискретних гармонічних перетворень.....	92
2.3.2 Аналіз структур базисної матриці для синтезу алгоритму обчислення дискретних гармонічних перетворень.....	96
2.3.3 Узагальнена методологія синтезу алгоритмів дискретних гармонічних перетворень та їх обчислення на основі циклічних згорток...	101
Висновки до другого розділу	109
РОЗДІЛ 3 Синтез алгоритму обчислення чотирьох видів дискретного косинусного перетворення (ДКП I-IV) на основі циклічних згорток.....	112
3.1 Основні види дискретного косинусного перетворення ДКП I-IV.....	112
3.2 Синтез алгоритму обчислення ДКП-I на основі циклічних згорток.....	116
3.2.1 Аналіз базисної матриці ДКП-I першого виду.....	116
3.2.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДКП-I на основі циклічних згорток.....	120
3.2.3 Приклад обчислення ДКП-I обсягу $N=15$ на основі циклічних згорток.....	125
3.3 Синтез алгоритму обчислення ДКП-II та ДКП-III на основі циклічних згорток.....	131
3.3.1 Аналіз базисної матриці ДКП-II та ДКП-III видів.....	131
3.3.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДКП-II, ДКП-III на основі циклічних згорток.....	137
3.3.3 Приклади обчислення ДКП-II та ДКП-III обсягу $N=7$ та $N=2^n$ на основі циклічних згорток.....	143
3.4 Синтез алгоритму обчислення ДКП-IV на основі циклічних згорток.....	161
3.4.1 Аналіз базисної матриці ДКП-IV.....	161
3.4.2 Особливості синтезу обчислення ДКП-IV на основі циклічних	

	22
згорток.....	164
3.4.3 Приклад обчислення ДКП-IV обсягу $N=10$ на основі циклічних згорток.....	167
Висновки до третього розділу	173
РОЗДІЛ 4 Синтез алгоритму обчислення чотирьох видів дискретного синусного перетворення (ДСП I-IV) на основі циклічних згорток.....	175
4.1 Основні види дискретного синусного перетворення ДСП I-IV.....	175
4.2 Синтез алгоритму обчислення ДСП-I на основі циклічних згорток.....	176
4.2.1 Аналіз базисної матриці ДСП-I першого.....	176
4.2.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДСП-I на основі циклічних згорток.....	178
4.2.3 Приклад обчислення ДСП-I обсягу $N=8$ на основі циклічних згорток.....	182
4.3 Синтез алгоритму обчислення ДСП-II та ДСП-III на основі циклічних згорток.....	185
4.3.1 Аналіз базисної матриці ДСП-II та ДСП-III видів.....	185
4.3.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДСП-II і ДСП-II на основі циклічних згорток.....	189
4.3.3 Порівняння особливостей синтезу алгоритмів обчислення ДСП-II та ДСП-III на основі циклічних згорток.....	199
4.4 Синтез алгоритму обчислення ДСП-IV на основі циклічних згорток.....	200
4.4.1 Аналіз базисної матриці ДСП-IV виду.....	200
4.4.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДСП-IV на основі циклічних згорток.....	202
4.4.3. Приклад обчислення ДСП-IV обсягу $N=5$ на основі циклічних згорток.....	205
Висновки до четвертого розділу	208
РОЗДІЛ 5 Синтез алгоритму обчислення загального дискретного перетворення Хартлі (ДПХ I-IV) на основі циклічних згорток.....	210

5.1 Види та властивості загального дискретного перетворення Хартлі.....	210
5.2 Синтез алгоритму обчислення ДПХ-I на основі циклічних згорток.....	213
5.2.1 Аналіз базисної матриці ДПХ-I першого виду.....	213
5.2.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-I на основі циклічних згорток.....	222
5.3 Синтез алгоритму обчислення ДПХ-II на основі циклічних згорток.....	228
5.3.1 Аналіз базисної матриці ДПХ-II виду.....	228
5.3.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-II на основі циклічних згорток.....	231
5.4. Синтез алгоритму обчислення ДПХ-III на основі циклічних згорток.....	239
5.4.1. Аналіз базисної матриці ДПХ-III виду.....	239
5.4.2. Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-III на основі циклічних згорток.....	241
5.5 Синтез алгоритму обчислення ДПХ-IV на основі циклічних згорток.....	248
5.5.1 Аналіз базисної матриці ДПХ-IV виду.....	248
5.5.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-IV на основі циклічних згорток.....	250
Висновки до п'ятого розділу	259
РОЗДІЛ 6 Аналіз ефективності узагальненої методології синтезу алгоритмів та обчислення ДГП на основі циклічних згорток.....	261
6.1 Апаратна кросплатформність виконання ДГП на основі циклічних згорток.....	262
6.1.1 Структура та етапи взаємодії базових блоків пристроїв обчислення ДГП на основі циклічних згорток.....	262
6.1.2 Спеціалізовані обчислювальні структури виконання ДГП на основі циклічних згорток.....	268
6.2 Гнучкість узагальненої методології синтезу алгоритмів ДГП та їх обчислень на основі циклічних згорток	274
6.2.1 Ефективне обчислення твірних масивів для синтезу алгоритмів	

	24
ДГП на основі циклічних згорток.....	274
6.2.2 Аналіз блочно-циклічних структур базису ДГП на основі твірною масиву.....	280
6.3 Аналіз обчислювальних затрат ДГП на основі циклічних згорток.....	291
6.3.1 Оцінювання обчислювальних затрат ДГП на основі циклічних згорток.....	291
6.3.2 Аналіз програмної реалізації обчислення ДГП на основі циклічних згорток.....	296
6.4 Інформація про використання узагальненої методології та впровадження результатів дисертаційної роботи.....	306
Висновки до шостого розділу	311
ВИСНОВКИ	313
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	316
ДОДАТКИ	342
Додаток А. Твірні масиви для синтезу алгоритму обчислення ДКП-II коротких обсягів перетворення.....	343
Додаток Б. Варіанти твірних масивів для синтезу алгоритму обчислення ДСП-II коротких обсягів перетворення.....	345
Додаток В. Твірні масиви для синтезу алгоритму обчислення ДСП-IV коротких обсягів перетворення.....	347
Додаток Г. Результати програмної реалізації етапів синтезу та обчислення ДКП-II для обсягу $N=20$	349
Додаток Д. Акти впровадження результатів дисертаційної роботи	362
Додаток Е. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	367

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

АВПФ	– алгоритм Вінограда перетворення Фур'є
ГПД	– граф потоку даних
ДГП	– дискретні гармонічні перетворення
ДКП	– дискретне косинусне перетворення
ДПХ	– дискретне перетворення Хартлі
ДПФ	– загальне дискретне перетворення Фур'є
ДСП	– дискретне синусне перетворення
ДТП	– дискретні тригонометричні перетворення
ЗДКП	– зворотне дискретне косинусне перетворення
ЗШПФ	– зворотне швидке перетворення Фур'є
ЗДСП	– зворотне дискретне синусне перетворення
КТЗ	– китайська теорема про залишки
НВІС	– надвеликі інтегральні схеми
НСД	– найбільший спільний дільник
ПЕ	– процесорний елемент
ТЧП	– теоретико-числові перетворення
ЦЗ	– циклічна згортка
ШГП	– швидкі гармонічні перетворення
ШПФ	– швидке перетворення Фур'є
ШПХ	– швидке перетворення Хартлі
НА	– на піввибірці асиметрично
НС	– на піввибірці симетрично
WA	– на вибірку асиметрично
WS	– на вибірку симетрично

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Застосування ефективних методів для розв'язування завдань з опрацювання інформації почалося ще до ери поширення обчислювальних засобів. Каталізатором інтенсивного дослідження та розвитку швидких обчислень стало використання дискретних перетворень класу Фур'є та цифрових згорток у різноманітних прикладних галузях на базі комп'ютерних систем.

На сучасному етапі розроблено ряд методів та засобів швидкого обчислення дискретних перетворень класу Фур'є та згорток. Всебічно досліджено подання базисної матриці дискретного перетворення через добуток слабозаповнених матриць (факторизацію), що суттєво зменшило кількість обчислювальних операцій під час виконання дискретних перетворень. Встановлено, що обчислення швидких перетворень є спеціальними випадками в алгебрах над полями або кільцями. Метод з використанням поліноміальних перетворень для одержання швидких алгоритмів привів до значних теоретичних і практичних результатів. Варте уваги використання теоретико-числових перетворень, що має свої особливі обчислювальні переваги. Таким чином, є характерним застосування різних теоретичних обґрунтувань для створення обчислювальних методів й алгоритмів дискретних перетворень, що враховують технічні та технологічні особливості розроблення ефективних засобів комп'ютерної реалізації.

Розвиток обчислювальних методів пов'язаний із зростанням складності прикладних завдань і, відповідно, вимог до мультифункціональності, швидкодії та економічності апаратно-програмних засобів їх реалізації. У зв'язку з цим почали досліджуватись ортогональні гармонічні базисні системи для обчислення прямого і зворотного дискретного перетворення тільки в дійсній області. Значне місце в опрацюванні дійсних даних зайняли ДКП, ДСП та ДПХ та їхні види, які називатимемо дискретними гармонічними перетвореннями.

Поряд із дослідженнями ефективних методів виконання дискретних перетворень розвивались і взаємодоповнювались методи швидкого обчислення цифрової згортки, яка має широке застосування. Дискретні перетворення і згортка – два різні, але тісно взаємопов'язані розділи цифрового опрацювання інформації. Адже ефективне обчислення згортки реалізовується на основі теореми про швидку згортку, що базується на використанні швидких перетворень класу Фур'є. У цьому аспекті парадоксальним виглядає метод, в якому використано для ефективного обчислення ДГП циклічну згортку.

Розвиток підходу обчислення ДПФ на основі ЦЗ розпочався в кінці 60-х років ХХ століття. Значний внесок у теорію і практику ефективного обчислення ДГП у цьому напрямі внесли Ч. Рейдер, Л. Блюстейн, Дж. Кулі, Г. Нуссбаумер, Р. Блейхут, Ш. Віноград, В.-Ч. Сіу та ін. Цей підхід продовжують інтенсивно досліджувати та розвивати, адже він забезпечує виконання мінімальної кількості множень у випадку використання циклічних згорток із мінімальною мультиплікативною складністю. Схеми обчислення ДГП на основі ЦЗ зменшують площу зайнятості кристала НВІС, забезпечуючи високі технічні параметри. Відомі наукові роботи з швидких перетворень класу Фур'є вітчизняних науковців В. К. Задіраки, Л. А. Гнатіва, О. Б. Коханова, В. А. Лужецького, А. М. Терещенка, М. М. Яцимірського та ін.

Отже, створене науково-інформаційне підґрунтя ставить актуальне завдання подальшого розвитку ефективного обчислення ДГП на основі ЦЗ щодо розроблення узагальненої методології, яка забезпечить створення ефективних програмних та апаратних засобів комп'ютерної реалізації обчислення дискретних перетворень класу Фур'є.

Науково-прикладною проблемою, розв'язанню якої присвячена дисертаційна робота, є підвищення ефективності обчислювальних характеристик (кількість арифметичних операцій, кількість циклічних згорток, тривалість виконання) дійсних дискретних гармонічних перетворень шляхом розроблення узагальненої методології, що вирішує завдання формування й аналізу структури дискретних гармонічних складових базису перетворення у

вигляді набору ганкелевих циркулянтів і виконання обчислення перетворень на основі циклічних згорток.

Розроблена в дисертаційній роботі узагальнена методологія у виді систематизованої сукупності апробованих принципів, методів, способів, алгоритмів, схем, термінів для виконання обчислення ДГП на основі ЦЗ є важливим компонентом для вирішення багатьох прикладних завдань.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Національному університеті “Львівська політехніка”.

Дослідження проводили в рамках науково-дослідних робіт:

ДБ/МЕМС «Високошвидкісні інформаційні технології опрацювання даних у мікроелектромеханічних системах на основі вбудованих штучних нейронних мереж» (№ ДР 0111U001218) (2011-12р.), особистий внесок здобувача – розроблення узагальненої методології обчислення ДГП з використанням ЦЗ на основі аналізу базисів основних видів дискретного косинусного, синусного та перетворення Хартлі;

ДБ/СЕБ «Розроблення базових компонентів для синтезу інтелектуальних мобільних робототехнічних систем» (№ ДР 0113U003191) (2013-14р.), особистий внесок здобувача – розроблення узагальнених методологічних принципів та етапів синтезу алгоритмів дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі ЦЗ;

ДБ/Енергоефективність «Інтелектуальні інформаційні технології багаторівневого управління енергоефективністю регіону» (№ ДР 0117U004450) (2017-18р.), особистий внесок здобувача – розроблення і реалізація, відповідно узагальненої методології, обчислювальних алгоритмів ДКП-II на основі ЦЗ довільного обсягу.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є створення узагальненої методології синтезу та виконання алгоритмів ДГП на основі циклічних згорток з покращеними обчислювальними характеристиками у комп'ютерних системах.

Поставлена мета визначає такі основні завдання:

- аналіз та дослідження методів ефективного обчислення дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі ЦЗ, що дасть змогу виділити їхні переваги і недоліки;

- обґрунтування узагальнених методологічних принципів синтезу алгоритмів обчислення дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі ЦЗ;

- розроблення методу визначення твірного масиву, що стисло описує блочно-циклічну структуру базису перетворення ДГП;

- визначення, відповідно узагальненої методології, взаємозв'язаної послідовності етапів синтезу алгоритмів обчислення ДГП на основі ЦЗ;

- розроблення методу цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення для скорочення обчислень ДГП на основі ЦЗ;

- аналіз особливостей кожного з чотирьох видів дискретних косинусних, синусних і перетворень Хартлі для виконання їх обчислення через ЦЗ відповідно узагальненої методології;

- розроблення програмних засобів обчислення ДГП на основі ЦЗ для підтвердження вірогідності визначених методологічних принципів та етапів синтезу алгоритму з покращеними обчислювальними характеристиками.

Об'єкт дослідження – процес синтезу алгоритмів і розроблення структурних схем на основі циклічних згорток для створення нових програмних чи апаратних засобів обчислення основних видів дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі.

Предмет дослідження – принципи, методи і засоби обчислення основних видів дискретних косинусних, синусних і перетворень Хартлі на основі циклічних згорток.

Методи дослідження. Для вирішення задач розроблення узагальненої методології для синтезу ефективних алгоритмів використовувались методи й основні положення цифрової обробки сигналів (для аналізу особливостей базисів перетворення ДГП), теорії матриць (для подання базисів перетворень

ДГП у вигляді блочно-циклічних матричних структур), комбінаторного аналізу (для визначення циклічного розкладу підстановки), алгебри та теорії груп (для обґрунтування узагальненої методології). Для аналізу та опрацювання результатів використано високорівневу мову програмування C++, систему комп'ютерної математики MATLAB, методи експериментальних досліджень та статистичної обробки результатів.

Наукова новизна отриманих результатів.

Вперше:

– розроблено узагальнену методологію на основі циклічного розкладу підстановки, яка дозволила якісно підвищити ефективність виконання обчислення ДГП через циклічні згортки завдяки можливості вибору довільного обсягу перетворення;

– розроблено метод обчислення примітивної підстановки у вигляді твірного масиву або спрощеного твірного масиву, доповненого масивом знаків, який, на відміну від існуючих, підвищує ефективність швидшого визначення послідовності переставлення;

– розроблено метод побудови узагальненої блочно-циклічної структури базисної матриці ДГП, у якому, на відміну від відомих, використано твірний масив для табличного формування структури з використанням спрощених значень аргументів базисної функції зі знаком для перших елементів циклічних підматриць;

– розроблено метод цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення через використання табличних координат, завдяки якому зменшуються обчислювальні затрати і підвищується ефективність аналізу блочно-циклічної структури базису перетворення ДГП;

вдосконалено:

– метод побудови блочно-циклічної структури базису перетворення для ДГП обсягів рівних цілому степеню простого числа на основі закономірного нарощення горизонтальних лінійок в структурі базису зі збільшенням обсягу

перетворення, який забезпечує можливість визначення кількості ідентичних підматриць залежно від значень простого числа обсягу і його степеня;

– метод аналізу ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення ДГП для складених значень обсягів, який полягає у спрощенні пошуку за координатами ідентичних підматриць, що містять елементи, кратні обсягу перетворення, завдяки чому підвищується ефективність тривалості визначення наборів ідентичних підматриць;

– систему взаємозв'язку етапів обчислення твірних масивів, скороченої кількості гармонічних коефіцієнтів, кількості та обсягу циклічних згорток, що забезпечує можливість гнучкої адаптації виконання ДГП до відповідних програмних та апаратних обчислювальних ресурсів;

отримали подальший розвиток:

– схемна модель взаємозв'язку обчислювальних підзадач, яка дає змогу проводити послідовно-паралельну організацію обчислень дійсних ДГП на основі циклічних згорток;

– метод розроблення обчислювальних структурних схем з використанням блоків виконання циклічних згорток, який забезпечує можливість підвищити ефективність у вигляді показника площа-затримка в мікросхемах обчислення ДГП на основі циклічних згорток.

Практичне значення отриманих результатів. Завдяки застосуванню розробленої узагальненої методології, яка визначає взаємозв'язані обчислювальні підзадачі процесу синтезу алгоритму та його виконання для обчислення дійсних дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі на основі ЦЗ, отримано узагальнені практичні результати, які полягають у:

- зменшенні тривалості визначення послідовності переставлення за твірним масивом $P(n)$ більш ніж втричі в порівнянні з визначенням за цілочисельним степенем примітивного елемента циклічної групи, а для складеного обсягу перетворення $N=N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$ визначення послідовності переставлення виконується до $3k$ -раз швидше у випадку розпаралелення обчислення незалежних k - частин твірних підмасивів;

– мультифункціональності, що зменшує затрати більш ніж вдвічі апаратної або програмної реалізації виконання різних ДПХ-ІІ/ДКП-ІІ/ДСП-ІІ перетворень для конкретного обсягу в одному модулі обчислення;

– зменшенні кількості множень на 30% при використанні циклічних згорток з мінімальною мультиплікативною складністю для коротких обсягів, що дорівнюють $N=2^n$ для а) варіанта твірною масиву порівняно з традиційними обчисленнями ДКП-ІІ;

– зменшенні використання площі зайнятості кристала НВІС на більше ніж 10% завдяки локальності та регулярності зв'язків між процесорними елементами у блоках ЦЗ;

– зменшенні в межах (1,2÷3) разів тривалості обчислення ДКП-ІІ для коротких обсягів, менших за $N=120$ розробленого програмного забезпечення порівняно з обчисленням програми бібліотеки FFTW3 (Fastest Fourier Transform in the West) розробника МІТ (Massachusetts Institute of Technology).

Завдяки покращеним обчислювальним характеристикам розроблені алгоритми та структурні схеми обчислення дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі ЦЗ можуть застосовуватись для опрацювання інформаційних даних різноманітних фізичних явищ і процесів. Практичне значення одержаних результатів дослідження підтверджено актами впровадження в ТОВ “Юнісервіс” (м. Львів), ТОВ “Лемберг рішення” (м. Львів), ТДВ “Самбірська швейна фабрика” (м. Самбір, Львівська область).

ТОВ “Юнісервіс”, розробник ліцензійного програмного забезпечення систем автоматизованого проектування трубопровідних мереж, для аналізу та діагностики надійності роботи механічних систем трубопроводу використовує спектральні методи. В процесі моделювання роботи спроектованої мережі, що може витримувати опускання ґрунту, його вібрації, високий тиск рідин з великою питомою вагою, діагностується надійність системи завдяки виявленню підвищених амплітуд вібрацій на частотах, що збігаються з частотами можливих пошкоджень механічних елементів, на резонансних частотах деталей, на частотах протікання робочого процесу. В акті надано позитивні відгуки про

можливості підвищення швидкості роботи та розширення функціональності існуючої підсистеми спектрального аналізу завдяки використанню розробленої узагальненої методології.

ТОВ “Лемберг рішення”, розробник мобільних додатків на ОС Android, застосовує результати дисертаційної роботи для захисту мовної інформації. Використання ДГП на основі циклічних згорток забезпечує на вищому рівні захищеність мовної інформації до криптоаналізу в процесі атаки. Це ґрунтується на використанні багатоступінчастого ключа криптосистеми, до якого входять різні типи перетворень ДКП/ДСП/ДПХ, різні значення обсягів N мовних фрагментів в поєднанні зі способом скремблювання. Низька обчислювальна складність алгоритмів ДГП на основі ЦЗ зменшує часову затримку мовного зв'язку, спричинену процесом скремблювання.

ТДВ “Самбірська швейна фабрика” використовує результати дисертаційного дослідження для контролю якості фрагментів тканин на основі ефективного обчислення двовимірних ДКП-II. Послідовне виконання розроблених одновимірних ДКП-II на основі циклічних згорток для довільних обсягів за рядками та стовпцями даних двовимірного текстурного зображення дає змогу контролювати якість фрагментів тканин різних розмірів. Рівномірно періодичне зображення структури тканини без браку в результаті гармонічного перетворення має відповідне більш загальне спектральне зображення. Зміна цієї картини свідчить про наявність у ній дефекту, і завдяки контролю забезпечують високу якість швейних виробів.

Результати дисертаційної роботи, підтверджені актами впровадження, використовують у навчальному процесі та наукових дослідженнях у Національному університеті “Львівська політехніка”, Львівському національному аграрному університеті для вивчення та використання студентами нових ефективних підходів обчислення косинусних, синусних та перетворень Хартлі на основі циклічних згорток.

Публікації. Результати дослідження опубліковано в 56 друкованих наукових працях. Із них за темою дисертації опубліковано 29 наукових робіт у

фахових виданнях з технічних наук [1] - [29], серед яких 7 входять до міжнародних наукометричних баз, 24 роботи в матеріалах та тезах наукових конференцій [30] - [53], серед яких 7 входять до міжнародних наукометричних баз, 3 патенти України [54] - [56].

Детальний список публікацій здобувача за темою дисертації наведено у додатку Е.

Особистий внесок здобувача. Усі положення, що виносяться на захист, автор сформулював та вирішив самостійно. У 21 науковій праці, опублікованих у співавторстві, авторові дисертації належить: у [3], [18], [21], [30], [31], [34], [48], [50] – узагальнена методологія, що включає принципи та етапи синтезу алгоритмів на основі циклічного розкладу підстановки, для виконання обчислень ДКП, ДСП; у [6] – аналіз розвитку підходів обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі ЦЗ; у [11], [44] – метод пошуку ідентичних підматриць у структурі базисної матриці перетворень; у [8], [12] – розроблення та обґрунтування загальних принципів та етапів формування блочно-циклічних структур у ядрі базису перетворення; у [13] – розроблення методики секціонування на циклічні структури базисної матриці дискретних гармонічних перетворень; у [26], [56] – розроблення ефективного алгоритму канонічного розкладу величини обсягу перетворення ; у [51], [55] – розроблення спеціалізованої структури пристрою обчислення дискретного гармонічного перетворення; [4], [52] – розроблення алгоритму обчислення ДКП-II на основі ЦЗ та аналіз результатів виконання; у [53] – застосування узагальненої методології для обчислення цілочисельного ДКП на основі ЦЗ.

Апробація матеріалів дисертації. Основні теоретичні й практичні результати дисертації доповідались та обговорювались на 24 національних і міжнародних конференціях та презентувались у збірках наукових праць: Праці п'ятої всеукраїнської міжнародної конференції УкрОБРАЗ'2000, (Київ, 2000р.); Збірка тез доповідей учасників II Національної науково-практичної конференції "Системний аналіз та інформаційні технології" (Київ, 2000р.); Збірник матеріалів науково-практичної конференції "Математичне моделювання складних систем",

(Львів, 2007р.); Proceedings of the Ist-VIIth International Conferences MEMSTECH 2005, 2006, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012: Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (Lviv-Polyana); Proceeding of the XI International Conference TCSET'2012: Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science, (Lviv-Slavske, 2012p.); Proceedings of the VII-XII International Conferences CADSM 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015: The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (Lviv-Slavske, Polyana); Proceeding of the Vth, VIIth, IXth International Scientific and Technical Conferences CSIT-2010, 2012, 2014, 2017, 2018: Computer Science & Information Technologies (Lviv).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних скорочень, вступу, шістьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи складає 373 сторінки друкарського тексту, з них основного тексту дисертації – 291 сторінка, що включає 44 рисунки, 81 таблицю, список використаних джерел із 272 найменування та займає 25 сторінок, 6 додатків на 31 сторінці.

РОЗДІЛ 1

Аналіз обчислень дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток

1.1 Інтенсивний розвиток обчислювальних алгоритмів для швидких перетворень класу Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є та згортка – це основні обчислення цифрової обробки інформації. Поява алгоритму ШПФ розробників Д. Кулі, Д. Тюкі в 1965 році була закономірною та своєчасною, схожі ідеї вже до цього публікували [1], [2]. Взаємодоповнювальними каталізаторами інтенсивного застосування дискретних ортогональних перетворень класу Фур'є на кінець 60-х років стали:

- потужний розвиток обчислювальної техніки;
- можливість використання в різноманітних прикладних областях;
- авторитетність як фахівців Д. Кулі та Д. Тюкі, на честь яких названо алгоритм.

Інший алгоритм ШПФ, значно відмінний від алгоритму Кулі-Тюкі [3], розробили незалежно Гуд (I. J. Good, 1958) [4] і Томас (L. H. Thomas, 1963) [5], що свого часу не помітили. В алгоритмі Гуда-Томаса перехід до багатовимірного перетворення ДПФ відбувається за КТЗ для цілих чисел і при цьому не потрібно виконувати добутки на повертаючі множники:

$$X(k_1, k_2, \dots, k_p) = \sum_{n_1=0}^{r_1-1} \sum_{n_2=0}^{r_2-1} \dots \sum_{n_p=0}^{r_p-1} x(n_1, n_2, \dots, n_p) W^{n_1 k_1} W^{n_2 k_2} \dots W^{n_p k_p}, \quad (1.1)$$

де $x(n_1, n_2, \dots, n_p)$ – вхідна послідовність; $X(k_1, k_2, \dots, k_p)$ – вихідна послідовність з $k_1 = 0, 1, \dots, r_1-1$, $k_2 = 0, 1, \dots, r_2-1$, $k_p = 0, 1, \dots, r_p-1$; $W^{nk} = \exp(-j 2\pi kn / NT)$; $N = r_1 \times r_2 \times \dots \times r_p$ – складене число обсягу перетворення; r_1, r_2, \dots, r_p – попарно взаємно простоті множники r_i розкладу обсягу N перетворення з інтервалом дискретизації T .

Розвиваючи напрацювання в царині ефективних алгоритмів, можливість існування ефективніших алгоритмів з обчислювальної точки порівняно з алгоритмом Кулі-Тюкі показав Явн (1968) [6], а Ш. Віноград (1978) [7] опублікував ефективніший, але складніший алгоритм перетворення Фур'є. В АВПФ кількість множень менша порівняно з алгоритмом Кулі-Тюкі за основою два приблизно в п'ять разів.

Досліджено подання базисної матриці перетворення шляхом добутку слабозаповнених матриць (факторизацію), що суттєво зменшує кількість операцій виконання гармонічних перетворень [8]. В основу виконання факторизації покладено операцію \otimes – прямого добутку матриць

$$W_N \sim W_{N1} \otimes W_{N2} \otimes \dots \otimes W_{Ni} . \quad (1.2)$$

Наприклад, для обсягу перетворення, що дорівнює $N=N_1 \times N_2$, використовуючи одиничні матриці E_{N1} , E_{N2} порядків відповідно N_1 та N_2 , отримаємо відповідні властивості прямого добутку

$$W_{N1} \otimes W_{N2} = (E_{N1} W_{N1}) \otimes (W_{N2} E_{N2}) = (E_{N1} \otimes W_{N2}) (W_{N1} \otimes E_{N2}) . \quad (1.3)$$

Обчислення за формулою (1.3) виконуються в дві ітерації, причому обчислення може бути розпаралеленим.

При факторизації матриць на основі тензорного (векторного) добутку кожен із алгоритмів одержано внаслідок складних алгебраїчних дій з елементами матриці перетворення. Ці алгоритми подаються в вигляді розкладу базисної матриці перетворення в добуток слабозаповнених матриць із використанням матричних операцій. Наприклад, у рекурсивному за своєю природою алгоритмі Кулі-Тюкі обчислення ДПФ це можна записати так:

$$DFT_{mn} = (DFT_m \otimes I_n) \cdot D \cdot (I_m \otimes DFT_m) \cdot P, \quad (1.4)$$

де DFT_{mn} – базисна матриця дискретного перетворення Фур'є розмірності $(m \times n)$, I_n , I_m – одиничні матриці, D , P – слабо заповнені матриці.

Подальші інтенсивні дослідження в напрямі розроблення ефективних алгоритмів гармонічного аналізу привели до вагомих результатів, висвітлених у роботах: Герцеля (1968) [9]; Нуссбаумера і Квендела (1979) [10], пов'язаної з

поліноміальними перетвореннями; алгоритму ШПФ Капоріна (1980) [11] з його подальшим розвитком Уенгом (1984); алгоритму ШПФ з розщепленою основою (1984) [12], [13]; двовимірного алгоритму ШПФ-2 Григоряна (1986) [14], [15] та іншими, що описують специфічні ефективні алгоритми. Багато високоефективних алгоритмів із використанням конкретних перетворень адаптовані до характеристик обчислювальних засобів.

У кінці 70-х і в 80-ті роки з'явилося багато публікацій з теоретико-числових перетворень у скінченних числових полях, їх значення в цифровому опрацюванні інформаційних даних узагальнено в роботах [16]-[19]. Важливим теоретичним відкриттям було обґрунтування того, що швидкі дискретні перетворення Фур'є, Уолша (Walsh) і Адамарда (Hadamard) є спеціальними випадками обчислень в алгебрах над полями або кільцями [20], [21].

Глибокі теоретичні дослідження ортогональних базисних систем привели до створення в кінці 70-х років теорії узагальненого спектрального аналізу, яка дозволила не тільки по-новому оцінити значення класичного аналізу Фур'є і можливості його практичного застосування, але і створити методи й критерії синтезу дійсних базисних систем найбільш адаптованих для ефективного розв'язання конкретних практичних завдань [22], [23]. Цьому передувало створення модифікованих алгоритмів ШПФ, в яких застосовувались добутки тільки уявних або дійсних частин коефіцієнтів Фур'є замість комплексних [24], [25]. Тобто перевагу отримували ШПФ алгоритми, в яких перетворення виконувалось у дійсній області, що значно спрощувало реалізацію ДПФ [26]-[28].

Подальший розвиток інформаційних та комунікаційних технологій, пов'язаний із зростанням складності прикладних завдань і, відповідно, вимог до швидкодії та економічності засобів опрацювання інформації [29] з використанням обчислювальних методів. Важливо зазначити, що уявна та дійсна частини перетворення Фур'є необхідні тільки для низки задач, які в більшості випадків використовуються на проміжному етапі одержання результату прикладного завдання. У зв'язку з цим почали досліджуватись прямі та зворотні

дійсні гармонічні перетворення в дійсній області на відміну від перетворення Фур'є, що відображає дійсні функції в комплексну область.

Дискретне перетворення Хартлі виконується тільки над областю дійсних чисел і переводиться в ДПФ. Основи теорії неперервного та дискретного перетворення Хартлі та один з варіантів його швидкого перетворення розробив Р. Брейсуел (1983) [30], [31]. Базисними функціями перетворення Хартлі є не синуси і косинуси, а їх суми. Це перетворення дає змогу застосовувати один алгоритм обчислень, при виконанні як прямого так і зворотного перетворення. За потреби комплексного подання даних у вигляді ДПФ вихідні дані ДПХ використовуються в додаткових обчисленнях для переходу в ДПФ.

Значним поступом в опрацюванні дійсних даних стало використання дискретного косинусного перетворення та дискретного синусного перетворення та їхніх видів [32], [33], які називають дискретними тригонометричними перетвореннями. ДКП та ДСП відповідають властивостям загального ДПФ [34], загального ДПХ [35] або еквівалентні загальному дискретному W перетворенню [36], [37] для дійсних значень даних. Характеристика дискретних тригонометричних перетворень як поліноміальних перетворень у межах поліноміальної алгебри приводить до властивостей, що належать до теорії груп та їх зображень.

На сучасному етапі до дискретних перетворень відносять: z -перетворення, що є фундаментальним інструментом опису вхідних взаємозв'язків у лінійних часово-інваріантних системах, дискретно-часові Фур'є перетворення, ДПФ, ШПФ, ДКП, ДСП, ДП Хартлі, дискретні перетворення Гадамарда (Hadamard), дискретні перетворення Уолша-Гадамарда (Walsh-Hadamard) [38].

Дійсні дискретні перетворення активно вдосконалюються, модифікуються, досліджуються і застосовуються у теоретичному і практичному аспектах багатьма вченими, інженерами та науково-дослідницькими лабораторіями [39].

1.2 Становлення обчислення швидкого перетворення Фур'є на основі циклічних згорток

Одним з напрямів розвитку ефективних алгоритмів, яку відзначають у багатьох виданнях із цифрової обробки інформації [40, 41], є можливість обчислення ДПФ на основі циклічних згорток. Ця ідея виглядала як парадокс. Адже, саме за “теореми швидкої згортки” для аналізу лінійних систем зі сталими параметрами застосовується пряме і зворотне ШПФ, а виявляється ефективне обчислення ДПФ може зводитись до виконання обчислення циклічної згортки [42].

1.2.1 Алгоритми Рейдера, Герцеля, Блюстейна

Піонерською в цьому напрямі вважають публікацію Рейдера (1968) [43]. Дискретне перетворення Фур'є з базисом $W^{nk} = \exp(-j 2\pi kn/NT)$ зводилось до обчислення циклічної згортки для послідовності обсягом, що дорівнює простому числу N . Дискретне перетворення Фур'є:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W^{nk}, \quad n=0, \dots, N-1, \quad (1.5)$$

для подання у вигляді циклічної згортки застосовувало переіндексацію порядку вхідної послідовності $x(k)$. Для цього використано первісний корінь g з відповідним показником степені k , що зводить добуток індексів W до додавання показників степеня числа g . Тобто, обчислення набуває вигляду:

$$X(g^n) = \sum_{k=1}^{N-1} x(g^{-k})W^{g^{n-k}} + x(0), \quad (1.6)$$

що відповідає циклічній згортці без включення $x(0)$ [18]. Числу g відповідає первісний корінь, не обов'язково один, з властивостями $g^{(N-1)} = g^{(0)} = 1$, $g^k \neq 1$, для $0 < k < N-1$. При цьому враховується, що

$$W^{nk} = W^{(nk) \bmod N} = W^{g^n g^k} = W^{g^{(n+k)}}, \quad W^N = 1. \quad (1.7)$$

Алгоритм Рейдера можна застосовувати для обчислення ДПФ над будь-яким полем, якщо тільки обсяг перетворення N є простим числом. Первісний корінь g застосовують у структурі цього поля для переіндексації вхідної послідовності і переходу до циклічної згортки.

Тоді ж з'явилась робота Герцеля (1968) [9], присвячена знаходженню окремих вихідних значень ДПФ з використанням операції згортки. *Алгоритм Герцеля* не належить до ШПФ, оскільки його обчислювальна складність має квадратичну залежність $O(N^2)$. ШПФ-алгоритми обчислюють всі (N) вихідні компоненти перетворення, а в алгоритмі Герцеля можна визначати число вихідних компонент не більше $\log_2 N$ з обсягу N перетворення.

Відповідно до алгоритму Герцеля обчислення ДПФ конкретного вихідного значення $X(k)$, де $k=0,1,\dots,N-1$, виконується наступним чином. Для кожного значення k вихідне дане $X(k)$ обчислюється на виході лінійної системи, для якої $x(q)$ вхідна послідовність, а W_N^{-nk} є імпульсною характеристикою цієї системи. Після поступлення вхідної послідовності $x(q)$ в кількості $q=N$

$$y_k(n) = \sum_{q=1}^{N-1} x(q)W_N^{-k(n-q)}, \text{ приймаємо } X(k) = y_k(n) \big|_{n=N}. \quad (1.8)$$

Отже, $y_k(n)$ визначається як згортка заданої послідовності $x(n)$ та W_N^{-nk} , а вихідне значення $X(k)$ просто отримується за умовою, що для $y_k(n)$ значення n дорівнює N [40].

Реалізація алгоритму Герцеля має багато спільного з цифровими фільтрами. Цифрові фільтри отримують нове значення на виході, як тільки воно надходить, то обчислюється нове значення $y_k(n)$ для кожного нового $x(q)$. Так як кожне нове значення $y_k(n)$, де $n \neq N$ не веде до визначення результату $X(k)$, нема необхідності обчислювати $y_k(n)$ доти, поки $n=N$. Результат обчислення ДПФ $X(k)$ дорівнюватиме $y_k(n)$, якщо $n=N$. Застосування алгоритму Герцеля використовує лише два коефіцієнти для кожної частоти: один дійсний і один комплексний.

У роботі *Блюстейна* (1970) [44] також показано, що обчислення ДПФ може зводитись до виконання згортки. Наведемо основні викладки роботи для виразу ДПФ

$$X(e^{j\varphi_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\varphi_k n} \quad , \quad (1.9)$$

де $\varphi_k = \varphi_0 + k\Delta\varphi$, $\Delta\varphi = 2\pi/N$, позначимо $e^{-j\Delta\varphi} = W$.

Тоді, розписавши φ_k , отримаємо

$$X(e^{j\varphi_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\varphi_0 n} W^{nk} \quad . \quad (1.10)$$

Замість степеня $nk = (1/2)[n^2 - k^2 - (k-n)^2]$ запишемо

$$X(e^{j\varphi_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\varphi_0 n} W^{n^2/2} W^{-k^2/2} W^{-(n-k)^2/2} \quad . \quad (1.11)$$

Якщо позначимо $z(n) = e^{-j\varphi_0 n} W^{n^2/2}$, отримаємо

$$X(e^{j\varphi_k}) = W^{-k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) W^{-(n-k)^2/2} \quad . \quad (1.12)$$

Вираз $\sum_{n=0}^{N-1} z(n) W^{-(n-k)^2/2}$ відповідає обчисленню згортки.

За алгоритмом Блюстейна обчислюємо ДПФ обсягом N за допомогою N -точкової циклічної згортки та $2N$ додаткових добутоків. Алгоритм містить N множень, циклічну згортку і з подальшими N -точковими множеннями. З погляду обчислювальної складності алгоритм Блюстейна не відзначається ефективністю, тому що повне число операцій має N^2 добутоків, однак за певних застосувань він має простішу апаратну реалізацію.

1.2.4 Алгоритм Вінограда перетворення Фур'є

Подальшим розвитком алгоритмів ШПФ та швидких алгоритмів циклічної згортки вважають публікації Вінограда. Через 10 років, розвиваючи підхід Гудатомаса, Віноград (1976) [45] опублікував свій ефективніший, але і набагато складніший алгоритм, що зводить обчислення ДПФ до обчислення коротких згорток (з кількістю множень у 5 разів меншою, ніж у алгоритмі Кулі-Тюкі).

Робота Вінограда [7] є подальшим розвитком підходу Рейдера з приведення обчислення ДПФ до циклічних згорток для послідовностей обсягом простого та цілому степеню простого числа, в ній також виведено формулу обчислювальної складності ДПФ для мінімальної мультиплікативної складової. В алгоритмах Вінограда використовуються конкретні схеми обчислення, що ґрунтуються на китайській теоремі про залишки [20], властивостях прямого добутку матриць та алгоритмах швидких циклічних згорток. В алгоритмах Вінограда застосовується для ДПФ невеликих (малих) обсягів приведення обчислення до циклічних згорток з використанням модульної арифметики в кільці поліномів. У випадку рівності обсягу перетворення простому числу N , перший крок полягає в заміні ДПФ за алгоритмом Рейдера циклічною згорткою, що обчислюється за алгоритмом Вінограда для згорток малого обсягу. Обчислювальна схема алгоритму Вінограда для згорток містить для виконання спочатку певну кількість додавань, за ними множення, і знову відповідну кількість додавань. З метою ефективнішої упаковки алгоритмів Віноград запропонував гніздовий метод з'єднання алгоритмів менших обсягів.

Одержаний АВПФ можна також подати в так званому гніздовому представленні, де всі множення багатовимірного обчислення зосереджено в діагональній матриці множників

$$X = O * D * I * x, \quad (1.13)$$

де x , X – відповідно, вхідний і вихідний стовпці; I – матриця розмірністю $(\mu \times N)$ з одиничними елементами, описує об'єднання вхідної послідовності; D – діагональна матриця множників $(\mu \times \mu)$; O – матриця $(N \times \mu)$ з одиничними елементами, що визначає вихідні об'єднання; у загальному випадку $\mu > N$. “Гніздова” структура алгоритму Вінограда порівняно з найкращими алгоритмами ШПФ потребує на 80% менше операцій множення з приблизно однаковою кількістю додавань [20].

Подальший розвиток гніздових алгоритмів АВПФ запропонували Колба і Паркс [46]. У випадку рівності обсягу N^r перетворення степеня r простого числа

N , за АВПФ спочатку з множини $\{1, 2, 3, 4, \dots, N^r-1\}$ відділяють числа, кратні N . Ця підмножина приводиться до циклічної згортки обсягом $(N^r-1)(N-1)$, що утворює основу алгоритму. Виділені (N^r-1) рядків та стовпців можна обчислити за алгоритмом Вінограда для згорток ще меншого обсягу. Наприклад, для $N=3^2=9$, згрупувавши числа 0, 3, 6, залишаємо основу з 6-точкової згортки та чотирьох 2-точкових згорток. Таким чином, матриця розміру $N^r \times N^r$ розділяється на одну (N^r-N^{r-1}) – точкову циклічну згортку та $(N^{r-1}+1)$ циклічних згорток обсягом $(N-1)$ точок [41].

Тобто, АВПФ обсягом $N=p^r$, можна обчислити за допомогою однієї циклічної згортки обсягом $p^{r-1}(p-1)$, двох згорток обсягом $p^{r-2}(p-1)$, чотирьох згорток обсягом $p^{r-3}(p-1), \dots, 2^{r-1}$ згорток обсягом $(p-1)$.

У випадку рівності обсягу перетворення складеному числу $N=N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$, де $N_i (i=1, 2, \dots, k)$ взаємно прості числа, алгоритм Вінограда базується на поданні матриці обсягом N у вигляді \otimes – прямого добутку матриць N_i -точкових ДПФ

$$W_N \sim W_{\otimes} = W_{N_1} \otimes W_{N_2} \otimes \dots \otimes W_{N_k} \quad (1.14)$$

та приведенні обчислення ДПФ обсягів N_i до циклічних згорток із застосуванням модульної арифметики в кільці поліномів. Матриці W_N і W_{\otimes} збігаються у разі перестановки (і не однієї) їхніх рядків і стовпців. На практиці зручніше переставляти компоненти вхідних і вихідних даних. Правило перепорядкування інформаційних даних ґрунтується на китайській теоремі про залишки.

Однак, ці алгоритми мають свої конкретні особливості для кожного значення N обсягу послідовності, що пов'язані з переіндексацією вхідної послідовності та деякою нерегулярністю одержаних структур і, відповідно, складністю синтезу та реалізації єдиного алгоритму. Тому АВПФ роками досліджують і модернізують науковці [47]-[51].

Існують інші підходи теоретичного обґрунтування обчислення дискретних перетворень класу Фур'є на основі обчислення згорток [52], [53].

1.3 Становлення обчислення швидкої циклічної згортки

“Гармонічний аналіз і згортка є двома різними, але тісно взаємопов’язаними розділами цифрового опрацювання інформації” [54]. Поряд з дослідженнями над ШПФ розвивались і взаємодоповнювались підходи до ефективного виконання цифрової згортки, так звані швидкі згортки. Ефективність виконання полягала в зменшенні таких показників, як кількість обчислювальних операцій, звертань і обсяг пам’яті, помилки округлення і, відповідно, підвищення точності.

1.3.1 Теорема про швидку згортку

Ефективне обчислення циклічної згортки (рис. 1.1) реалізується на основі *теорему про швидку згортку* [55], [56], де виконують ШПФ (на рис. 1.1 позначено FFT - Fast Fourier Transform) над двома $h[n]$, $x[n]$ вхідними послідовностями, відтак перемножують одержані послідовності перетворень і над результатом добутку виконують ЗШПФ (на рис. 1.1 позначено IFFT – Inverse Fast Fourier Transform) для одержання згортки $y[n]$.

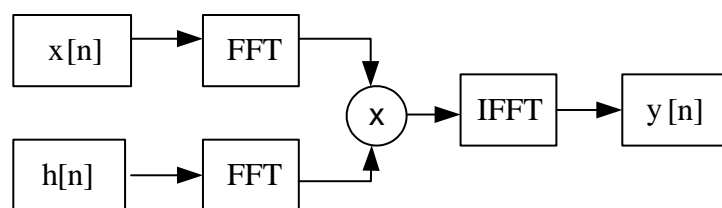


Рисунок 1.1 – Структурна схема обчислення за теоремою про швидку згортку

Одержана періодична послідовність у часовій області і є результатом виконання операції циклічної згортки над двома періодичними послідовностями.

Отже, циклічна згортка описується формулою

$$y_n = \sum_{m=0}^{N-1} x_n(n)h_n(n-m) , \quad (1.15)$$

де $x_p(n)$ і $h_p(n)$ – періодичні послідовності з періодами N відліків. За теоремою про швидку згортку результат згортки $y_p(n)$ визначається на основі добутку N -точкових ШПФ $X_p(k)$ і $H_p(k)$

$$Y_p(k) = X_p(k) H_p(k). \quad (1.16)$$

і ЗШПФ для $Y_p(k)$.

Метод швидкої згортки приводить до суттєвого зменшення кількості обчислювальних операцій, вже починаючи зі значення обсягу перетворення $N=128$ (при використанні ШПФ Кулі-Тюкі з $2M \log_2 N$ – дійсних добутків та $3M \log_2 N$ – дійсних додавань). Недоліки підходу – це значні похибки округлення через все ще великий обсяг обчислень для великих обсягів згортки, значні затрати пам'яті для зберігання комплексних експоненціальних компонентів.

За методом швидкої згортки можна застосовувати ДПХ замість ДПФ, що приводить до заміни комплексних компонентів дійсними даними в процесі обчислення [57]. За теоремою про швидку згортку значення згортки $y_p(n)$ у вигляді ДПХ $Y_X(n)$ визначається на основі добутку ДПХ $X_X(k)$ і $H_X(k)$ для $n=0,1,\dots,N-1$ за формулою

$$Y_X(n) = 1/2 \{ X_X(n) [H_X(n) + H_X(N-n)] + X_X(N-n) [H_X(n) - H_X(N-n)] \}. \quad (1.17)$$

За допомогою зворотного ДПХ для $Y_X(k)$ визначається циклічна згортка $y_p(n)$.

Обчислення циклічної згортки реалізують на основі теореми про швидку згортку в дійсній області даних, використовуючи дискретні тригонометричні перетворення. Цей метод обчислення згортки названо швидкою згортокою, оскільки використання швидких дискретних гармонічних перетворень дозволяє суттєво покращити обчислювальну ефективність порівняно з прямою згортокою.

1.3.2 Інтерполяційний алгоритм обчислення згортки Тоома – Кука

Алгоритм Тоома (1963) і Кука (1966) [58, 59] є алгоритмом обчислення лінійної згортки на основі перемноження двох поліномів $x(z)$, $h(z)$. Варта уваги і праця їх попередника А. Карацуби (1962) [60] про алгоритм виконання двоточкової згортки.

Ідея алгоритму Тоома-Кука полягає в попередньому визначенні значень $y(z_k)$ для інтерполяційної формули Лагранжа

$$y(z) = \sum_{i=0}^{n-1} y(z_i) \frac{\prod_{j \neq i} (z - z_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)} . \quad (1.18)$$

Тобто, необхідно мати k значень лінійної згортки $y(z_k)$, визначених за добутком

$$y(z_k) = x(z_k)h(z_k), \quad k=0,1,\dots,L+N-2 . \quad (1.19)$$

Загалом використовується $(L+N-1)$ для i , відповідно така ж сама кількість добутків, і відтак за формулою (1.18) визначається многочлен $y(z)$. Можуть бути інші добутки величин $x(z_k)$, $h(z_k)$ та ті, що входять в інтерполяційну формулу. На заміну інтерполяційній формулі Лагранжа було знайдено і віддано перевагу використанню китайської теореми про залишки.

1.3.3 Алгоритм Агарвала – Кулі

Використання індексації типу Гуда-Томаса для ефективного обчислення одновимірних згорток належить Агарвалу і Кулі (1977) [61]. Алгоритм Агарвала-Кулі переводить обчислення одновимірної N -точкової циклічної згортки до багатовимірної з використанням "гніздового" алгоритму. Наведемо формули переходу N -точкової циклічної згортки в двовимірну $(N_1 \times N_2)$ циклічну згортку за умови, що N_1 і N_2 взаємно прості.

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} x_n(l_1, l_2) h_n((n_1 - l_1)(n_2 - l_2)) , \quad (1.20)$$

де $l_1 \equiv l \pmod{N_1}$; $l_2 \equiv l \pmod{N_2}$; $n_1 \equiv n \pmod{N_1}$; $n_2 \equiv n \pmod{N_2}$; $n, l = 0, 1, \dots, N-1$.

Послідовність вимірів впливає на кількість арифметичних операцій множення в алгоритмі Агарвала-Кулі. Наприклад, позначимо для N_1, N_2 -точкових згорток m_1, m_2 – кількість необхідних добутоків відповідно, аналогічно a_1, a_2 – кількість операцій додавання. Тоді для $(N_1 \times N_2)$ циклічної згортки (1.20) кількість необхідних операцій множення і додавання відповідно буде

$$m = m_1 * m_2; \quad a = N_1 a_2 + m_2 a_1. \quad (1.21)$$

Відповідно, кількість арифметичних операцій множення для алгоритмів обсягом $N = N_1 \times N_2 = 6$ залежно від порядку вимірів N_1, N_2 чи N_2, N_1 буде

$$N_1=2; N_2=3; \quad m_1=2; m_2=4; a_1=4; a_2=11; \quad m=2*4=8; a=2*11+4*4=38;$$

$$N_1=3; N_2=2; \quad m_1=4; m_2=2; a_1=11; a_2=4; \quad m=2*4=8; a=3*4+2*11=34.$$

В основу алгоритму Агарвала-Кулі переходу від одно- до багатовимірної циклічної згортки покладено китайську теорему про залишки для цілих чисел.

Алгоритм Агарвала-Кулі загалом містить такі етапи:

- спочатку одновимірною циклічною згортою за допомогою КТЗ для цілих чисел перетворюється на багатовимірну циклічну згортку;
- далі за кожним виміром (координатою) застосовується швидкий алгоритм коротких циклічних згорток;
- після цього для об'єднання всіх одержаних перетворень використовується процедура, описана на основі прямого добутку (Кронекера) матриць [20].

Переваги підходу – висока структурованість та керованість, оскільки обчислення може бути розбите на підпрограми, що використовують швидкі алгоритми коротких згорток. Недолік – не забезпечується мінімального скорочення обчислень, використовується значна кількість операцій переіндексації елементів.

Таким чином, виконується перехід від обчислення одновимірної згортки до багатовимірної, для обчислення якої застосували гніздовий алгоритм. Цей гніздовий метод збігається з запропонованим Віноградом [7] для обчислення багатовимірного перетворення Фур'є.

1.3.4 Обчислення згортки на основі поліноміальних перетворень

Поліноміальне подання розширення полів раціональних і комплексних чисел (підмножина раціональних чисел є підполем поля комплексних чисел) характеризується існуванням прямого та зворотного поліноміального перетворення [40].

Поліноміальне перетворення визначається векторами з компонентами

$$Y_n(z) = \sum_{i=0}^{N-1} z^{in} y_i(z) \pmod{p(z)}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (1.22)$$

де $p(z)$ поліном порядку m і компоненти поліноміального вектора поліномами $y_i(z)$ порядку, не більшому за $(m-1)$ над полем комплексних чисел \mathbb{C} .

Зворотне поліноміальне перетворення з $x^n=1$ подається у вигляді

$$y_i(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-in} Y_k(z) \pmod{p(z)}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (1.23)$$

Згортку двох послідовностей x_n, h_n ($n=0, 1, \dots, N$) можна обчислити добутком двох поліномів. Так, два перемноження поліномів степеню $(N-1)$ дає поліном степеня $(2N - 2)$ у вигляді

$$Y(z) = H(z)X(z) = \sum_{n=0}^{2N-2} y_n z^n = \sum_{n=0}^{N-1} h_n z^n \sum_{m=0}^{N-1} x_m z^m = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h_n x_m z^{n+m} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1+n} h_n x_{n-k} z^k. \quad (1.24)$$

Якщо $x_n = 0$ для $n < 0$ і $n > N-1$, тоді поліном $Y(z)$ запишемо у вигляді:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{2N-2} \sum_{n=0}^{N-1} h_n x_{k-n} z^k = \sum_{k=0}^{2N-2} y_k z^k. \quad (1.25)$$

Вираз (1.25) відповідає згортці y_k послідовностей x_i і h_i , що обчислюється добутком двох поліномів.

Розглянемо циклічну згортку

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(n)_N h(n-k)_N, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (1.26)$$

де всі індекси x_i і h_i визначаються за модулем $N \pmod{N}$.

Запис *циклічної згортки* у вигляді поліноміального подання визначається за формулою

$$Y(z) = H(z) X(z) \pmod{z^N - 1}. \quad (1.27)$$

Для обчислення циклічної згортки застосовується КТЗ для поліномів. Якщо подати поліном $(z^N - 1)$ у вигляді добутку K – взаємно простих поліномів з коефіцієнтами з поля раціональних чисел

$$z^N - 1 = \prod_{l=1}^K P_l(z), \quad (p_1(z), \dots, p_k(z)) = 1, \quad (1.28)$$

тоді циклічна згортка визначається за формулою

$$Y(z) \equiv \left(\sum_{l=1}^k Y_l(z) Q_l(z) S_l(z) \right) \pmod{z^N - 1}, \quad (1.29)$$

де $Y_l(z) \equiv X(z)H(z) \pmod{P_l(z)}$; $S_l(z) = (z^N - 1) / P_l(z)$.

Поліноми $Q_l(z)$ відповідають співвідношенню

$$Q_l(z) S_l(z) \equiv 1 \pmod{P_l(z)}, \quad l = 1, \dots, K. \quad (1.30)$$

Цей вираз можна записати як еквівалентне завдання знаходження двох поліномів $Q_l(z)$, $T_l(z)$, що відповідають співвідношенню

$$Q_l(z) S_l(z) + T_l(z) P_l(z) = 1, \quad l = 1, \dots, K. \quad (1.31)$$

Розв'язок цього рівняння відповідає поліноміальному еквіваленту алгоритму Евкліда, за умови, що унітарні поліноми $P_l(z)$ та $Q_l(z)$ не мають спільних множників [20]. Алгоритм для обчислення коротких згорток із мінімальною кількістю множень для невеликих значень N подано в роботі Вінограда [7]. Мінімальна кількість множень для обчислення циклічної згортки двох послідовностей обсягу N , що дорівнює $2N - K$, де K – кількість взаємно простих поліномів розкладу полінома $(z^N - 1)$.

Для зменшення кількості додавань у обчисленні багатовимірної згортки Нуссбаумером [62] запропоновано використання китайської теореми про залишки для поліномів. Дослідження ефективного обчислення згорток на основі поліноміальних перетворень подано також у працях [63], [64].

Обчислення згортки на основі поліноміальних перетворень забезпечує високу ефективність і точність обчислень, однак ускладнює програмну реалізацію обчислення згортки в зв'язку з конкретними особливостями

кожного обсягу перетворення, пов'язаними з переіндексацією та нерегулярністю взаємозв'язків.

1.3.5 Обчислення згортки на основі теоретико-числових перетворень

Теоретико-числові перетворення активно досліджують для ефективного виконання згорток [20, 65]. Для вирішення багатьох прикладних завдань ТЧП мають певні особливості та вимоги:

- значення обсягу перетворень повинно бути подане у вигляді добутку великого числа співмножників;
- операція множення повинна бути простою операцією за виконанням (наприклад, у вигляді зсувів);
- двійкове подання числа в операції за модулем повинно забезпечити простоту виконання (наприклад, $\text{mod}(2^i - 1)$).

Найбільше застосування отримали ТЧП з числами Ферма $F=2^k+1$, $k=2^i$, та числами Мерсена $M=2^p - 1$, p – просте додатне ціле число [66, 67].

Аналогічно виконанню за теоремою швидкої згортки для обчислення циклічної згортки необхідно визначити ТЧП двох послідовностей, перемножити одержані ТЧП і далі виконати зворотне ТЧП над отриманими добутками [68].

До переваг ТЧП зараховують – точне перетворення в кільці *цілих* чисел. Недоліком вважають те, що для однозначного подання чисел у ТЧП вимагається, щоб числа були за абсолютною величиною вдвічі меншими від значення числа модуля. Існує також залежність між обсягами згортки і ТЧП, особливо для великих значень обсягів перетворення. Все це звужує можливості прикладного застосування ТЧП.

1.3.6 Аналіз інших ефективних обчислень циклічної згортки

Метод парисекції, запропонований Пітасі [69] і узагальнений Девісом [70], полягає в тому, що обчислення циклічної згортки у проводиться на основі обчислення згорток менших обсягів. Вхідні h , x та вихідні y послідовності згортки можуть бути розділені на дві групи, що вимагає парної кількості елементів вхідних послідовностей (Eh , Ex , Ey – парні і Oh , Ox , Oy – непарні вектори вхідних h , x та вихідної y послідовностей). Тобто, згортка y для парних обсягів послідовностей h , x може визначатись чотирма згортками у двічі менших обсягів:

$$Ey = Eh \otimes Ex + Oh \otimes Ox ; \quad Oy = Eh \otimes Ox + Oh \otimes (Ex)' ; \quad (1.32)$$

де $(Ex)'$ – послідовність, що певним чином зміщена, \otimes – операція циклічної згортки.

Модифікація даного підходу в роботі [71] визначає згортку парних обсягів з використанням двох згорток послідовностей у двічі менших обсягів, що певним чином зміщені

$$Ey = 1/2(e+d) ; \quad Oy = 1/2(d-e)'' ; \quad (1.33)$$

де $d = [Eh+(Oh)'] \otimes [Ex+(Ox)']$, $e = [Eh-(Oh)'] \otimes [Ex-(Ox)']$.

Однак, цей ефективний метод обчислення згортки накладає умову значення обсягів послідовностей h , x рівними $2K$, де K – непарне.

Існує підхід переходу до багатовимірної згортки [72, 73], що ґрунтується на *псевдоциркулянтній факторизації*, яка не вимагає взаємної простоти множників для N обсягу циклічної згортки. Циклічна матриця подається у вигляді

$$H_p = \begin{bmatrix} H_0 & S_{N/r}H_{r-1} & S_{N/r}H_{r-2} \cdot S_{N/r}H_2 & S_{N/r}H_1 \\ H_1 & H_0 & S_{N/r}H_{r-1} \cdot S_{N/r}H_3 & S_{N/r}H_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{r-2} & H_{r-3} & H_{r-4} \cdot H_0 & S_{N/r}H_{r-1} \\ H_{r-1} & H_{r-2} & H_{r-3} \cdot H_1 & H_0 \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

де $N=R*M$ – обсяг циклічної згортки і не вимагається взаємна простота R та M елементів розкладу. Наприклад, відповідно (1.34) для $R=2$ циклічна матриця має вигляд

$$H_p = \begin{bmatrix} H_0 & S_{N/2}H_1 \\ H_1 & H_0 \end{bmatrix},$$

а матричний запис циклічної згортки запишеться в формі, де матриці стовпці X_0 , X_1 та Y_0 , Y_1 – розбито на M елементів

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 & S_{N/2}H_1 \\ H_1 & H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Для $R=3$ циклічна матриця має вигляд

$$H_p = \begin{bmatrix} H_0 & S_{N/3}H_2 & S_{N/3}H_1 \\ H_1 & H_0 & S_{N/3}H_2 \\ H_2 & H_1 & H_0 \end{bmatrix}, \quad S_{N/R} = \begin{bmatrix} 000.01 \\ 100.00 \\ 010.00 \\ \dots \\ 000.01 \\ 000.10 \end{bmatrix}$$

де $S_{N/R}$ – циклічний оператор зсуву, H_i – циклічні підматриці.

Таке подання дозволяє проводити розпаралелення виконання обчислення циклічних згорток.

На практиці обсяг $N = k*N_1$ вхідного сигналу може бути достатньо великим у порівнянні з іншим сигналом обсягу N_2 для виконання згортки. У результаті обчислення виникають значні часові затримки або обчислення неможливо виконати через обмежені ресурси пам'яті. У цьому випадку для ефективного обчислення згортки застосовують алгоритм секціонованої згортки – вхідний сигнал обсягу N розділяють на короткі секції (блоки, сегменти) меншого обсягу N_1 , і результуючий сигнал лінійної згортки $y(n)$ визначають об'єднанням результатів згорток на суміжних ділянках [74].

Як тільки один із сегментів стає цілком доступним, починається його опрацювання, яке можна виконувати одним із двох методів. За методом *перекриття з накопиченням* (overlap save) застосовують *перекриваючі* на (N_2-1)

відліків блоки вхідних даних, і частину кожного вихідного блока результату виконання згортки відкидають. В основу методу покладено обчислення *циклічної згортки* того самого обсягу, що й обсяг блоків вхідних даних N_1 . Після виконання циклічних згорток для їх об'єднання не потрібно виконувати додатково операції додавання [75].

За методом *перекриття з додаванням* (overlap add) не використовують перекриття вхідних блоків даних, проводять чіткий поділ вхідної послідовності на секції обсягу N_1 . В основу методу покладено обчислення лінійної згортки, обсяг якої суттєво більший від обсягу вхідних блоків (N_1+N_2-1) . Далі виконується *перекриття* результатів згорток на останніх (N_2-1) точках кожної попередньої з першими (N_2-1) точками наступної згортки. Додаються (N_2-1) точок перекриття згорток з об'єднанням в результуючий сигнал *лінійної згортки*.

В обох методах для кожної n -точкової (N_1) згортки використовують (N_1-N_2) вихідних відліків. Метод *перекриття з накопиченням* має ту перевагу, що після обчислення згорток не потрібно виконувати додатково операції додавання. За методом *перекриття з додаванням*, що застосовує обчислення лінійної згортки, один вхід якої містить тільки (N_1-N_2) ненульових коефіцієнтів, конструюють алгоритм лінійної згортки з меншою кількістю додавань.

Обчислювальна ефективність алгоритму секціонованої згортки визначається відношенням

$$Rm(S) / Rm(N) < 1, \quad (1.36)$$

де $Rm(S)$ – кількісна обчислювальна характеристика при секціонуванні; $Rm(N)$ – без секціонування. При використанні ефективних алгоритмів коротких згорток в алгоритмі секціонування економія часу може становити до 50%.

1.4. Аналіз обчислень дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток

Більше трьох десятиліть інтенсивно досліджується і розвивається швидке обчислення дійсних дискретних перетворень класу Фур'є, до яких належать ДКП, ДСП, ДПХ. Багатоваріантність ефективних обчислень узагальнено в класифікації, що містить алгоритми з основою два, розщепленою основою, змішаною основою, непарного обсягу, складеного обсягу і алгоритм простих множників [76]. Особливо значна кількість публікацій присвячена ефективному обчисленню ДКП [77], завдяки його широкому застосуванню в обробці цифрових відео- та аудіосигналів. У роботі [78] проаналізовано розвиток зменшення кількості операцій обчислення ДКП-II для обсягу $N=8$. Аналіз результатів свідчить, що дослідження проводили не тільки з метою зменшення обчислювальної складності або зменшення кількості операцій множення, але й з метою знаходження нових підходів до створення ефективних алгоритмів.

Виділяють такі напрями синтезу ефективних ДКП, ДСП та ДПХ.

1. Пряма факторизація матриці базису, що передбачає децимацію в часі або за частотою.

Опубліковано значну кількість робіт, що описують ефективне обчислення за допомогою факторизації базисів ДКП та ДСП та ДПХ. У роботах [79], [80] розглянуто швидкі ДКП з використанням різноманітних форм факторизації (табл. 1.1). Однак, у процесі обчислення добутку матриць здійснюється надлишкові звертання до елементів слабозаповнених матриць. Це потребує подальших систематизації та узагальнення з метою створення систем автоматичної генерації алгоритмів на основі теорії правил декомпозиції та оптимізації [81], що відповідають вимогам до наявних засобів та особливостей застосування.

Таблиця 1.1 – Швидкі алгоритми ДКП у формах факторизації

Вид форми факторизації
$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & K_H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{N/2} & 0 \\ 0 & H_{N/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}$
$[P_{L1}] \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{N/2} & 0 \\ 0 & L_{N/2} \end{bmatrix} \cdot [P_{L2}]$
$[P_{K1}] \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L_K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{N/2} & 0 \\ 0 & K_{N/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_K \end{bmatrix} \cdot [P_{K2}]$
$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{N/2} & 0 \\ 0 & T_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{N/2} & 0 \\ 0 & C_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}$

2. Непряме обчислення з використанням швидкого перетворення Фур'є або інших перетворень [82]-[84].

Приклад зв'язку косинусних і синусних перетворень з ДПФ, що можна подати рекурсивними алгоритмами вигляду:

$$\text{ДКП}_{2m} = P \cdot (\text{ДПФ}_{2m} \otimes I_m) \cdot (I_m \oplus D) \cdot (I_2 \otimes \text{ДКП}_m) \cdot B, \quad (1.37)$$

$$\text{ДСП}_{2m} = P \cdot (\text{ДПФ}_{2m} \otimes I_m) \cdot (I_m \oplus D) \cdot (I_2 \otimes \text{ДСП}_m) \cdot B, \quad (1.38)$$

де $n=2m$; P – матриця перестановки; D – діагональна матриця; B – слабозаповнена матриця; I – одинична матриця; \otimes – прямий добуток матриць; \oplus – сума матриць.

3. Алгоритми, що базуються на теорії складності.

ДПФ (обсягу n) можна визначити в строго алгебраїчних термінах як матрицю розкладу групової алгебри $C[Zn]$ циклічної групи Zn з n елементів [85]. Узагальнення на випадок довільної скінченної групи приводить до «Фур'є-аналізу на групах», який представляє широкий клас перетворень і теорію одержання швидких алгоритмів для них.

4. Алгоритми, основані на теорії поліноміальних перетворень [86].

У різних контекстах швидкі алгоритми ДКП, ДСП та ДПХ видів I-IV були виведені з використанням *поліноміальних перетворень*, а для шістьох

перетворень це було виведено в випадках після відповідної нормалізації [86]. Показано, що чотири види перетворення мають групову симетрію (тобто властивості, що належать до теорії груп) і для кожного з них швидкий алгоритм виводиться суто алгебраїчно.

5. Алгоритми ДКП, ДСП та ДПХ, що базуються на використанні розкладу обсягу перетворення на прості множники [87].

Завдяки цьому способу в багатьох перетвореннях під час цифрового опрацювання інформації відбувається перехід від одновимірного перетворення до багатовимірного, при цьому для подальшого виконання перетворень вже використовуються менші обсяги. Різноманітні алгоритми декомпозиції на основі простих множників розглянуто в роботах [87]-[91].

Більшість досліджень швидкого обчислення ДГП включають питання як ефективного обчислення ДКП, так і ДСП [92]-[94]. Традиційно, значну увагу звертали на швидкі алгоритми ДКП, ДСП для обсягів цілого степеня два [95-98]. Значна кількість публікацій присвячених швидкому обчисленню загального ДПХ розглянуто в роботах [99]-[101].

Ще одним напрямом розвитку ефективних алгоритмів є можливість обчислення ДГП на основі циклічних згорток. Незважаючи на те, що саме для виконання теореми про згортку в лінійних системах із постійними параметрами використовуються швидкі ДПФ, навпаки, можливе застосування циклічних згорток для ефективного обчислення перетворень. Піонерською роботою з обчислення дискретних перетворень на основі циклічних згорток вважають публікацію Рейдера [43], де дискретне перетворення Фур'є простого обсягу зводилось до обчислення на основі циклічних згорток. У цьому напрямі ефективного обчислення використано програмні та апаратні засоби реалізації алгоритмів швидкої згортки.

Так, у роботі [102] Ю.Х. Чан та В.-Ч. Сіу розглянули формулювання обчислення ДКП обсягом $N=2^n$ шляхом обчислення двох кореляцій, кожна вдвічі меншого обсягу $N/2$. У формулюванні використано взаємооднозначне відображення за [103] на множині $\text{Index} = (i: i = 0, 1, \dots, N-1)$, де $N = 2^m$,

до $\langle 5^v \rangle_{4N} = 4u + 1$, де $u, v = 0, 1, \dots, N-1$. Ці автори в роботі [104] запропонували алгоритм, що конвертує ДКП простого обсягу N до обчислення двох кореляцій обсягом $(N-1)/2$. Розвиток результатів досліджень цих авторів подано в [105], де ДКП обсягом $N=2^n$ можна подати в N -кореляційній косинусній структурі та ДКП обсягом $N/2$. Доведено, що N -кореляційну косинусну структуру можна декомпонувати в $N/2$ - кореляційну косинусну структуру та ДКП обсягом $N/4$. Кореляційну косинусну структуру можна легко конвертувати в циклічну кореляцію.

Загальний підхід обчислення ДКП довільного обсягу N на основі циклічних згорток сформулювали Ю.Х. Чан та В.-Ч. Сіу в [106], де приведення обчислення ДКП зводиться до вигляду:

$$Y(k) = \{ 2T(k) + x(0) \} \cos(k \pi/2N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 ; \quad (1.39)$$

$$T(k) = \frac{1}{2} [H(k)+H(2N-k)+G(k)+G(2N-k)] \sec[k^2\pi/2N], \quad (1.40)$$

де $\{H(k)+H(2N-k)\}$, $\{G(k)+G(2N-k)\}$ відповідають циклічним згорткам.

Цей алгоритм, як зазначають автори, не є оптимальним із погляду обчислювальної складності, але підтверджує можливість ефективного обчислення ДКП за згортками. Алгоритми на основі циклічних згорток продовжують досліджувати в напрямі удосконалення попередніх робіт [107,108].

У роботі [109] автори приводять обчислення ДКП простого обсягу N до циклічної згортки із домноженням результатів згортки на синус або косинус, відповідно, для парних та непарних вихідних відліків.

У дослідженнях [110] розглянуто конкретний випадок обчислення ДКП простого обсягу N з використанням циклічних згорток, коли $N-1$ має множник 4, наприклад, обсяг $N=13$. У результаті обчислення зводиться до блочно-циклічних структур базисної матриці ДКП. Надалі в роботі [111] обчислення ДКП простого обсягу N трансформується в дві $(N-1)/2$ циклічні згортки і якщо $(N-1)/2$, обсяги факторизуються $(N_1 \times N_2)$, то згортки визначаються через блок псевдоциклічних структур. Автори підкреслюють переваги переходу від ДКП

простого обсягу до циклічної згортки або кореляції, що підвищує швидкодію виконання перетворення на систолічних структурах.

У роботі [112] показано, що p -точкове ДКП можна обчислити як дві циклічні згортки, кожна обсягом $(p-1)/2$, коли $(p-1)/2$ є будь-яким непарним числом. Для інших простих ДКП може обчислюватись як циклічна згортка та асиметрична (skew) згортка для кожної обсягом $(p-1)/2$. У випадку, коли $(p-1)/2 = 2^m q$ з $m > 0$ та q непарне, для обчислення ДКП необхідно одну $(p-1)/2$ -точкову циклічну згортку і комбінацію q -точкової циклічної згортки та 2^m -точкове Ганкелевого добутку. Одержано циклічні згортки і для обсягу простих чисел $p=4k+1$, $p=4k+3$, для яких $A(2p)$ є підгрупою з генеруючим елементом g , що відповідає певним умовам.

Особливо багато публікацій присвячено реалізації на апаратному рівні обчислення ДКП, ДСП та ДПХ видів I-IV на основі циклічних згорток, що пов'язано з ефективною реалізацією циклічних згорток у процесі розроблення НВІС та широкому їх застосуванню в системах обробки відео та аудіо інформації.

Основною проблемою під час компоновки НВІС стала вартість міжзв'язків. Якщо час затримки в інтегральній схемі починає залежати, головним чином, від затримки міжзв'язків, а не від часу переключення логічних елементів, то мінімальні та локальні зв'язки стають суттєвим фактором у проектуванні НВІС. Проблеми локальності міжзв'язків при збільшенні числа компонентів і, відповідно, розміру кристала стають надзвичайно складними. В підсумку, вартість розроблення мікросхем, їх продуктивність і швидкість переважно визначаються площею кристала й затримками між з'єднаннями компонентів. Отже, модульність, регулярність, локальність зв'язків, масштабний паралелізм стали суттєвими факторами розроблення архітектури НВІС. Ці фактори знаходять вирішення у використанні алгоритмів ДКП на основі циклічних згорток та їх реалізації за допомогою систолічних обчислювальних масивів. Аналіз робіт з відзначенням підвищення ефективності показників

розроблених мікросхем обчислення ДГП на основі циклічних згорток подано в табл.1.2.

Таблиця 1.2 – Підвищення ефективності показників обчислення ДГП на основі циклічних згорток розроблених мікросхем

Розробка	Призначення	Покращення показників на
Chang, Jen [113] 1998	N=5, ДПФ N=8, ДКП	81% площа
Chang, Guo [114] 2000	N=61, ДПФ	80% площа, вдвічі продуктивність
Chen[115] 2005	N=7,11,ДКП,0.35 μ m	57% площа-затримка,
Chen, Guo [116] 2005	N=5,7,11, ДПФ 0.35 μ m CMOS	29-68% площа-затримка, потужність,
Meher [117] 2006	N=32, ДКП, 0.18 μ m	20%, 50%, 65% площа-затримка, потужність-затримка
Cheng, Parhi [111] 2006	N= 13, р, ДКП	1.5 швидкість, продуктивність, апаратна вартість
Meher [118] 2007	N=7, ДКП	57% площа-затримка
Mohammad,Agaian [119] 2009	N=4, конвольвер, FPGA	35% площа, 50% потужність, 2,5 затримка
Saha, Banerjee [120] 2011	N=16, ДПФ, 90 nm CMOS	73% швидкість, 55% потужність, 48% затримка
Chiper,Ungureanu [121],[122] 2011	N=7, 11, 37, ДКП, N=11, ДКП-IV	вдвічі продуктивність, потужність, апаратна складність
Nath, Jessintha [108] 2013	N=6, ДКП, FPGA	апаратні затрати, продуктивність
Meher, Park [123] 2014	N=4,8,16,32, ДКП	19% площа-затримка, 20% потужність на вибірку

Саме завдяки розвитку підходу та наявності реалізованих ефективних алгоритмів обчислення ДГП на основі циклічних згорток в інтегральних мікросхемах (табл. 1.3) в середньому параметр "затримка-площа" (нс-мм²) покращується на 35%, а потужність споживання близько 20% на вибірку перетворення. Дані відносні показники отримані завдяки регулярності та близькості інтеркомунікацій між елементами в систолічних масивах з розробленням компонентів з розподіленою арифметикою (distributed arithmetic, group distributed arithmetic, block-based group distributed arithmetic) та табличним заданням на бітовому рівні, використання потоковості та конвеєризації обробки даних в НВІС обчислення ДГП на основі циклічних згорток.

Отже, особливо значну кількість швидких алгоритмів для обчислення ДГП з використанням циклічних згорток розроблено в останні десятиліття [124]. Більшість існуючих підходів для створення ефективних алгоритмів ґрунтуються на властивості формування циклічної послідовності з використанням примітивних коренів для p – простого, цілих степенів простого або конкретних значень обсягів перетворення. Однак, ці підходи не дають узагальненого розв'язку формування циклічних згорток у базисній матриці для кожного виду ДКП, ДСП та ДПХ.

Висновки до першого розділу

Аналіз методів ефективного обчислення дійсних дискретних перетворень класу Фур'є дає змогу визначити основні тенденції поступального розвитку як самого наукового напрямку, так і підходу до обчислення дійсних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток:

1. Алгоритм Кулі-Тюкі для швидкого перетворення Фур'є став значною віхою початку інтенсивного розвитку обробки сигналів і обчислювальних систем та внесений в топдесятку алгоритмів ХХ століття за своєю значимістю. Застосування швидких перетворень класу Фур'є вплинуло на становлення

сучасних високопродуктивних обчислювальних апаратних засобів, адже в основу перших спеціалізованих обчислювачів на основі алгоритмів ШПФ покладено прогресивні ідеї схемної та структурної організації обчислень.

2. Підхід до ефективного обчислення ДПФ на основі циклічних згорток, що реалізовано в алгоритмах С. М. Рейдера, Г. Герцеля, Л. Блюстейна, Ш. Вінограда, є важливим етапом розвитку ефективних алгоритмів ДГП. Поряд з дослідженнями ШПФ розвивались і взаємодоповнювались підходи ефективного обчислення цифрової згортки так звані швидкі згортки. Ефективне обчислення циклічної згортки реалізовано на основі теореми про швидку згортку, алгоритму Тоома і Кука, алгоритму простих множників Агарвала і Кулі, обчислення згортки на основі поліноміальних перетворень та теоретико-числових перетворень, алгоритму секціонування згортки, методу парисекції, методу на основі псевдоциркулянтної факторизації.

3. Застосування дійсних базисних систем перетворень, що включають дискретні перетворення Хартлі, дискретні косинусні перетворення та дискретні синусні перетворення та їхні види, стало значним поступом в області обробки інформаційних даних. У різних контекстах швидкі алгоритми ДКП, ДСП та ДПХ було виведено з використанням розроблених методів ефективного обчислення ДПФ, і зокрема на основі циклічних згорток.

4. Значна кількість швидких алгоритмів обчислення дійсних ДГП на основі циклічних згорток розроблено в останні десятиліття в зв'язку з розвитком інтегральних технологій. Більшість існуючих підходів для створення ефективних алгоритмів ґрунтуються на властивості формування циклічної послідовності з використанням примітивних коренів для простого або конкретних значень обсягів перетворення. Алгоритми обчислення ДГП на основі ЦЗ застосовують для простих та цілих степенів простих обсягів перетворення (алгоритми Рейдера, Вінограда) або мають квадратичну обчислювальну складність (алгоритми Герцеля, Блюстейна).

5. Стандартизовані ISO/IEC дискретні косинусні та синусні перетворення видів I-VIII ще недостатньо досліджено та вивчено в аспекті ефективного

обчислення. Тому розроблення узагальненої методології для синтезу швидких алгоритмів та побудови засобів обчислення ДГП на основі ЦЗ є актуальним завданням.

6. Створене науково-інформаційне підґрунтя є основою подальшого розвитку швидкого обчислення ДГП на основі ЦЗ у напрямі розроблення узагальненої методології, що забезпечить створення ефективних програмних та апаратних засобів її комп'ютерної реалізації.

Основні результати розділу опубліковано в [1] - [3], [6], [8], [17], [20], [24].

РОЗДІЛ 2

Методологія приведення обчислення дискретних гармонічних перетворень до циклічних згорток

2.1 Дійсні дискретні гармонічні перетворення та їх основні властивості

Теорія рядів Фур'є є частиною гармонічного аналізу. Починаючи з середини XIX століття, на основі гармонічного аналізу розроблено практичні методи вивчення багатьох феноменологічних явищ, наприклад, таких, як звук.

Нехай $x(n)$ – періодична послідовність із періодом NT (період – N відліків), тобто $x(n) = x(n + mNT)$, де m – ціле. ДПФ називають пару взаємооднозначних перетворень вигляду [125]:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi kn\Omega T), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.1)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j2\pi kn\Omega T), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.2)$$

де $\Omega = 2\pi/(NT)$ – основна частота перетворення (бін ДПФ). Виконуючи підстановку Ω , отримуємо $e^{-jknT(2\pi/NT)} = e^{-j2\pi kn/N}$.

Застосовуючи позначення $W_N = e^{-j2\pi/N}$, записують перетворення у формі:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.3)$$

$$x(n) = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.4)$$

де вираз (2.3) визначає пряме ДПФ, а (2.4) – зворотне ДПФ.

Дискретне перетворення Фур'є $X(k)$, як і сама послідовність $x(n)$, є періодичною функцією за аргументом k з періодом N , адже $W_N^{kn} = W_N^{(k+mN)n}$, де m – ціле. ДПФ може бути використано й для представлення послідовності $x(n)$ довжини N , визначеної для $n=0, 1, \dots, N-1$ і рівної нулю поза інтервалом $[0, N-1]$. Дійсно, таку послідовність можна розглядати як один період відповідної

періодичної послідовності й використати перетворення (2.3, 2.4). Варто тільки вважати, що поза інтервалом $[0, N - 1]$ послідовності $X(k)$ і $x(n)$ дорівнюють нулю. Взаємозв'язок між спектральним представленням скінченного дискретного сигналу і ДПФ цього ж сигналу полягає у тому, що ДПФ фактично являє собою N відліків спектра, узятих на періоді з інтервалом дискретизації за частотою, що дорівнює біну $\Omega=2\pi/(NT)$ [126].

Тобто, періодичний сигнал містить незалежну від часу сталу складову та нескінченний набір гармонічних коливань, *гармонік* (синусні та косинусні тригонометричні функції). Набір гармонік називають спектром.

В 1965 році Кулі і Тюкі запропонували швидкий метод обчислення ДПФ [3], який включено в першу десятку алгоритмів ХХ століття [127]. Це ефективне обчислення ДПФ в комп'ютерних системах стало початком розвитку дискретного гармонічного аналізу як самостійної дисципліни [128].

Альтернативою до обчислення дискретного перетворення Фур'є над комплексними числами стали перетворення з *дійсним гармонічним базисом*. Гармонічний базис – це узагальнений термін, що охоплює широкий клас дійсних ортогональних перетворень. Використовують терміни “дискретні тригонометричні перетворення”, “синусоїдальні перетворення”, “ортогональні тригонометричні перетворення” (ОТП) [96]. У роботі [129] до ДТП зараховують 8 різних видів ДКП і ДСП. В роботах [130], [131] вважають, що ДТП є більшим класом перетворень, що включає ДПФ, ДКП, ДСП, ДПХ. В інших роботах [33], [132], [133] використовують термін – “синусоїдальні перетворення”. “Добре відоме перетворення Карунена-Лоєва, різні види ДКП і ДСП (дискретні тригонометричні перетворення), загальне дискретне перетворення Фур'є, загальне дискретне перетворення Хартлі або еквівалентно загальне дискретне W перетворення є членами класу дискретних синусоїдальних перетворень” [132]. У книзі [134] стверджують, що ДТП також є в складі синусоїдальних перетворень. У роботі [33] зазначено, що до сімейства дискретних синусоїдальних перетворень відносять перетворення Карунена-Лоєва, ДПФ, ДТП, ДПХ, дискретне W перетворення.

Значне місце в обробці даних зайняли дійсні ДКП, ДСП, ДПХ та їхні види, які називатимемо *дискретними гармонічними перетвореннями* скорочено ДГП.

Альтернативою ДПФ є перетворення над областю дійсних чисел, яке запропонував американський вчений Р. В. Л. Хартлі в 1942 році. В роботі [135] було вказано можливість виконання взаємних інтегральних перетворень, в яких всі операції виконувались з дійсними числами без використання комплексних величин. Наприклад, перетворення Фур'є дійсної функції $f(t)$ має вигляд

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi ut) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi ut) dt = A(u) - i B(u) \quad (2.5)$$

Тоді зворотне перетворення Фур'є

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi ut) A(u) du + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi ut) B(u) du + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi ut) A(u) du - i \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi ut) B(u) du. \quad (2.6)$$

За визначенням (2.5), функція $A(u)$ – парна, а $B(u)$ – непарна. Тому, дві останні складові рівні 0. Далі, запишемо, що

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi ut) (A(u) + B(u)) du + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi ut) (A(u) + B(u)) du = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (A(u) + B(u)) [\cos(2\pi ut) + \sin(2\pi ut)] du, \end{aligned} \quad (2.7)$$

тобто, пряме перетворення Хартлі зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} H(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi ut) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi ut) dt = \\ &= A(u) + B(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos(2\pi ut) + \sin(2\pi ut)] dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

і зворотне (2.7) перетворення Хартлі взаємно симетричні.

Дискретне перетворення Хартлі [31] обсягу N , що визначаються за формулою

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \operatorname{cas}(nk \frac{2\pi}{N}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.9)$$

де $x(n)$ $n=0, 1, \dots, N-1$ вхідні та $X(k)$ $k=0, 1, \dots, N-1$ вихідні значення.

Зворотне дискретне перетворення Хартлі визначається за формулою

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \text{cas}(nk \frac{2\pi}{N}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.10)$$

Особливістю даного перетворення є його дійсна базисна функція, що в дискретній формі має вигляд

$$\text{cas}(2\pi kn/N) = \cos(2\pi kn/N) + \sin(2\pi kn/N). \quad (2.11)$$

Область значення функції $-\sqrt{2} < \text{cas}(2\pi t) < +\sqrt{2}$, ($n, k=0, 1 \dots N-1$). Перша і остання букви в “cas” вказують на те, що береться сума функцій \cos і \sin . Графічне зображення функції $\text{cas}(2\pi t)$ базису ДПХ наведено на рис. 2.1.

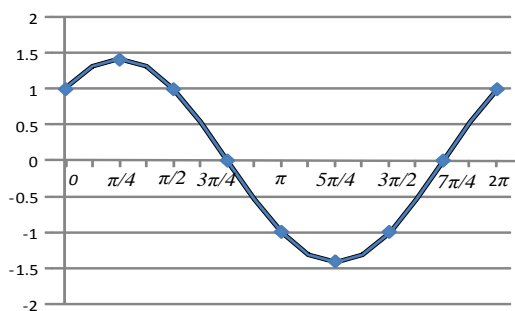


Рисунок 2.1 – Графік функції $\text{cas}(2\pi t)$ базису ДПХ

У 1974 році в роботі [32] вперше розглянуто дискретне косинусне перетворення, дійсний базис якого відтворює функціональні в просторі або часі залежності аналогічно до ДПФ. Пряме ДКП описується формулою

$$Y(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cos\left[\frac{(2k+1)n\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.12)$$

Зворотним ДКП називають подання дійсної функції $x(k)$ у вигляді суми гармонік, що описується формулою

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} Y(n) \cos\left[\frac{(2k+1)n\pi}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.13)$$

Дискретне синусне перетворення запропоновано в роботі [136] і описується формулою

$$Y(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sin\left[\frac{(2k+1)n\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.14)$$

ЗДСП описується формулою

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} Y(n) \sin\left[\frac{(2k+1)n\pi}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.15)$$

Сукупність ДКП і ДСП також називають дискретними тригонометричними перетвореннями. Міжнародні організації стандартизації (ISO/IEC та ITU-T) нормують застосування різних форм дискретного косинусного/синусного перетворення, до яких входять всі 16 видів ДКП I-VIII і ДСП I-VIII, а ДПХ має 4 види. Наведені формули (2.12-2.15) відповідають ДКП-II, -III і ДСП-II, -III.

Властивості дійсних гармонічних перетворень відповідають властивостям перетворення класу Фур'є [90], [137]. Перечислимо основні з них: ортогональність [78], унітарність, лінійність, масштабованість, зміщуваність, сепарабельність, енергозбереженість.

Властивість згортки для ДТП визначається виразом

$$T1\{x \otimes y\} = T2\{x\} \times T3\{y\}, \quad (2.16)$$

де $T1$, $T2$ і $T3$ є перетворення, що можуть бути не того самого типу ; \otimes – визначає операцію згортки.

Відповідність теореми згортки з використанням ДПФ має свої особливості відносно використання ДТП. У роботі [129] послідовності згортки симетрично розширюються до розміру $2N$ або $2N-1$ та виконується над ними циклічна згортка, відповідно з використанням ДПФ. Визначені вихідні значення відбираються в кількості N компонент. Вісь симетрії дискретних вибірок при розширенні до розміру $2N$ або $2N-1$ може бути на вибірці (парна кількість) або між двома вибірками, що відповідає зсуву на половину інтервалу дискретизації. Це дає різні варіанти перетворення відповідно до крайових умов дійсних вхідних даних.

Продовження дійсних вхідних даних може розширюватись (рис. 2.2) відповідно до правил WS, WA, HS, HA.

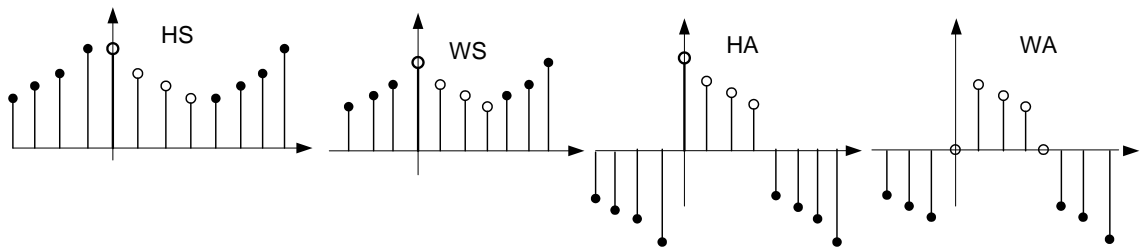


Рисунок 2.2 – Варіанти розширення HS, WS, HA,WA вхідної послідовності

Існує тільки дві осі симетрії для обмеженої послідовності [129] і, відповідно, можливий набір варіантів розширень ε , що відповідає 8 видам ДКП (табл. 2.1) та 8 видам ДСП (табл. 2.2)

Таблиця 2.1– Варіанти ε -видів розширення ДКП

ε	WSWS	HSHS	WSWA	HSHA	WSHS	HSWS	WSHA	HSWA
ДКП	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

Таблиця 2.2 – Варіанти ε -видів розширення ДСП

ε	WAWA	HANA	WAWS	HANS	WANA	HAWA	WANS	HAWS
ДСП	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

Зустрічаються терміни “парне ДСП”, до якого входять ДСП-I,II,III,IV та “непарне ДСП” до якого входять ДСП-V,VI,VII,VIII.

За наведеними властивостями ДКП та ДСП відповідають властивостям загального ДПФ [23], загального ДПХ [35] або еквівалентні загальному дискретному W перетворенню [138] для дійсних значень даних [139]. Таким чином, властивості ДГП роблять їх важливим компонентом при дослідженні та застосуванні в багатьох прикладних завдань, що потребують ефективних методів їх реалізації.

2.2 Аналіз дійсної базисної матриці ДГП як алгебраїчної структури

У побудові узагальнених схем алгоритмів ефективного обчислення ДГП використовується властивість лінійності дискретних перетворень вхідних даних. Розроблення багатьох відомих швидких алгоритмів передбачає алгебраїчні перетворення вхідних виразів. Також для розроблення швидких алгоритмів використовують прямий метод, що ґрунтується на властивостях матриці базису перетворення, і побічний (непрямий) метод, в якому задіяно швидкі алгоритми інших перетворень [140].

Сучасні дослідження та узагальнення алгоритмів швидких дискретних перетворень класу Фур'є розглядаються в рамках теорії алгебраїчних систем. Одним з перспективних напрямів дослідження теорії швидких алгоритмів є Фур'є-аналіз на групах, який є обширним класом дискретних перетворень [141]. Математично перетворення класу Фур'є – це множення матриці W на вектор, де $x \in F^n$ дискретний сигнал, а $W \in F^{n \times n}$ – матриця перетворення над полем F , що відповідає полю комплексних чисел.

ДПФ (обсягу n) можна визначити в алгебраїчних термінах як матрицю розкладу групової алгебри $C[Zn]$ циклічної групи Zn з n елементів [141], [142]. Узагальнення на випадок довільної скінченної групи приводить до “Фур'є-аналізу на групах”, який відтворює широкий клас перетворень та теорію одержання швидких алгоритмів для них.

ДГП описуються в матричній формі виразом:

$$X = W x, \quad (2.17)$$

де $x = [x(1), x(2), \dots, x(N-1)]^T$, $X = [X(1), X(2), \dots, X(N-1)]^T$ – матриці стовпці вхідних та вихідних даних, $W = [w(i,j)]$ – квадратна $(N-1)(N-1)$ базисна матриця.

У роботі [143] розглянуто узагальнений алгоритм, що виділяє структури в ядрі перетворення ДКП, які реалізуються на основі швидких алгоритмів циклічної згортки. За алгоритмом базис ДКП поділяється на підматриці, котрі зсувами рядків та стовпців зводяться до таблиць операцій груп або частин з них, що є переважно Абелевими групами. Тобто, розроблення алгоритму ґрунтується

на Абелевих групах додатних цілих взаємно простих N та менше N над операцією множення за модулем цілого N . Група і групова операція позначені як $A(N, *)$. В роботі [143] приведена *Теорема 1*, що відповідає загальному визначенню ДКП за циклічними згортками над послідовностями, що формуються за певним правилом. Однак, формування циклічних підмасивів у структурі базису ядра перетворення пов'язано зі значним числом елементів та ступенів переіндексації i , відповідно, ускладнюють побудову алгоритму обчислення.

2.2.1 Аналіз сформованих алгебраїчних структур для простого обсягу перетворення

Для розроблення узагальненої методології синтезу алгоритмів ДГП на основі циклічних згорток важливим питанням є обґрунтування можливості формування базисної матриці у вигляді ганкелевої чи теплицевої або у вигляді набору цих циклічних матриць. Сучасні дослідження швидких дискретних перетворень класу Фур'є розглядаються в рамках теорії алгебр [81]. Для цього проаналізуємо алгебраїчну систему, що містить множину аргументів базисних функцій дійсних ДГП. Всі елементи базисних матриць ДГП є синусами $\sin(r\pi)$ або косинусами $\cos(r\pi)$ чи їхніми об'єднаннями, де r – деяке раціональне число. Таким чином, ці числа у всіх позиціях базисної матриці аргументів – елементи відповідного поля раціональних чисел.

Виділимо значення цілочисельних аргументів гармонічних функцій без врахування значень π . Детальний аналіз цілочисельних аргументів $a_{n,k}$ дискретної базисної функції $w(\psi(n,k))$ дійсних перетворень показує, що дискретні гармонічні базисні функції $w(a_{n,k} \pi/P)$ періодичні відповідно до конкретного виду перетворення [144], [145]. У табл. 2.3 ці залежності періодичності подано як алгебраїчну операцію множення за модулем для цілочисельних аргументів $a_{n,k}$ базисних функцій.

Таблиця 2.3 – Залежності періодичності цілочисельних аргументів $a_{n,k}$ базисних функцій

Клас\Вид	I	II	III	IV
ДКП, $a_{n,k}$	$(k n)$ $mod(2N)$	$k(2n+1)$ $mod(4N)$	$(2k+1)n$ $mod(4N)$	$(2k+1)(2n+1)$ $mod(8N)$
ДСП, $a_{n,k}$	$(k+1)(n+1)$ $mod(2N)$	$(k+1)(2n+1)$ $mod(4N)$	$(2k+1)(n+1)$ $mod(4N)$	$(2k+1)(2n+1)$ $mod(8N)$
ДПХ, $a_{n,k}$	$(k n)$ $mod(N)$	$k(2n+1)$ $mod(2N)$	$(2k+1)n$ $mod(2N)$	$(2k+1)(2n+1)$ $mod(4N)$

Елементи a_{kn} матриці аргументів функції базису порядку $(N \times N)$ для $k=0,1,2,\dots, N-1$ рядка та $n=0,1,2,\dots, N-1$ стовпця – цілочисельні значення, не більші ніж значення за модулем P . Одержуємо двовимірну матрицю цілочисельних елементів, що належать множині $a_{kn} \in (1,2,\dots, P-1)$. На перетині рядка k та стовпця n (табл. 2.4) знаходиться результат композиції $\psi(k,n)=a_{kn}$ для аргументу базисної функції ДГП.

Тобто, матрицю значень аргументів ДГП можна подати (табл. 2.4) у вигляді таблиці Келі для алгебраїчної операції (2.18) множення за модулем P (для ДГП період може набувати значень $P=N, 2N, 4N, 8N$),

$$a_{kn} = (k \times n) \bmod (P). \quad (2.18)$$

Таблиця 2.4 – Табличне задання алгебраїчної операції $(k \times n) \bmod (P)$

$k \setminus n$	1	2	3	...	P-1
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	$a_{1(N-1)}$
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	$a_{2(N-1)}$
...
P-1	$a_{(N-1)1}$	$a_{(N-1)2}$	$a_{(N-1)3}$...	$a_{(N-1)(N-1)}$

Приклад табличного задання (табл. 2.5) алгебраїчної операції множення за модулем для ДПХ-I обсягом $N=11$, результати якої є множиною $\{1,2,\dots,N-1\}$

значень аргументів базисної функції й мультиплікативна операція визначається без 0 аргумента.

Таблиця 2.5 – Табличне задання алгебраїчної операції ($a_{kn} = (k \times n) \bmod 11$)

*	1:	2:	3:	4:	5:	6:	7:	8:	9:	10:
1:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2:	2	4	6	8	10	3	5	7	1	9
3:	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4:	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5:	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6:	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7:	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8:	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9:	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10:	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Одержані квадратні матриці аргументів функцій базису гармонічного перетворення містять $(N-1)$ кожного з елементів множини $\{1,2,\dots, (N-1)\}$, за алгебраїчною операцією (2.18) елементи матриці симетричні відносно головної (комутативність алгебраїчної операції) та бічної діагоналей. Крім цього, сума значень аргументів дорівнює N відносно осей середини вертикалі ($a_{ik} + a_{(N-i)k} = N$) та горизонталі ($a_{ki} + a_{k(N-i)} = N$), крім елементів, що дорівнюють нулю.

Отже, значення аргументів базисної матриці ДГП відповідають заданій множині $\{1,2,\dots, (P-1)\}$ елементів та визначаються на основі $*$ – операції множення за модулем, задаючи *алгебраїчну структуру* $\langle N-1,* \rangle$.

Проаналізуємо $\langle N-1,* \rangle$ із заданою множиною елементів $\{1,2,\dots,N-1\}$ та операцією множення за модулем на відповідність до часткових випадків алгебраїчних структур для конкретних значень обсягів перетворень.

У випадку N – *простого числа* в системі $\langle N,* \rangle$, операція має властивості:

а) *комутативності*, для довільних елементів a, b з множини N виконується рівність $a*b = b*a$. Приклад властивості комутативності $a_{69} * a_{88} = a_{88} * a_{69} = 2$; для системи $\langle 11,* \rangle$ на основі операції множення за модулем 11 над множиною елементів $a_{ij} = \{1,2,\dots,10\}$ з табл. 2.5;

б) *асоціативності* для довільних елементів a, b, c з множини N виконується рівність $(a*b)*c=a*(b*c)$. Приклад властивості асоціативності $(a_{57}*a_{16})*a_{92}=(2*6)*7=7$; $a_{57}*(a_{16}*a_{92})=2*(6*7)=7$; для системи $\langle 11,* \rangle$;

в) наявність *нейтрального елемента* множини N відносно операції $a*e = a$, тобто $(a_{ij} \cdot e) \bmod N = a_{ij}$. Приклад властивості наявності нейтрального елемента $e = a_{11}=1$ для системи $\langle 11,* \rangle$, де для $a_{57}=2$ $(1 \times a_{57}) \bmod 11 = (a_{57} \times 1) \bmod 11 = 2$. Нейтральний елемент відносно операції множення ще називають e одиничним елементом або одиницею групи.

г) наявність *оберненого елемента* a^{-1} для довільних елементів з множини N , $a * a^{-1} = e$. Приклад властивості наявності *оберненого елемента* для системи $\langle 11,* \rangle$, де елементи 2, 3, 5, 7, 10 мають обернені 6, 4, 9, 8, 10 відповідно, оскільки $(2*6) = (3*4) = (5*9) = (7*8) = (10*10) = 1$.

Натуральний степінь a^n елемента a групи за операцією множення за модулем визначається: $a^n = e$, $a^n = a*a*...*a$ для $n \in (N-1) \setminus \{0\}$.

Отже, значення аргументів базисної матриці ДГП для *простого обсягу* та операцією множення за модулем відповідають *абелевій групі*. Адже система аргументів $\langle N-1,* \rangle$ є непорожньою множиною з бінарною операцією, причому, бінарна операція комутативна та асоціативна, наявний нейтральний елемент і кожен елемент групи має обернений йому елемент відносно бінарної операції. Системи з заданою операцією множення за модулем на множині елементів, коли порядок N – просте число, є *циклічними групами*, причому таблиця операцій є *ганкелевий циркулянт* [146], [147].

Відповідно, для циклічної групи G її елементи можна подати у вигляді натуральних степенів деякого елемента $\alpha \in G$, який називають *примітивним* (породжуючим). Елемент α циклічної групи – *не єдиний* примітивний елемент. Примітивним також є елемент α^{N-1} , де N – порядок циклічної групи.

Для визначення примітивного елемента застосовують мінімальне додатне число w , що називається мультиплікативним *порядком елемента* α_j циклічної групи, для якого $\alpha_j^w = a_1$.

Якщо x – складене число ($x=N-1$, операція визначається без 0 і табл. 2.4 операції має порядок $N-1$) то, відповідно *теоремі Лагранжа*: мультиплікативний порядок w кожного елемента a_j довільної скінченної групи, а не тільки циклічної, є дільником порядку групи x . Тобто, порядок w кожного елемента a_j , крім a_1 , дорівнює $w = x/\eta_j$, де η_j – найбільший спільний дільник НСД $[x, j-1]$.

Розглянемо *циклічні групи* G з порядком N , що дорівнює простому числу, елементами якої є результати операції (2.32). Наприклад, для обсягу перетворення $N=11$, де мультиплікативна операція визначається без 0, таблиця операції має порядок 10. Тобто, при $x=10$ отримуємо

$$\begin{aligned} \text{НСД } [x=10, j-1=1] &= 1 = \eta_2; & w(a_2) &= x/\eta_2 = 10/1 = 10; \\ \text{НСД } [x=10, j-1=2] &= 2 = \eta_3; & w(a_3) &= x/\eta_3 = 10/2 = 5; \\ \text{НСД } [x=10, j-1=3] &= 1 = \eta_4; & w(a_4) &= x/\eta_4 = 10/1 = 10; \\ \text{НСД } [x=10, j-1=4] &= 2 = \eta_5; & w(a_5) &= x/\eta_5 = 10/2 = 5; \\ \text{НСД } [x=10, j-1=5] &= 5 = \eta_6; & w(a_6) &= x/\eta_6 = 10/5 = 2; \\ \text{НСД } [x=10, j-1=6] &= 2 = \eta_7; & w(a_7) &= x/\eta_7 = 10/2 = 5; \\ \text{НСД } [x=10, j-1=7] &= 1 = \eta_8; & w(a_8) &= x/\eta_8 = 10/1 = 10; \\ \text{НСД } [x=10, j-1=8] &= 2 = \eta_9; & w(a_9) &= x/\eta_9 = 10/2 = 5; \\ \text{НСД } [x=10, j-1=9] &= 1 = \eta_{10}; & w(a_{10}) &= x/\eta_{10} = 10/1 = 10. \end{aligned}$$

Елементи $\alpha=a_2, \alpha=a_4, \alpha=a_8, \alpha=a_{10}$ – *примітивні* елементи циклічної групи, адже $\alpha_j^w = \alpha_j^{N-1} = \alpha_j^{10}$ (не єдиний примітивний елемент даної циклічної групи, бо α^{N-1} також примітивний). Тобто, всі елементи циклічної групи можуть бути подані степенями примітивних елементів $\alpha=a_2$ або $\alpha=a_x$, для $x=10$ і a_4, a_8 також.

Відповідно, мультиплікативні *порядки* елементів a_2 та a_x ($a_1 = a_2^{10}, a_1 = a_{10}^{10}$) дорівнюють $w=10$ – порядку (числу елементів) циклічної групи, заданої для ДПХ-I обсягом $N=11$ з алгебраїчною операцією множення за модулем $N=11$.

Мультиплікативні *порядки непримітивних* елементів $a_3; a_5; a_6; a_7; a_9$ будуть $w(a_6) = 2; w(a_3) = w(a_5) = w(a_7) = w(a_9) = 5$. Тобто, степені порядків непримітивних елементів у результаті обчислення дають a_1 :

$$a_3^5 = a_1; a_5^5 = a_1; a_6^2 = a_1; a_7^5 = a_1; a_9^5 = a_1.$$

Всі елементи циклічної групи можуть бути подані степенями примітивних елементів a_2 або a_x . Наприклад, для a_2 або a_x , де $x=6$ отримуємо всі елементи циклічної групи

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2^6; \mathbf{a_2} = \mathbf{a_2^1}; a_3 = a_2^2; a_4 = a_2^3; a_5 = a_2^4; a_6 = a_2^5; \\ a_1 &= a_6^6; a_2 = a_6^5; a_3 = a_6^4; a_4 = a_6^3; a_5 = a_6^2; \mathbf{a_6} = \mathbf{a_6^1}. \end{aligned}$$

Відповідно до роботи Рейдера [43], кожен елемент $\alpha_j \in K$ тоді і тільки тоді є примітивним, якщо задовольняється умова

$$\alpha_j^n \bmod N = 1, n = \max \varphi(N), \quad (2.19)$$

де $\varphi(N)$ - функція Ейлера. Кількість *примітивних* елементів циклічної групи порядку N можна визначити за $\varphi(N)$ *функцією Ейлера*, яка дорівнює кількості всіх натуральних чисел між 1 та N і взаємно простих з N [148]. Для p – просте число функція Ейлера дорівнює

$$\varphi(p) = (p-1). \quad (2.20)$$

Наприклад, якщо кількість примітивних елементів циклічної групи, порядку 10, то $\varphi(10) = \varphi(2) * \varphi(5) = 1 * 4 = 4$.

Тобто, для ДПХ-I обсягу $N=11$, відповідно до умови (2.33), відповідають примітивні елементи $a_2=2$, $a_4=8$, $a_8=7$, $a_{10}=6$. Проведемо генерацію послідовності елементів за примітивними елементами циклічної групи:

1) для примітивного елемента $\alpha = 2$, генерування послідовності елементів:
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} = 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1$ ($\alpha^i = a_2^i = 2^i, i=1,2,\dots,10$);
 $a_2=2^1=2; a_3=2^2=4; a_4=2^3=8; a_5=2^4=5; a_6=2^5=10; a_7=2^6=9; a_8=2^7=7; a_9=2^8=3; a_{10}=2^9=6;$
 $a_1=2^{10}=1;$

2) для примітивного елемента $\alpha^{x-1}=2^9=6$, генерування послідовності елементів:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} = 6, 3, 7, 9, 10, 5, 8, 4, 2, 1$, ($\alpha^i = a_{10}^i = 6^i, i=1,2,\dots,10$);
 $a_1=6^1=6; a_2=6^2=3; a_3=6^3=7; a_4=6^4=9; a_5=6^5=10; a_6=6^6=5; a_7=6^7=8; a_8=6^8=4; a_9=6^9=2;$
 $a_{10}=6^{10}=1;$

3) для примітивного елемента $\alpha = 7$, генерування послідовності елементів:
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} = 7, 5, 2, 3, 10, 4, 6, 9, 8, 1$ ($\alpha^i = a_8^i = 7^i, i=1,2,\dots,10$);

$$a_1=7^1=7; a_2=7^2=5; a_3=7^3=2; a_4=7^4=3; a_5=7^5=10; a_6=7^6=4; a_7=7^7=6; a_8=7^8=9; a_9=7^9=8; a_{10}=7^{10}=1;$$

4) для примітивного елемента $\alpha = 8$, генерування послідовності елементів:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} = 8, 9, 6, 4, 10, 3, 2, 5, 7, 1 (\alpha^i = a_4^i = 8^i, i=1,2,\dots,10);$$

$$a_1=8^1=8; a_2=8^2=9; a_3=8^3=6; a_4=8^4=4; a_5=8^5=10; a_6=8^6=3; a_7=8^7=2; a_8=8^8=5; a_9=8^9=7; a_{10}=8^{10}=1;$$

Непримітивні елементи $a_3=4; a_5=5; a_6=10; a_7=9; a_9=3$ циклічної групи заданої для ДПХ-I обсягом $N=11$:

$$a_3^5 = a_1; a_5^5 = a_1; a_6^2 = a_1; a_7^5 = a_1; a_9^5 = a_1; \text{ (непримітивні елементи)}$$

$$4^5=1; 5^5=1; 10^2=1; 9^5=1; 3^5=1; \text{ (непримітивні елементи)}$$

виконують генерування не всіх елементів групи ($i=1,2,\dots,4$):

$$\alpha = 3, \alpha^i = 9, 5, 4, 1, (1,3,9,5,4) \text{ доповнюючи } [2*(1, 3, 9, 5, 4) \bmod 11] = (2,6,7,10,8);$$

$$\alpha = 4, \alpha^i = 5, 9, 3, 1, (1,4,5,9,3) \text{ доповнюючи } [2*(1, 4, 5, 9, 3) \bmod 11] = (2,8,10,7,6);$$

$$\alpha = 5, \alpha^i = 3, 4, 9, 1, (1,5,3,4,9) \text{ доповнюючи } [2*(1, 5, 3, 4, 9) \bmod 11] = (2,10,6,8,7);$$

$$\alpha = 9, \alpha^i = 4, 3, 5, 1, (1,9,4,3,5) \text{ доповнюючи } [2*(1, 9, 4, 3, 5) \bmod 11] = (2,7,8,6,10);$$

$$\alpha = 10, \alpha^i = 1, 10, (1,10) \text{ доповнюючи } 2*(1, 10) \bmod 11 = (2, 9), 2*(2, 9) \bmod 11 = (4,7), 2*(4, 7) \bmod 11 = (8, 3), 2*(8, 3) \bmod 11 = (5,6); \text{ елементи групи рівні } (1, 10) (2, 9) (4, 7) (8, 3) (5, 6).$$

Отже, при генеруванні за непримітивними елементами решту елементів групи можна отримати, домножуючи отриману множину на два за модулем N .

Щоб сформувати базисну матрицю аргументів функцій i , відповідно, саме базисну матрицю ДПХ-I обсягу $N=11$ у вигляді ганкелевої матриці, необхідно переставити рядки та стовпці за послідовністю елементів, які згенеровані степенями примітивних елементів:

$$(1,2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6); (1, 6, 3, 7, 9, 10, 5, 8, 4, 2);$$

$$(1, 7, 5, 2, 3, 10, 4, 6, 9, 8); (1, 8, 9, 6, 4, 10, 3, 2, 5, 7) \text{ набір з 10 точок;}$$

або за непримітивними елементами:

$$(1, 3, 9, 5, 4)(2, 6, 7, 10, 8); (1, 4, 5, 9, 3)(2, 8, 10, 7, 6);$$

$$(1, 5, 3, 4, 9)(2, 10, 6, 8, 7); (1, 9, 4, 3, 5)(2, 7, 8, 6, 10) \text{ набір з 5 точок;}$$

$$(1\ 10)(2\ 9)(3\ 8)(4\ 7)(5\ 6) \text{ набір з 2 точок.}$$

Розглянемо рядки матриці значень аргументів базису як *підстановки* відносно першого рядка, що відповідає послідовності натурального ряду. Аналізуючи ганкелеву матрицю значень аргументів базису ДГП для простого обсягу, кожен рядок (стовпець) матриці a_i , $i \in \{1, 2, \dots, x\}$ можна трактувати як *підстановку* π_i відносно крайнього верхнього рядка (крайнього лівого стовпця):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1x-1} & a_{1x} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2x-1} & a_{2x} & a_{21} \end{pmatrix} \equiv \psi_2(a_i) \text{ формування елементів другого рядка за}$$

підстановкою ψ_2 ;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1x-1} & a_{1x} \\ a_{33} & \dots & a_{3x-1} & a_{3x} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \equiv \psi_3(a_i) \text{ формування елементів третього рядка за}$$

підстановкою ψ_3 ;

$$\begin{pmatrix} \dots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1x-1} & a_{1x} \\ a_{xx} & a_{x1} & \dots & a_{xx-3} & a_{xx-2} & a_{xx-1} \end{pmatrix} \equiv \psi_x(a_i) \text{ формування елементів } x\text{-го рядка за}$$

підстановкою ψ_x .

Аналогічно перший рядок і перший стовпець можна розглядати як одиничні підстановки (так звані тотожні підстановки) і позначати $\psi_1(a_i) = ()$ – *тотожня* підстановка містить всі фіксовані елементи.

Сукупність підстановок $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \dots, \psi_x\}$ та \circ – операція підстановки утворюють *алгебраїчну структуру* $\langle X-1, \circ \rangle$. У випадку, коли система $\langle X-1, \circ \rangle$ є непорожньою множиною з порядком $x=N$ – просте число, з бінарною операцією, причому бінарна операція комутативна та асоціативна, наявний нейтральний елемент ψ_1 і кожен елемент групи має обернений йому елемент ψ^{-1} відносно бінарної операції, тоді $\langle X-1, \circ \rangle$ є *циклічною групою* G_c .

Наприклад, для ДПХ-I обсягу $N=11$, де мультиплікативна операція визначається без 0, таблиця операції має порядок 10, кожен рядок (стовпець) матриці (табл. 2.5) a_i , $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ можна трактувати як *підстановку* відносно самого верхнього рядка (крайнього лівого стовпця):

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} & \Psi_9 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 4 & 7 & 10 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \\ \Psi_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 \end{pmatrix} & \Psi_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 4 & 9 & 3 & 8 & 2 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ \Psi_{10} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 5 \end{pmatrix} & \Psi_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 3 & 10 & 6 & 2 & 9 & 5 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\ \Psi_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 2 & 10 & 7 & 4 & 1 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} & \Psi_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 11 & 0 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \Psi_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \Psi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що підстановку відносно крайнього верхнього рядка всіх решти рядків створює *повний набір* підстановок, що перекриває підстановки відносно будь-яких інших рядків.

Алгебраїчна структура $\langle \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \dots, \Psi_{10}, \circ \rangle$ відповідає циклічній групі G_{10} . Адже, відповідно до теореми Келі, будь-яка скінченна група $\langle N, * \rangle$ ізоморфна підгрупі симетричної групи $\langle \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \dots, \Psi_{10}, \circ \rangle$ підстановок. Відповідно, кількість і нумерація породжуючих (примітивних) і непримітивних елементів як для цілочисельної групи, так і групи підстановок збігаються. Адже, взаємно однозначне відображення:

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\} \xleftarrow{f} \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \dots, \Psi_9, \Psi_{10}\},$$

зберігає операцію $f(a_i * a_j) = f(a_i) \circ f(a_j)$. Наприклад,

$$f(a_1) = f(a_2) \circ f(a_6) \sim \Psi_2 \circ \Psi_6 = \Psi_1; \quad f(a_4) = f(a_7) \circ f(a_{10}) \sim \Psi_7 \circ \Psi_{10} = \Psi_4.$$

Примітивними (породжуючими) елементами підстановок є $\Psi_2, \Psi_{10}, \Psi_4, \Psi_8$. Всі решта підстановок можна подати як степені циклічних підстановок.

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 2 & 10 & 7 & 4 & 1 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}; & \Psi_4^{10} &= \Psi_1; \\ \Psi_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 3 & 10 & 6 & 2 & 9 & 5 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}; & \Psi_8^{10} &= \Psi_1. \end{aligned}$$

Наприклад, підстановка ψ_2 є циклічною зліва, тобто нижній рядок відносно верхнього у підстановці формується круговим зсувом вліво. Решта підстановок подані як степені циклічних підстановок $\psi_2^2 = \psi_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\psi_2^3 = \psi_4; \quad \psi_2^4 = \psi_5; \quad \psi_2^5 = \psi_6; \quad \psi_2^6 = \psi_7; \quad \psi_2^7 = \psi_8; \quad \psi_2^8 = \psi_9; \quad \psi_2^9 = \psi_{10}; \quad \psi_2^{10} = \psi_1;$$

$$\psi_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\psi_{10}^2 = \psi_9; \quad \psi_{10}^3 = \psi_8; \quad \psi_{10}^4 = \psi_7; \quad \psi_{10}^5 = \psi_6; \quad \psi_{10}^6 = \psi_5; \quad \psi_{10}^7 = \psi_4; \quad \psi_{10}^8 = \psi_3; \quad \psi_{10}^9 = \psi_2; \quad \psi_{10}^{10} = \psi_1;$$

Непримітивні елементи підстановок є ($\psi_3, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_9$). Наприклад, підстановка ψ_9

$$\psi_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 4 & 7 & 10 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}; \quad \psi_9^2 = \psi_7; \quad \psi_9^3 = \psi_5; \quad \psi_9^4 = \psi_3; \quad \psi_9^5 = \psi_1.$$

Отже, аналіз матриці цілочисельних аргументів функцій базису ДГП для простого обсягу відносно операції підстановки показує, що сформована на основі її рядків/стовпців сукупність підстановок з бінарною операцією підстановки утворює циклічну групу. Відповідно, можна сформувати базисну матрицю аргументів функцій або саме базисну матрицю ДПХ-I обсягу $N=11$ у вигляді ганкелевої матриці.

Приклад формування ганкелевої матриці та блочно ганкелевої матриці значень аргументів базису ДГП для ДПХ-I обсягу $N=11$ у результаті переставлення рядків та стовпців за послідовністю елементів, які згенеровані степенями примітивного елемента $\alpha=2$ та непримітивного елемента $\alpha=3$

$\alpha = 2, (1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6);$

1	2	4	8	5	10	9	7	3	6
2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
4	8	5	10	9	7	3	6	1	2
8	5	10	9	7	3	6	1	2	4
5	10	9	7	3	6	1	2	4	8
10	9	7	3	6	1	2	4	8	5
9	7	3	6	1	2	4	8	5	10
7	3	6	1	2	4	8	5	10	9
3	6	1	2	4	8	5	10	9	7
6	1	2	4	8	5	10	9	7	3

 $\alpha = 3, \alpha^i = (1\ 3\ 9\ 5\ 4)(2\ 6\ 7\ 10\ 8);$

1	3	9	5	4	2	6	7	10	8
3	9	5	4	1	6	7	10	8	2
9	5	4	1	3	7	10	8	2	6
5	4	1	3	9	10	8	2	6	7
4	1	3	9	5	8	2	6	7	10
2	6	7	10	8	4	1	3	9	5
6	7	10	8	2	1	3	9	5	4
7	10	8	2	6	3	9	5	4	1
10	8	2	6	7	9	5	4	1	3
8	2	6	7	10	5	4	1	3	9

Однозначна відповідність послідовності згенерованої примітивним елементом $\alpha = 2, \alpha = 3$ та відповідної підстановки $\psi_2(a_i), \psi_9(a_i)$ відслідковується у випадку подання підстановки через циклічний розклад, наприклад:

 $\psi_2 = (1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6);$
 $\psi_9 = (1\ 3\ 9\ 5\ 4)(2\ 6\ 7\ 10\ 8);$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \psi_2(a_i),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 4 & 7 & 10 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \psi_9(a_i).$$

Подання підстановок компактніше описувати циклічним розкладом підстановки [149]. При генеруванні послідовності за примітивними елементами $\alpha = 2, 6, 7, 8$ та за примітивними елементами підстановки отримуємо однакові послідовності за циклічним розкладом:

(2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1) за підстановкою між 1 та 2 рядками;

(6, 3, 7, 9, 10, 5, 8, 4, 2, 1) за підстановкою між 1 та 6 рядками;

(7, 5, 2, 3, 10, 4, 6, 9, 8, 1) за підстановкою між 1 та 7 рядками;

(8, 9, 6, 4, 10, 3, 2, 5, 7, 1) за підстановкою між 1 та 8 рядками.

При генеруванні за непримітивними елементами підстановок отримаємо циклічні розклади підстановки за кількістю циклів рівною η_j (НСД). $\eta_j = 2, 5$.

Приклади циклічних розкладів підстановок для ДПХ-I обсягу $N=11$

(1, 3, 9, 5, 4)(2, 6, 7, 10, 8);

(1, 4, 5, 9, 3)(2, 8, 10, 7, 6);

(1, 5, 3, 4, 9)(2, 10, 6, 8, 7);

(1, 9, 4, 3, 5)(2, 7, 8, 6, 10);

(1 10)(2 9)(3 8)(4 7)(5 6).

На основі викладеного, базисну матрицю цілочисельних аргументів функцій ДГП простого обсягу можна сформулювати за допомогою *циклічного*

розкладу підстановок. Формувати ганкелеві базисні матриці аргументів функцій ДГП можна за примітивними підстановками та непримітивними підстановками на основі циклічного розкладу, що містить не один цикл. Формування базисної матриці ДГП у вигляді ганкелевої чи теплицевої або у вигляді набору цих циклічних матриць приводить до виконання циклічних згорток у процесі обчислення дійсних ДГП.

2.2.2 Аналіз сформованих алгебраїчних структур для складеного обсягу перетворення

Системи алгебри $\langle N, * \rangle$ із заданою множиною елементів та операцією множення за модулем N , якщо порядок N просте число, є *циклічними групами* G , причому таблиця операцій – це ганкелевий циркулянт. Одним з центральних питань теорії скінченних груп, порядок яких складене число, – це їх розклад у пряму суму інших циклічних груп меншого порядку [150]. Якщо обсяг ДГП перетворення N – *складене* число $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k$, то таблиця операцій складається з підматриць, де кожна з підматриць може бути ганкелевим циркулянтом. В одержаному табличному заданні операції множення за модулем, крім основної підматриці, є підматриці з множиною елементів, кратних N_i , розміщені вертикальними і горизонтальними лініями в базисній матриці. Результати операцій в табличному заданні операції множення за модулем відповідають квадратній матриці аргументів функцій базису ДГП.

Проаналізуємо алгебраїчні структури $\langle N=N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k, * \rangle$ з множиною елементів $\{1, 2, \dots, N-1\}$ та операцією $*$ – добутку за модулем N на відповідність до часткових випадків алгебр.

Наприклад, матриця аргументів функцій базису ДПХ-I для складеного обсягу $N=15$, $N=N_1 \cdot N_2=3 \cdot 5$ відповідає в табличному заданні (табл. 2.6) результатам операції (2.18). Одержані квадратні матриці аргументів функцій базису гармонічного перетворення містять елементи матриці, симетричні

відносно головної (комутативність алгебраїчної операції) та бічної діагоналей. Крім цього, сума значень аргументів дорівнює N відносно осей середини вертикалі ($a_{ik} + a_{(N-i)k} = N$) та горизонталі ($a_{ki} + a_{k(N-i)} = N$), крім елементів, що дорівнюють нулю.

Таблиця 2.6 – Табличне задання алгебраїчної операції ($a_{kn} = (k \times n) \bmod 15$)

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2:	2	4	6	8	10	12	14	1	3	5	7	9	11	13
3:	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12
4:	4	8	12	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11
5:	5	10	0	5	10	0	5	10	0	5	10	0	5	10
6:	6	12	3	9	0	6	12	3	9	0	6	12	3	9
7:	7	14	6	13	5	12	4	11	3	10	2	9	1	8
8:	8	1	9	2	10	3	11	4	12	5	13	6	14	7
9:	9	3	12	6	0	9	3	12	6	0	9	3	12	6
10:	10	5	0	10	5	0	10	5	0	10	5	0	10	5
11:	11	7	3	14	10	6	2	13	9	5	1	12	8	4
12:	12	9	6	3	0	12	9	6	3	0	12	9	6	3
13:	13	11	9	7	5	3	1	14	12	10	8	6	4	2
14:	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Основна підматриця (табл. 2.7) з матриці за табл. 2.6 для $N=N_1 \cdot N_2=3 \cdot 5$ містить $N'=8$ елементів $\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$, не кратних N_1, N_2 , що відповідають результатам алгебраїчної операції множення за модулем.

Таблиця 2.7 – Таблиця алгебраїчної операції множення за модулем $N=15$

*	1	2	4	7	8	11	13	14
1	1	2	4	7	8	11	13	14
2	2	4	8	14	1	7	11	13
4	4	8	1	13	2	14	7	11
7	7	14	13	4	11	2	1	8
8	8	1	2	11	4	13	14	7
11	11	7	14	2	13	1	8	4
13	13	11	7	1	14	8	4	2
14	14	13	11	8	7	4	2	1

Алгебраїчна система $\langle \{1,2,4,7,8,11,13,14\}, * \rangle$ не містить елементів кратних множникам обсягу перетворення N_i , і її бінарна операція (табл. 2.7) має властивості: комутативності, асоціативності, наявності нейтрального і оберненого елементів. Отже, підсистеми $\langle N', * \rangle$ з множиною N' елементів

основної підматриці – абелева група. Причому матриця в табл. 2.7 результатів операцій може бути у вигляді є ганкелевих або теплицевих циркулянтів.

Кількість і нумерація породжуючих (примітивних) і непримітивних елементів як для цілочисельної групи, так і групи підстановок збігаються. Виконаємо генерацію послідовності елементів основної підматриці за *непримітивними* елементами α (решта елементів послідовності визначаються множенням згенерованої послідовності на інший непарний або навпаки елемент):

$$\alpha=2, \alpha^i=4, 8, 2, 1; (1,2,4,8); 7*(1, 2, 4, 8)_{15}=(7,14,13,11); 13*(1,2,4,8)_{15}=(13,11,7,14);$$

$$\alpha=8, \alpha^i=4, 2, 8, 1; (1,8,4,2); 7*(1, 8, 4, 2)_{15}=(7,11,13,12); 13*(1,8,4,2)_{15}=(13,14,7,11);$$

$$\alpha=7, \alpha^i=4, 13, 7, 1; (1,7,4,13); 2*(1, 7, 4, 13)_{15}=(2,14,8,11); 8*(1,7,4,13)_{15}=(8,11,2,14);$$

$$\alpha=13, \alpha^i=4, 7, 13, 1; (1,13,4,7); 2*(1, 13, 4, 7)_{15}=(2,11,8,14); 8*(1,13,4,7)_{15}=(8,14,2,13).$$

Відповідно, матрицю (табл. 2.8) задання операції сформовано за генерацію елементом $\alpha =2$, що відповідає циклічному розкладу $(1, 2, 4, 8) (7, 14, 13, 11)$ підстановки ψ_2 (теорема Келі), складається з чотирьох ганкелевих підматриць, де

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 11 & 13 & 14 \\ 2 & 4 & 8 & 14 & 1 & 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 2.8 – Табличне задання операції $(k \times n) \bmod 15$

*	1	2	4	8	7	14	13	11
1	1	2	4	8	7	14	13	11
2	2	4	8	1	14	13	11	7
4	4	8	1	2	13	11	7	14
8	8	1	2	4	11	7	14	13
7	7	14	13	11	4	8	1	2
14	14	13	11	7	8	1	2	4
13	13	11	7	14	1	2	4	8
11	11	7	14	13	2	4	8	1

Генерація послідовності елементів групи за іншими *непримітивними* елементами α (решта елементів послідовності визначаються множенням згенерованої послідовності на інші елементи):

$$\alpha=4, \alpha^i=1, 4, (1, 4); 2*(1,4)_{15}=(2,8); 7*(1,4)_{15}=(7,13); 14*(1,4)_{15}=(14,11);$$

$$\text{або } 8*(1,4)_{15}=(8,2); 13*(1,4)_{15}=(13,7); 11*(1,4)_{15}=(11,14);$$

$\alpha = 11, \alpha^i = 1, 11, (1, 11); 2^*(1,11)_{15} = (2,7); 14^*(1,11)_{15} = (14,4); 7^*(1,11)_{15} = (7,2);$
 або $7^*(1,11)_{15} = (7,2); 4^*(1,11)_{15} = (4,14); 2^*(1,11)_{15} = (2,7);$
 $\alpha = 14, \alpha^i = 1, 14, (1, 14); 2^*(1,14)_{15} = (2,13); 4^*(1,14)_{15} = (4,11); 7^*(1,14)_{15} = (7,8);$
 або $13^*(1,14)_{15} = (13,2); 11^*(1,14)_{15} = (11,4); 8^*(1,14)_{15} = (8,7).$

Відповідно, матрицю задання операції сформовано у вигляді ганкелевих підматриць за $\alpha=4$, що відповідає циклічному розкладу $(1,4)(2,8)(7,13)(11,14)$, подана в табл. 2.9.

Таблиця 2.9 – Табличне задання операції $(k \times n) \bmod 15$

*	1	4	2	8	7	13	11	14
1	1	4	2	8	7	13	11	14
4	4	1	8	2	13	7	14	11
2	2	8	4	1	14	11	7	13
8	8	2	1	4	11	14	13	7
7	7	13	14	11	4	1	2	8
13	13	7	11	14	1	4	8	2
11	11	14	7	13	2	8	1	4
14	14	11	13	7	8	2	4	1

Тобто, якщо N – складене число, то для 3,5,6,9,10,12 (табл. 2.6) немає обернених елементів, а тільки є a^{-1} для взаємно простих з обсягом $N=15$. Відповідно, підсистеми $\langle \{N_i\}, * \rangle$ із заданою операцією на множині елементів, кратних $\{N_i\}$ та менших за N , не є групами.

Проаналізуємо підсистему $\langle \{N_1-1\}, * \rangle$ для інших підматриць у структурі базисної матриці, що містять елементи, кратні $N_1=3$. Таблиця операцій, сформована на основі множини елементів $S_1 = \{3, 6, 9, 12\}$, має вигляд табл. 2.10.

Таблиця 2.10 – Табличне задання операції $(\alpha^k \times \alpha^n) \bmod 15$

$* = (i \times j) \bmod 15 = a_{3izj}$	*	3	6	9	12	
	3	9	3	12	6	не група
	6	3	6	9	12	
	9	12	9	6	3	
	12	6	12	3	9	

Множина S'_1 натуральних елементів $\{1, 2, 3, 4\}$ з операцією $[(i \times j) \bmod 5] = a_{ij}$ відповідає алгебраїчній структурі, яку називають абелевою групою. Адже, відповідно до [151], [152], множина натуральних чисел $(1, 2, \dots, N-1)$ з операцією

множення за модулем $N \in$ *циклічною групою*. Табличне задання результатів операції $*$ $=((i \times j) \bmod 5)$ може бути подано у вигляді *ганкелевого циркулянту*.

Відображення $f_1: S'_1 \rightarrow S_1$ множини $S'_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ на множину $S_1 = \{3, 6, 9, 12\}$ є лінійним. Адже, елемент з S_1 рівний $a_i = (3 \times a'_i)$, де a'_i – елемент множини S'_1 для $i=(1,2,3,4)$. Результат алгебраїчної операції для множини елементів з S_1 відповідає $a_{3i3j} = (i \times j) \bmod 15 = [(3a'_i) \times (3a'_j)] \bmod 15 = (9 \times a_{ij}) \bmod 15$, табл. 2.11.

Таблиця 2.11 – Табличне задання операції

$$a_{ij} = ((i \times j) \bmod 5), \quad a_{3i3j} = (3i \times 3j) \bmod 15$$

$*$	1	2	3	4	$*$	3	6	9	12	$a_{3i3j} = (9 \times a_{ij}) \bmod 15 =$ $= [9 ((i \times j) \bmod 5)] \bmod 15,$
1	1	2	3	4	3	9	3	12	6	
2	2	4	1	3	6	3	6	9	12	
3	3	1	4	2	9	12	9	6	3	
4	4	3	2	1	12	6	12	3	9	

де a_{ij} – результат операції на основі елементів i, j множини S'_1 .

Маємо відображення множини групи S_1 на лінійно збільшену множину S'_1 виду:

$$\{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{f_1} \{3, 6, 9, 12\}, \quad f_1(S'_1) = (3 \times a_{ij}) = S_1.$$

Таким чином, результати операції задані в табл. 2.10 для множини $S_1 = \{3, 6, 9, 12\}$ відображаються (табл. 2.11) аналогічно для множини $S'_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, відтворюючи *ганкелів циркулянт* при відповідних перестановках.

Отже, генерація послідовності елементів групи за *непримітивними* елементами $\alpha = 3, 12$ формує *ганкелів циркулянти*:

$$\alpha = 3, \alpha^i = 3, 9, 12, 6, (3, 9, 12, 6);$$

$$\alpha = 12, \alpha^i = 12, 9, 3, 6, (12, 9, 3, 6);$$

Матриця задання операції сформована у вигляді ганкелевої підматриці за $\alpha = 3, (3^i \bmod 15)$, що відповідає циклічному розкладу підстановки $(3, 6, 9, 12)$, подана в табл. 2.12.

Непримітивний елемент $\alpha = 9, \alpha^i = 9, 6$; формує два елементи множини

$$(9, 6); \quad 2*(9, 6)_{15} = (3, 12); \quad 8*(9, 6)_{15} = (12, 3); \quad (9, 6)(3, 12);$$

Матриця задання операції сформована у вигляді ганкелевих підматриць за $\alpha = 9$, що відповідає циклічному розкладу підстановки $(9, 6)(3, 12)$, подана в табл. 2.13.

Таблиця 2.12 – Табличне задання операції $(\alpha^k \times \alpha^n) \bmod 15$

*	3	6	12	9
3:	9	3	6	12
6:	3	6	12	9
12:	6	12	9	3
9:	12	9	3	6

Таблиця 2.13 – Табличне задання операції $(\alpha^k \times \alpha^n) \bmod 15$

*	9	6	3	12
9:	6	9	12	3
6:	9	6	3	12
3:	12	3	9	6
12:	3	12	6	9

Непримітивний елемент $\alpha = 6$, $\alpha^i = 6$, формує один елемент множини (6);

$$2*(6)_{15}=12, 3*(6)_{15}=3, 4*(6)_{15}=9 ; (3)(6)(9)(12);$$

і не формує у табличному заданні операції (табл. 2.14) ганкелевого циркулянту.

Таблиця 2.14 – Табличне задання операції $(\alpha^k \times \alpha^n) \bmod 15$

*	3	6	9	12
3:	9	3	12	6
6:	3	6	9	12
9:	12	9	6	3
12:	6	12	3	9

Аналогічно (табл. 2.15), на основі лінійного відображення $f_2: S'_2 \rightarrow S_2$ елементів множини $S'_2 = \{1, 2\}$ з операцією $(i \times j) \bmod 3 = a_{ij}$, що відповідає абелевій групі в множину $S_2 = \{5, 10\}$, виконуємо за виразом $a_i = (5 \times a'_i)$, де a'_i – елемент множини S'_2 для $i=(1,2)$.

Відображення множини групи S'_2 на лінійно збільшену множину S_2 :

$$S'_2 = \{1, 2\} \xrightarrow{f} S_2 = \{5, 10\}, \quad f = (a_{ij} \times 5).$$

Таким чином, операція задана табл. 2.15 для множини S_2 відображається в S'_2 і відтворює ганкелів циркулянт.

Матриця в таблиці операцій $a_{5i5j} = (i \times j) \bmod 15$ сформована у вигляді ганкелевої підматриці за $\alpha=5$, $\alpha^i=5,10$, що відповідає циклічному розкладу підстановки (5, 10).

Таблиця 2.15 – Табличне задання операцій

$$a_{5i5j} = (i \times j) \bmod 15, \quad a_{ij} = (i \times j) \bmod 3$$

*	5	10
5	10	5
10	5	10

*	1	2
1	1	2
2	2	1

$$a_{5i5j} = (25 \times a_{ij}) \bmod 15;$$

$$a_{5i5j} = [25 ((i \times j) \bmod 3)] \bmod 15.$$

Непримітивний елемент $\alpha = 10$, $\alpha^i = 10$, формує один елемент множини (10) , $5*(10)_{15}=5$, $10*(10)_{15}=10$, $(5)(10)$ – не задає в структурі ганкелевого циркулянту.

Аналізуючи ганкелеву матрицю значень аргументів базису ДГП для $N=15$ обсягу, кожен рядок (стовпець) матриці (табл. 2.6) a_i , $i \in \{1, 2, \dots, x\}$ можна трактувати як підстановку ψ_i відносно крайнього верхнього рядка (самого лівого стовпця):

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 1 & 5 & 9 & 13 & 2 & 6 & 10 & 14 & 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\psi_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 8 & 1 & 9 & 2 & 10 & 3 & 11 & 4 & 12 & 5 & 13 & 6 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\psi_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 14 & 6 & 13 & 5 & 12 & 4 & 11 & 3 & 10 & 2 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 11 & 7 & 3 & 14 & 10 & 6 & 2 & 13 & 9 & 5 & 1 & 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 11 & 4 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сукупність підстановок $\{\psi_1, \psi_2, \psi_4, \psi_7, \psi_8, \psi_{11}, \psi_{13}\}$ утворює абелеву групу, тобто відповідає всім умовам груп. Адже наведена алгебраїчна система $\langle \{N-1\}, \circ \rangle$ – абелева група порядку $(N-1)$, що є непустою множиною з бінарною операцією \circ – підстановки, причому бінарна операція комутативна та асоціативна, наявний нейтральний елемент і кожен елемент групи має обернений йому елемент відносно бінарної операції. Натуральний степінь елемента ψ_i групи підстановок визначається послідовністю $(n-1)$ операцій підстановок: $\psi^n = \psi \circ \psi \circ \dots \circ \psi$ для $n \in N-1 \setminus \{0\}$. Наприклад, степені елемента ψ_2 , ψ_4 , дорівнюють:

$$\psi_2^2 = \psi_2 \circ \psi_2 = \psi_4;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 1 & 5 & 9 & 13 & 2 & 6 & 10 & 14 & 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} = \psi_4;$$

$$\psi_4^2 = \psi_4 \circ \psi_4 = \psi_1;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 1 & 5 & 9 & 13 & 2 & 6 & 10 & 14 & 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 1 & 5 & 9 & 13 & 2 & 6 & 10 & 14 & 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \psi_1.$$

Послідовність операцій підстановок $\psi_7 \circ \psi_{13} = \psi_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 14 & 6 & 13 & 5 & 12 & 4 & 11 & 3 & 10 & 2 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 11 & 4 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \psi_1.$$

Дана форма підстановки компактніше описується за *циклічним розкладом підстановки*. Підстановкам ψ_i відповідають циклічні розклади підстановки:

$$\psi_1 - (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14);$$

$$\psi_2 - (1,2,4,8)(3,6,12,9)(5,10)(7,14,13,11); \quad \psi_2^2 = \psi_4; \quad \psi_2^3 = \psi_8; \quad \psi_2^4 = \psi_1;$$

$$\psi_4 - (1,4)(2,8)(3,12)(5,6,9)(7,13)(10)(11,14); \quad \psi_4^2 = \psi_1;$$

$$\psi_7 - (1,7,4,13)(2,14,8,11)(3,6,12,9)(5)(10); \quad \psi_7^2 = \psi_4; \quad \psi_7^3 = \psi_{13}; \quad \psi_7^4 = \psi_1;$$

$$\psi_8 - (1,8,4,2)(3,9,12,6)(5,10)(7,11,13,14); \quad \psi_8^2 = \psi_4; \quad \psi_8^3 = \psi_2; \quad \psi_8^4 = \psi_1;$$

$$\psi_{11} - (1,11)(2,7)(3)(4,14)(5,10)(6)(8,13)(9)(12); \quad \psi_{11}^2 = \psi_1;$$

$$\psi_{13} - (1,13,4,7)(2,11,8,14)(3,9,12,6)(5)(10); \quad \psi_{13}^2 = \psi_4; \quad \psi_{13}^3 = \psi_7; \quad \psi_{13}^4 = \psi_1;$$

$$\psi_{14} - (1,14)(2,13)(3,12)(4,11)(5,10)(6,9)(7,8); \quad \psi_{14}^2 = \psi_1;$$

$$\psi_3 - (3,9,12,6);$$

$$\psi_6 - (5,10).$$

Відповідність послідовності, згенерованої примітивним елементом $\alpha = 2$, та відповідної підстановки $\psi_2(a_i)$ відслідковується у випадку подання підстановки у вигляді циклічного розкладу, наприклад

$$\alpha = 2^i \text{ визначає перестановку } (1, 2, 4, 8)(7,14,13,11);$$

$$\psi_2 - (1,2,4,8)(3,6,12,9)(5,10)(7,14,13,11);$$

$$\alpha = 7^i \text{ визначає перестановку } (1, 7, 4, 13)(2,14,8,11);$$

$\psi_7 - (1,7,4,13)(2,14,8,11)(3,6,12,9)(5)(10)$.

Тобто, циклічний розклад підстановки відображає повний набір елементів множини, включаючи цикли з кратними елементами обсягу перетворення.

Кількість примітивних елементів циклічної групи порядку N визначається на основі функції Ейлера $\varphi(x)$, яка дорівнює кількості всіх натуральних чисел між 1 та N і взаємно простих з N . Функція $\varphi(x)$ для N - складеного числа обчислюється відповідно [148], за формулою

$$\varphi(N) = N \prod_{p|n} (1 - 1/p) \quad , \quad (2.21)$$

де $N = \prod p_i^{m_i}$, p_i – просте, n_i – натуральне число, $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Числова функція Ейлера $\varphi(N)$, визначена на множині всіх цілих додатних чисел, дорівнює числу невід'ємних цілих чисел, менших і взаємно простих з N : $\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=2$, $\varphi(5)=4$, $\varphi(6)=2$, $\varphi(7)=6, \dots$, $\varphi(12) = 4, \dots$, $\varphi(30)= 8$.

Наприклад, для $N=12$, 30 функції Ейлера $\varphi(N)$ за (2.21) дорівнює:

$$\varphi(12) = 12(1-1/2) * (1-1/3) = 12 * 1/2 * 2/3 = 4;$$

$$\varphi(30) = 30 * (1-1/2) * (1-1/3) * (1-1/5) = 30 * 1/2 * 2/3 * 4/5 = 8.$$

Сума чисел $\varphi(d)$ за всіма натуральними дільниками d числа n дорівнює n , тобто

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n. \quad (2.22)$$

Наприклад, для $N=12$, 30 функції Ейлера $\varphi(n)$ за (2.22) дорівнює:

$$\varphi(12) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12;$$

$$\varphi(30) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(5) + \varphi(6) + \varphi(10) + \varphi(15) + \varphi(30) = 1 + 1 + 2 + 4 + 2 + 4 + 8 + 8 = 30.$$

Числова функція f називається мультиплікативною, якщо для будь-яких додатних взаємно простих цілих чисел a та b виконується рівність $f(ab) = f(a) * f(b)$. Функція Ейлера $\varphi(x)$ мультиплікативна. Наприклад, для ДГП зі складеним обсягом $N=15$ функція Ейлера дорівнює: $\varphi(15) = \varphi(3) * \varphi(5) = 2 * 4 = 8$. Відповідно за наслідком теореми Ейлера $(a^{\varphi(N)} \bmod N) = 1$, період послідовності $(a^n \bmod N)$ для взаємно простих $(a, N) = 1$, $n = 1, 2, \dots$ є дільником $\varphi(N)$.

Отже, в одержаному табличному заданні операції множення за модулем, крім основної підматриці з множиною елементів *взаємно простих* з N , є

розміщені вертикальними і горизонтальними лінійками підматриці, з множиною елементів, *кратних* N_i . Відповідно до табл. 2.3, цілочисельні аргументи $a_{n,k}$ ($n, k=1, 2, \dots, N-1$) базисних функцій ДГП задають множини елементів *кратних* N_i , що мають вид добутку непарних цілочисельних значень на парні/непарні (2.23) або тільки непарні цілочисельні значення (2.24)

$$a_{n,k} = k(2n+1) \bmod T, \quad (2.23)$$

$$a_{n,k} = (2k+1)(2n+1) \bmod T. \quad (2.24)$$

Результати операції для таких множин відображаються у множини натурального ряду $S'_i = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, відтворюючи *ганкелів циркулянт* при відповідних перестановках. Тобто, результати операцій у табличному заданні операції множення за модулем з множиною елементів, *кратних* N_i , відповідають квадратній матриці аргументів функцій базису ДГП і зводяться до обчислення Ганкелевих циркулянтів.

Отже, якщо обсяг ДГП перетворення N – складене число ($N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k$), то таблиця операцій містить основну підматрицю і підматриці з елементами, кратними N_i . Кожна з підматриць може бути сформована як ганкелевий циркулянт. Приведені ганкелеві підматриці для елементів множини $K = \{ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_{x-1} \ a_x \}$ мають властивості:

- операція визначена при всіх значеннях аргументів (однозначна відповідність);
- підматриці симетричні відносно своєї головної діагоналі (операція комутативна);
- примітивна підстановка, що компактніше подається циклічним розкладом підстановки, визначає послідовність елементів у ганкелевій підматриці;
- алгебраїчна структура $\langle K, * \rangle$ є комутативна (абелева) група (операція-композиції асоціативна).

Отже, кожен рядок (стовпець) a_i , $i \in \{1, 2, \dots, x\}$ матриці аргументів функцій базису ДГП можна трактувати як *підстановку* ψ_i відносно крайнього верхнього рядка (крайнього лівого стовпця):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & x-1 & x \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ix-1} & a_{ix} \end{pmatrix} = \Psi_i. \quad (2.25)$$

Сукупність підстановок, визначених за рядками з номерами взаємно простими з N , утворює абелеву групу. Кількість і нумерація породжуючих (примітивних) і непримітивних елементів як для цілочисельної групи, так і групи підстановок збігаються. Тому примітивна підстановка Ψ_i , що компактно описується циклічним розкладом і містить цикли із кратними елементами обсягу перетворення, визначає переставлення рядків і стовпців базисної матриці ДГП для одержання блочно-циклічних структур.

2.3 Узагальнений синтез алгоритму обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток

2.3.1 Формування твірних масивів за матрицями аргументів базису дискретних гармонічних перетворень

Розроблення узагальненої схеми [153], [154] обчислення ДГП на основі циклічних згорток передбачає такі послідовні дії:

- аналіз особливостей базису перетворення на основі періодичності та симетрії гармонік;
- формування матриці аргументів базису за твірним масивом, що визначає структуру матриці аргументів базису і відповідні еквівалентно-структурні матриці знаків перетворення послідовностей довільного обсягу [155]-[158];
- виділення підмножин значень обсягів, що мають типові блочно-матричні структури [159]-[162].

Схема синтезу алгоритму дискретних гармонічних перетворень дійсних даних змінного обсягу на основі циклічних згорток базується на твірному масиві, що визначається за рядками/стовпцями матриці аргументів функцій гармонічного базису.

Аналіз особливостей базису перетворення ДГП виконаємо над матричною формою

$$X = C_{N \times N} x, \quad (2.26)$$

де квадратні матриці $C_{N \times N}$ дискретного базису з індексами за рядками $k=0, \dots, N$ та індексами за стовпцями $n=0, \dots, N$; матриці-стовпці вихідних $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N$.

Детальний аналіз цілочисельних аргументів $c_{n,k}$ дискретної базисної функції $w(c_{n,k})$ дійсних перетворень зводиться до аналізу структури матриці аргументів $C_a(n,k)$ дискретного базису для довільних значень обсягів N , де $n, k=0, \dots, N-1$. Гармонічна функція базису періодична відносно T , тому можна записати квадратну матрицю аргументів базису порядку $(N \times N)$ у вигляді:

$$C_a(k,n) = [(c_{kn}) \bmod T], \quad (2.27)$$

де c_{kn} – значення елементів матриці для $k=1(1)N-1$ рядка та $n=1(1)N-1$ стовпця. Періодичність T дискретної базисної функції дійсних дискретних гармонічних перетворень подано у табл. 2.16.

Таблиця 2.16 – Періодичність T базисної функції
дійсних гармонічних перетворень

Клас\Вид	I	II	III	IV
ДКП, T	4N	8N	8N	16N
ДСП, T	4N	8N	8N	16N
ДПХ, T	2N	4N	4N	8N

Враховуючи властивість симетричності функцій гармонічного базису, їх можна повністю визначити для частково симетричного інтервалу, доповнюючи матрицею знаків $S(k,n)$. Періодичність та симетричність залежать від класу і виду та значення N обсягу перетворення ДГП (табл. 2.16). Базисні функції синуса асиметричні відносно половини періоду $T/2$ та симетричні на інтервалі $(0, T/2)$, а функції косинуса симетричні та асиметричні відповідно навпаки. Базисні функції косинуса відповідно (рис. 2.1) мають три осі симетрії $(0, T/4, 3T/4, 5T/4, 7T/4)$ на конкретних інтервалах.

У результаті спрощені елементи $\underline{c}_{k,n}$ з матриці $\underline{C}_a(k,n)$ аргументів ДГП визначаються послідовним виконанням обчислень на основі властивості симетричності/асиметричності гармонічних функцій. Доповненням до спрощеної матриці аргументів (2.28) є матриця знаків $S(k,n)$, що формується на основі елементів матриці (2.29) і визначаються за умовою:

$$\underline{C}_a(k,n) = [(\underline{c}_{k,n})], \quad k,n=1(1)N-1; \quad (2.28)$$

$$S(k,n) = \begin{cases} +1, & \text{якщо значення функції базису} > 0, \\ 0, & \text{якщо значення функції базису} = 0, \\ -1, & \text{якщо значення функції базису} < 0, \end{cases} \quad k,n=1(1)N-1. \quad (2.29)$$

Отже, для формування твірних масивів використовуються рядки/стовпці квадратних матриць $C_a(k,n)$, $\underline{C}_a(k,n)$, $S(k,n)$ аргументів функцій базису для змінного обсягу ДГП, визначені на основі періодичності та симетричності гармонік.

Відповідно до викладеного у попередньому підрозділі 2.2, матрицю цілочисельних аргументів функцій базису ДГП простого або складеного обсягу N можна подати у вигляді набору ганкелевих циркулянтних підматриць, що описується відповідним циклічним розкладом підстановки, включаючи цикли з кратними елементами обсягу перетворення. Циклічний розклад підстановки називатимемо *твірним масивом*, який містить у собі стислий опис про блочно-циклічну структуру ядра перетворення і є основою синтезу ефективних алгоритмів ДГП.

За цим підходом, структуру базисної матриці задає *твірний масив*, що відповідає циклічному розкладу підстановки виду

$$P(n) = P(n_1) P(n_2) \dots P(n_k) = \\ = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L_1}) (n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L_2}) \dots (n_{kL_1}, n_{kL_2}, \dots, n_{kL_k}), \quad (2.30)$$

де k – число підмасивів; n – загальний обсяг масиву, що дорівнює:

$$n = L_1 + L_2 + \dots + L_k. \quad (2.31)$$

Твірний масив $P(n)$ може містити підмасиви:

$$P(n_1) = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L_1}), P(n_2) = (n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L_2}), \dots, P(n_k) = (n_{kL_1}, n_{kL_2}, \dots, n_{kL_k}), \quad (2.32)$$

де n_{ij} – елемент підмасиву; L_i – кількість елементів у підмасиві $P(n_i)$.

Параметри твірною масиву визначають особливість обчислювального алгоритму ДГП, оскільки вони задають структуру базису перетворення. У випадку розміщення однакових циклічних підматриць відносно вертикалі та горизонталі базисної матриці обчислюється тільки одна циклічна згортка. Це зменшує число циклічних згорток i , відповідно, обчислювальну складність алгоритму.

Твірний масив $P(n)$, враховуючи особливості симетричності базисної функції, можна задати за допомогою спрощеного твірною масиву $P'(n)$, доповненого масивом знаків $S(n)$:

$$P'(n) = P'(n_1) P'(n_2) \dots P'(n_k), \quad (2.33)$$

$$S(n) = S(n_1) S(n_2) \dots S(n_k). \quad (2.34)$$

Спрощений твірний масив $P'(n)$ містить менший набір із множини елементів аргументів, а масив знаків $S(n)$ – тільки набір $+1, -1, 0$, що детальніше задає структуру квадратної базисної матриці за кожним конкретним ДГП і відповідним обсягом перетворень N .

Використання твірною масиву $P(n)$ приводить до однотипного підходу до проведення організації обчислення різних видів ДГП послідовностей довільного обсягу. Структура декомпозиції базису ДГП, що відповідає матриці аргументів $\underline{C}_a(k, n)$ і відповідної еквівалентної матриці знаків $S(k, n)$, потребує переставлення рядків і стовпців, відповідно до твірною масиву $P(n)$ над матрицею аргументів \underline{C}_a (2.33) та над матрицею S (2.34) знаків.

Отже, у *твірному масиві* сконцентровано всю інформацію про блочно-циклічну структуру ядра перетворення ДГП і для його визначення:

- виділяємо рядки/стовпці з квадратної матриці аргументів функцій базису;
- будуємо твірні масиви на основі циклічного розкладу підстановки;
- спрощуємо за властивістю симетричності базису цілочисельні елементи твірною масиву, доповнюючи масивом знаків;

У результаті отримуємо твірний масив, спрощений твірний масив та масив знаків.

2.3.2 Аналіз структури базисної матриці для синтезу алгоритму обчислення дискретних гармонічних перетворень

Для розроблення узагальненої методології синтезу алгоритмів ДГП на основі циклічних згорток важливим питанням, крім формування базисної матриці у вигляді набору ганкелевих підматриць, є аналіз сформованої блочно-циклічної структури базисної матриці перетворення. Проведення аналізу на визначення ідентичних циклічних підматриць у структурі базису даного обсягу робить обчислювальний алгоритм ДГП на основі циклічних згорток ефективнішим. Адже аналіз та відбір ідентичних циклічних підматриць, що містять однакові підматриці спрощених аргументів і знаків (прямих або інверсних), розміщених по горизонталі та вертикалі у базисній матриці, дають змогу скоротити кількість виконання циклічних згорток, тим самим зменшивши обчислювальну складність дискретного гармонічного перетворення [161], [162].

У структурі квадратної матриці $C_a(k,n)$ міститься набір, циклічних підматриць різного обсягу. Ці підматриці містять цілі числа і є латинськими квадратами. Крім цього, кожна квадратна підматриця містить рівні між собою елементи, що розміщені паралельно до бічної діагоналі $c(i,j)=c(k,l)$, при $i+j=k+l$, де $i,j,k,l \in \{1,2,\dots, n\}$, $c(i,j) \in \{1,\dots,N-1\}$, або рівні попарно елементи, симетрично розміщені відносно головної діагоналі. Такі квадратні підматриці називають Ганкелевими (Hankel), що повністю визначаються своїм першим рядком або першим стовпцем, або такі матриці ще називають ліво-циркулянтними, або циклічними зліва.

Значення елементів матриці можна визначити попередньо, однак великі обсяги перетворень потребують значних затрат пам'яті для їх збереження. Зменшення обсягу пам'яті можливе під час аналізу блочно-циклічної структури квадратної матриці. Тобто, обчислюють значення певних елементів матриці $C_a(k,n)$ та порівнюють з іншими для визначення ідентичних підматриць.

Враховуючи особливості підматриць (квадратні, циклічні зліва) у загальній структурі матриці ДГП, можна аналізувати ідентичні підматриці за алгоритмами, розглянутими у роботах [161], [162].

Пошук і аналіз перебором елементів, починаючи з верхнього рядка або першого стовпця, передбачають перевірку на циклічність (однакові значення елементів зі зміщеним наступним рядком або стовпцем). У разі невиконання вимоги до циклічності робимо висновок про завершення обсягу підматриці, і за отриманим обсягом визначаємо розмірність квадратної підматриці. Далі зміщуємось (горизонтально/вертикально) на цей визначений обсяг і продовжуємо аналіз перебором елементів перших рядків або стовпців, визначаючи нову підматрицю порівнюємо її з попередньо виявленими підматрицями на ідентичність.

Пошук і аналіз перебором елементів за бічною діагоналлю починаємо з першого елемента перевіркою на циклічність (однакові значення елементів паралельних бічній діагоналі). За невиконання вимоги циклічності або визначення максимального значення елементів у бічній діагоналі робимо висновок про завершення обсягу підматриці і визначаємо її розмірність за координатою максимального значення кількості елементів. Далі зміщуємось (горизонтально/вертикально) на цей визначений обсяг і продовжуємо аналіз перебором елементів у бічній діагоналі при визначенні нової підматриці, порівнюємо її з попередньо виявленими, визначаючи однакові окремо за однаковими вертикальними і за однаковими горизонтальними координатами (стовпця, рядка).

Змішаний пошук відносно рядка/стовпця і за бічною діагоналлю дозволяє, поєднуючи ці дві стратегії з особливістю розміщення відповідних обсягів підматриць, ефективніше визначити однакові циклічні підматриці.

Базисну матрицю дискретного гармонічного перетворення, що містить циклічні підматриці, визначає твірний масив $P(n)$, $P'(n)$, $S(n)$ з відповідними параметрами. Тому для пошуку і визначення ідентичних підматриць у базисній матриці доцільно застосувати алгоритм на основі параметрів і значень твірного

масиву. Для заданого обсягу i виду дискретного гармонічного перетворення формуємо відповідний твірний масив і визначаємо його параметри [162].

Визначення відповідних параметрів на основі твірного масиву $P(n)$, $P'(n)$, $S(n)$ характеризує матричну структуру ДГП довільного обсягу. До таких параметрів та особливостей належать :

- $p, p', 2p, 4p, 2^n$ – приналежність множинам обсягу перетворення N (p - просте або p' - непарне складене);
- k – кількість підмасивів у твірному масиві $P(n)=P(n_1) P(n_2) \dots P(n_k)$;
- L_i – кількість елементів кожного підмасиву $(L_1), (L_2), \dots (L_k)$;
- m – кількість підматриць $m \geq k^2$ базової матричної структури;
- $(i,j) s_{ij} \in_i$ – координати (i,j) з відповідними знаком і значенням $s_{ij} \in_{ij}$ перших елементів підматриць у матричній структурі;
- r – кількість повторень однакових підматриць $r \leq k$ у матричній структурі по горизонталі/ вертикалі;
- n_i/t – повторюваність елементів у рядку підматриць за відповідним твірним підмасивом $P(n_i)$, де $t=1,2$;
- $s_{ij} \in_{ij}$ – деякі підматриці починаються не з першого, а з проміжного елемента спрощеного твірного підмасиву $P'(n_i)$;
- властивість циклічності зліва підматриць (Ганкелевих), що формуються за відповідним твірним підмасивом $P(n_i)$.

Аналіз матричної структури на ідентичність підматриць виконують за координатами (i,j) , що відповідають першим елементам підматриць (табл.2.17) у матричній структурі, і визначенням значень даного елемента $(s_{ij} \in_{i,j})$. Далі порівнюється $s_{ij} \in_{i,j}$ з відповідними значеннями перших або інших елементів твірного масиву $P(n)$ і визначається розмірність підматриці L_i . Подальший відбір ідентичних горизонтально та вертикально розміщених підматриць виконується за координатами стовпця, рядка при зміщеннях на розмірність підматриць і рівності їх перших елементів.

Ідентичні циклічні підматриці – це однакові (мають однакові значення індексів та знаків) та квазіоднакові підматриці, що мають однакові індекси зі

спрощеного твірного масиву $P'(n)$, але протилежні значення знаків із масиву знаків $S(n)$.

Отже, визначаються тільки значення перших елементів підматриць у процесі аналізу структури базису за координатами розміщення підматриць. Тобто, обчислюються координати рядка і стовпця та значення $s_{ij}c_{i,j}$ перших елементів підматриць і порівнюються між собою.

Таблиця 2.17 – Відповідність координат (i, j) елементам

твірного масиву $P(n_i)$ та $P'(n_i)$

$(i \setminus j)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	n	
$P(n_i)$	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1L1}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2L2}	...	n_{kL1}	n_{kL2}	...	n_{kLk}
$P'(n_i)$	n'_{11}	n'_{12}	n'_{13}	...	n'_{1L1}	n'_{21}	n'_{22}	n'_{23}	...	n'_{2L2}	...	n'_{kL1}	n'_{kL2}	...	n'_{kLk}
$S(n_i)$	s_{11}	s_{12}	s_{13}	...	s_{1L1}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	...	s_{2L2}	...	s_{kL1}	s_{kL2}	...	s_{kLk}

Координати перших елементів підматриць визначаються за $(i+L_i, j+L_i)$, де L_i – вибирається за приналежності до твірного підмасиву значень перших елементів підматриць у матричній структурі. Перші елементи обчислюються за відповідними визначеними координатами (i, j) і відповідатимуть елементу $P'(n)$ твірного масиву для відповідно виду перетворення ДГП (табл. 2.18).

Визначають ідентичні циклічні підматриці відбором за координатами перших елементів однакових підматриць *горизонтально* (координата рядка незмінна, а змінюється координата стовпців) у блочно-циклічній структурі базисної матриці. Для однотипної циклічної підматриці буде виконуватись циклічна згортка з поелементно об'єднаними вхідними даними.

Аналогічно визначають ідентичні циклічні підматриці відбором за координатами перших елементів однакових підматриць *вертикально* (координата стовпця незмінна, а змінюється координата рядків) у блочно-циклічній структурі базисної матриці. Для вертикально розміщених ідентичних циклічних підматриць виконуватиметься одна циклічна згортка з відповідними вхідними даними.

Таблиця 2.18 – Матриця координат та значення перших елементів зі знаком підматриць аргументів базису ДГП

(i+L _i , j+L _i) (координати рядок/стовпець) – s _{i,j} c _{i,j} знак і значення першого елемента підматриць;				
(1,1) – s _{i,j} c _{i,j} ;		(1,1+ L ₁) – s _{i,j} c _{i,j} ;		... (1, 1+ L ₁ + L ₂ + ...+L _k) – s _{i,j} c _{i,j} ;
				(1+ L _k ,1+ L ₁ + L ₂ + ...+L _k) – s _{i,j} c _{i,j} ;
				... c _{i,j} ;
(1+ L ₁ ,1) – s _{i,j} c _{i,j} ;		(1+ L ₁ ,1+ L ₁) – s _{i,j} c _{i,j} ;		(1+ 2L _k ,1+ L ₁ + L ₂ + ...+L _k) – s _{i,j} c _{i,j} ;
				(1+ 3L _k ,1+ L ₁ + L ₂ + ...+L _k) – s _{i,j} c _{i,j} ;
				...
(1+ L ₁ + L ₂ ,1) – s _{i,j} c _{i,j} ;		(1+ L ₁ + L ₂ ,1+ L ₁) – s _{i,j} c _{i,j} ;		(1+ 4L _k ,1+ L ₁ + L ₂ + ...+L _k) – s _{i,j} c _{i,j} ;
				...
(1+L ₁ +L ₂ +...+L _k ,1) – s _{i,j} c _{i,j} ;	(1+L ₁ +L ₂ +...+L _k , 1+L _k) – s _{i,j} c _{i,j} ;	(1+L ₁ +L ₂ +...+L _k ,1 +2L _k) – s _{i,j} c _{i,j} ;	(1+L ₁ +L ₂ +...+L _k ,1 +3L _k) – s _{i,j} c _{i,j} ;	(1+L ₁ + L ₂ + ...+L _k ,1+L ₁ + L ₂ +...+L _k) – s _{i,j} c _{i,j} ;

Для решти циклічних підматриць, що не мають одотипних підматриць, буде виконуватись циклічна згортка за двома послідовностями на основі визначених координат циклічної підматриці.

Результат аналізу ідентичних циклічних підматриць у структурі базисної матриці визначає послідовність виконання обчислювального алгоритму.

Отже, за розробленим методом пошук і визначення ідентичних циклічних підматриць у базисній матриці спрощуються із використанням твірного масиву базисної матриці ДГП. Ідентичні циклічні підматриці знаходять за вертикальним і горизонтальним розміщенням підматриць у матрицях спрощених аргументів та знаків функцій базису ДГП. Для цього визначають та порівнюють значення перших спрощених елементів та знаків циклічних підматриць за сформованими координатами у структурі базисної матриці. Пошук ідентичних

підматриць дає змогу скоротити кількість обчислень циклічних згорток, тим самим зменшуючи обчислювальну складність дискретного гармонічного перетворення.

2.3.3 Узагальнена методологія синтезу алгоритмів дискретних гармонічних перетворень та їх обчислення на основі циклічних згорток

Узагальнена методологія синтезу алгоритмів ДГП на основі циклічних згорток передбачає систематизовану сукупність, що складається з принципів, етапів, методів, способів, алгоритмів, особливостей для ефективного виконання перетворень програмними та апаратними обчислювальними засобами. У результаті розглянутих способів формування базисної матриці у вигляді набору ганкелевих підматриць та методу аналізу сформованої блочно-циклічної структури базисної матриці перетворення обґрунтуємо узагальнену методологію обчислення на основі циклічних згорток для ДКП, ДСП, ДПХ та їх видів над послідовностями дійсних даних [163].

Розроблення узагальненої схеми синтезу алгоритму дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток потребує аналізу особливостей базису перетворення, періодичності та симетрії гармонік, що є елементами базису, та визначення структури матриці аргументів базису перетворення за твірним масивом для ефективної організації обчислень перетворення послідовностей довільних обсягів.

Структурну схему засобів виконання ДГП поділяють (рис. 2.3) на три базові компоненти:

- 1) блок синтезу (SU) алгоритму обчислення ДГП, адаптованого до довільного цілого значення обсягу N ;
- 2) блок (W), визначення гармонічних коефіцієнтів на основі аргументів для цього виду перетворення;

3) блок (PU) виконання ДГП, адаптованого до обсягу перетворення із входом $x(n)$ та виходом $X(n)$.

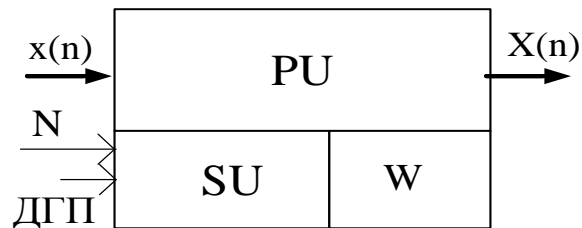


Рисунок 2.3 – Структурні частини обчислювальної системи виконання ДГП

Синтез алгоритму дискретного гармонічного перетворення виконується у блоці SU і, відповідно до результатів аналізу, базується на *принципах*, яких необхідно дотримуватись, розробляючи алгоритм ДГП на основі циклічних згорток:

- 1) розмірність стовпців базисної матриці вибирається на асиметричному інтервалі (забезпечується наявність додатніх і від'ємних значень базисної функції, а конкретніше – забезпечується визначення відповідної цілочисельної множини аргументів базисної функції для умови відповідності циклічній групі);
- 2) розмірність рядків базисної матриці не більша за розмірність стовпців і забезпечує визначення вихідних значень обсягу перетворення (для обчислення вихідних значень перетворення кількість рядків не менша за обсяг перетворення або більше відповідно до блочно-циклічної структури базисної матриці);
- 3) номер вибору рядка для формування твірного масиву не має бути кратний обсягу перетворення (у випадку, коли значення обсягу перетворення – складене число);
- 4) розмірність та порядок, визначені твірним масивом, стовпців базисної матриці задає повторюваність і порядок послідовності вхідних даних (у результаті переставлення рядків та стовпців базисної матриці за твірним масивом, що більший за обсяг перетворення, додатково повторюється і переставляється послідовність вхідних даних);

- 5) ідентичні циклічні під матриці, розміщені горизонтально, потребують об'єднання вхідних даних (групи спрощених елементів аргументів зі знаком базисної матриці повторюються за властивістю симетричності базисної функції);
- 6) об'єднання результатів циклічних згорток визначається особливістю блочно-циклічної структури базису для конкретного обсягу і виду перетворення (набір циклічних підматриць у базисній матриці визначається параметрами твірного масиву);
- 7) визначені вихідні значення перетворення на основі циклічних згорток потребують корекції знаків (обчислені на основі циклічних згорток вихідні значення перетворення можуть мати інверсний знак).

Виконання цих принципів реалізується за допомогою етапів синтезу алгоритму та виконання обчислення ДГП, що передбачають:

- задання виду та обсягу перетворення N , вхідної послідовності;
- формування твірного масиву $P(n)$ та спрощеного твірного масиву $P'(n)$ з доповненням масивом знаків $S(n)$;
- визначення коефіцієнтів функції базису за спрощеним твірним масивом;
- виділення ідентичних спрощених циклічних підматриць, розміщених горизонтально та вертикально із врахуванням знаків;
- переіндексація вхідних даних відповідно до значень твірного масиву та об'єднання вхідних даних, відповідно ідентичності циклічних підматриць розміщених горизонтально;
- ефективне обчислення зменшеної кількості циклічних згорток;
- об'єднання результатів швидких циклічних згорток для обчислення вихідних значень перетворення.

У SU генерується алгоритм обчислення ДГП (рис. 2.4) відповідно до перерахованих *етапів*.

На початку необхідно за введеним обсягом перетворення N визначити його приналежність до однієї з підмножин S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 натуральних чисел, простим зсувом бінарного коду обсягу перетворення і канонічним розкладом. Множину натуральних чисел розподілено на підмножини: $S_1=p$ – прості, $S_2=p_i$

$x \dots x p_j$ – непарні складені, $S3=2p_1 \times \dots \times p_j$ – парні, $S4=4p_1 \times \dots \times p_j$, $S5=2^n$ – парні кратні двом.



Рисунок 2.4 – Узагальнена схема синтезу алгоритму та його виконання дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток

Наступний етап синтезу у блоці SU є визначення твірної масиви $P(n)$ та

його параметрів для значення обсягу перетворення N . Елементами твірного масиву $P(n)$ є цілі значення у межах від 1 до $N-1$, а число твірних підмасивів пов'язане з розкладом обсягу N відповідно підмножини S_i . Твірний масив $P(n)$ можна одержати з використанням підстановки за першим та відповідним k_i -рядком, що формується за (2.41) для елементів матриці аргументів функції базису перетворення.

Для визначеного твірного масиву $P(n)$ формуємо спрощений твірний масив $P'(n)$ та масиву знаків $S(n)$ за властивістю симетрії базису гармонічного перетворення.

Наступним етапом у схемі є визначення загальної кількості підматриць та аналіз кількості горизонтально і вертикально розміщених ідентичних підматриць, що входять до структури базисної матриці перетворення. Визначення проводиться за відповідними параметрами $P(n)$, $P'(n)$, $S(n)$ порівнянням знака і значення $s_{i,j} \underline{c}_{i,j}$ першого елемента підматриць.

Сформований масив даних (табл. 2.16), що описує структуру розміщення підматриць у базисній матриці аргументів, визначає процес організації проведення обчислення дискретного перетворення послідовностей довільного обсягу.

Визначення об'єднання вхідних даних, кількості та обсягу циклічних згорток, об'єднання результатів згорток, порядок формування вихідних значень перетворення – важливі етапи організації обчислення дискретного перетворення, які реалізуються обчислювальними ресурсами у компоненті PU.

Отже, компонент SU виконує такі підзадачі:

- визначення приналежності обсягу перетворення N до однієї з S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 підмножин цілих чисел;
- визначення циклічного розкладу підстановки $P(n)$;
- спрощення циклічного розкладу підстановки $P'(n)$ із доповненням знаками $S(n)$;
- аналіз структури базисної матриці перетворення на основі визначених $P(n)$, $P'(n)$, $S(n)$.

Обмін інформацією на цьому рівні виконується на рівні повідомлень від блока синтезу SU до виконавчого блока PU заданням:

- об'єднання елементів вхідних даних відповідно до однієї з підмножин цілих чисел обсягу перетворення (S_1, \dots, S_5) ;
- твірного масиву $P(n) = (n_1)(n_2) \dots (n_k)$ перепорядкування вхідних інформаційних даних $x(n)$;
- структури спрощеного твірного масиву $P'(n)$, яка задає додаткові об'єднання вхідних елементів $x(n_1), x(n_2) \dots x(n_k)$;
- підмасивів спрощеного твірного масиву $P'(n)$ з доповненням знаками $S(n)$ для обчислення згорток.

Компонент гармонічних коефіцієнтів W виконує такі підзадачі:

- визначення приросту аргумента перетворення $\Delta\varphi = (2\pi/N)$ відповідно до вхідного значення обсягу N ;
- обчислення аргументів гармонічних функцій $\Delta\varphi = (2\pi/N)$, $i \cdot \Delta\varphi$, $i = 1, \dots, n/2$;
- обчислення абсолютних значень гармонічних коефіцієнтів $\{\cos(i \cdot \Delta\varphi), \sin(i \cdot \Delta\varphi), \text{cas}(i \cdot \Delta\varphi)\}$.

Обмін інформацією у блоці W виконується на рівні повідомлень між частинами SU, PU.

Від блока синтезу SU до блока W передаються:

- максимальна кількість значень гармонічних коефіцієнтів для обсягу перетворення N ;
- $P(n_i)$ – послідовність коефіцієнтів для аргументів гармонічних функцій, що необхідні для виконання згортки.

Від блока W до виконавчого блока PU передаються:

- значення гармонічних коефіцієнтів $w(i \cdot \Delta\varphi)$, $\{\cos(i \cdot \Delta\varphi), \sin(i \cdot \Delta\varphi), \text{cas}(i \cdot \Delta\varphi)\}$ для обчислення циклічних згорток.

Виконавчий блок PU виконує обчислення, що поділяються на підзадачі:

- об'єднання вхідних інформаційних даних перетворення $x(n)$;
- відбір і групування об'єднаних даних;

- виконання швидких циклічних згорток між згрупованими даними та відповідними значення гармонічних коефіцієнтів базисної функції;
- об'єднання результатів згортки у вихідні інформаційні дані $X(n)$ перетворення.

За твірним масивом $P(n)$ сформовані ганкелеві циклічні підматриці у базисній квадратній матриці ДГП. Обчислення циклічних згорток виконується для значень базису з аргументами $S(n)P'(n)$ та відповідних вхідних даних $x(i)$. Об'єднання результатів згорток виконується горизонтально на основі відповідних координат перших елементів підматриць. Вихідні значення перетворення у результаті обчислення визначаються у порядку відповідно до $P(n)$, що є основою синтезу алгоритму обчислення.

Синтез та обчислення ШГП складається з декількох підзадач, які пов'язані асинхронними зв'язками комунікації даних [163]. Відобразимо схемну модель взаємозв'язку підзадач виконання ШГП на основі циклічних згорток (рис. 2.5).

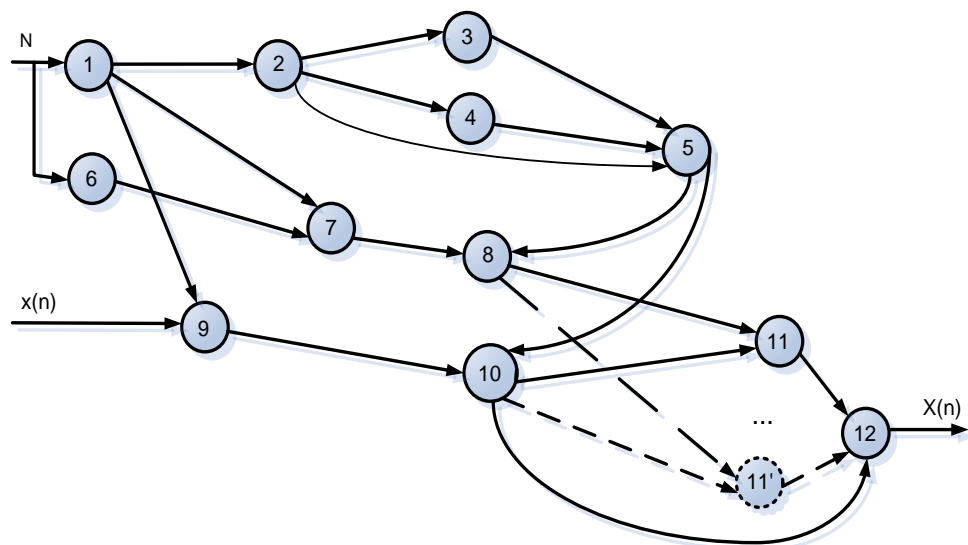


Рисунок 2.5 – Взаємозв'язок підзадач виконання ШГП на основі згорток

Схемна модель у вигляді направленного графу (рис. 2.5) складається з відповідних входів N , $x(n)$, $X(n)$, вузлів та однонаправлених дуг. Дуги між вузлами моделі забезпечують обмін повідомлень у каналах комунікації між конкретними вузлами і вказують залежність вузлів від обміну даних.

Вузли (1, 2, 3, 4, 5) відповідають підзадачі синтезу алгоритму обчислення ШГП, адаптованого до довільного цілого значення обсягу N і виконують :

вузол 1 – визначення приналежності обсягу перетворення N до однієї з (S_1, \dots, S_5) підмножин цілих чисел послідовним виконанням зсуву вправо бінарного коду обсягу перетворення;

вузол 2 – визначення циклічного розкладу підстановки $P(n)$ за допомогою рядків аргументів базисної матриці;

вузол 3 – спрощення циклічного розкладу підстановки $P'(n)$ на основі симетричності базисної функції;

вузол 4 – доповнення знаками $S(n)$ спрощеного циклічного розкладу підстановки;

вузол 5 – аналіз структури базисної матриці перетворення на основі визначених $P(n)$, $P'(n)$, $S(n)$.

Вузли (6, 7, 8) відповідають підзадачі визначення гармонічних коефіцієнтів перетворення:

вузол 6 – визначення приросту аргумента перетворення $\Delta\varphi = (2\pi/N)$;

вузол 7 – визначення аргументів гармонічних функцій $\Delta\varphi = (2\pi/N)$, $i \cdot \Delta\varphi$, $i=1, \dots, n/2$;

вузол 8 – обчислення абсолютних значень гармонічних коефіцієнтів $w(i \cdot \Delta\varphi)$.

Вузли (9, 10, 11, ..., 11', 12) відповідають підзадачі виконання ШГП адаптованого до обсягу перетворення на основі циклічних згорток:

вузол 9 – об'єднання вхідних інформаційних даних перетворення $x(n)$;

вузол 10 – відбір і групування об'єднаних даних для циклічних згорток;

вузол 11, ..., 11' – паралельне виконання швидких циклічних згорток між згрупованими даними та відповідними значення гармонічних коефіцієнтів базисної функції;

вузол 12 – об'єднання результатів згортки у вихідні інформаційні дані $X(n)$ перетворення.

Вигляд графу взаємозв'язку підзадач (рис. 2.5) показує можливість *послідовно-паралельного* виконання синтезу та обчислення ДГП, при цьому опираючись на засади незалежності :

- 1) незалежності даних (дані що обробляються однією підзадачею, не модифікуються іншою);
- 2) незалежності керування (порядок виконання у підзадачі визначається тільки під час виконання);
- 3) незалежність ресурсів (забезпечується достанім апаратним обчислювальним ресурсом для виконання підзадач);
- 4) незалежність вводу/виводу (за одночасного звертання до одних і тих самих даних).

Отже, схемна модель взаємозв'язку підзадач виконання ШГП на основі циклічних згорток забезпечує адаптацію до обсягу перетворення під час синтезу алгоритму. Послідовно-паралельний синтез алгоритму та обчислення ДГП за цією схемою має не менше двох варіантів реалізації за визначеними твірними масивами $P(n)$ відповідних характеристик, що підвищує ефективність гнучкості вибору взаємозв'язків між потоками даних.

Висновки до другого розділу

1. У розділі розроблено методологію синтезу алгоритмів дійсних дискретних перетворень (косинусне, синусне, Хартлі та їхні види) на основі ЦЗ. Для її побудови виконано аналіз дійсної базисної матриці ДГП як алгебраїчної структури для простого та складеного обсягів перетворення, визначено основні етапи синтезу алгоритму, основним з яких є аналіз структур базису перетворення.

2. У результаті аналізу сформованих значень базисної матриці аргументів функцій ДГП визначено алгебраїчні структури $\langle N-1, * \rangle$ на заданій множині $\{1, 2, \dots, (N-1)\}$ елементів з операцією множення за модулем. Алгебраїчні структури $\langle N-1, * \rangle$ для порядку N просте число є циклічними групами, причому результати таблиці операцій є ганкелевим циркулянтном. Для генерування елементів циклічної групи за примітивними елементами застосовано

підстановку, що описується циклічним розкладом – твірним масивом. Подання за твірним масивом матриці цілочисельних аргументів функцій базису ДГП складеного обсягу N у вигляді набору циклічних підматриць приводить до виконання циклічних згорток у процесі обчислення. Для генерування елементів аргументів функцій базису ДГП складеного обсягу N застосовано циклічний розклад підстановки, що містить цикли з кратними елементами обсягу перетворення.

3. Метод пошуку і визначення ідентичних циклічних підматриць у базисній матриці спрощується за використання твірного масиву базисної матриці ДГП. Знаходження ідентичних циклічних підматриць виконується за вертикальним і горизонтальним розміщенням підматриць у матрицях спрощених аргументів та знаків функцій базису ДГП. Для цього визначають та порівнюють значення перших спрощених елементів та знаків циклічних підматриць за сформованими координатами у структурі базисної матриці. Пошук ідентичних підматриць дозволяє скоротити кількість обчислень циклічних згорток, тим самим зменшуючи обчислювальну складність дискретного гармонічного перетворення.

4. Узагальнена методологія обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток – це систематизована сукупність принципів, способів, методів, алгоритмів та етапів синтезу та виконання ДГП. Основою методології є загальні принципи синтезу алгоритму ДГП на основі циклічних згорток. Виконання визначених принципів реалізується основними етапами синтезу алгоритму та обчислення ДГП.

5. Для кожного з етапів застосовують розроблені ефективні методи, алгоритми, способи. Метод формування за рядками/стовпцями базисної матриці аргументів твірних масивів $P(n)$, $P'(n)$, $S(n)$, що відповідають циклічному розкладу підстановки і визначають циклічну структуру базисної матриці ДГП. Метод на основі твірних масивів знаходження ідентичних циклічних підматриць у процесі аналізу структури базису перетворення розглядає тільки перші елементи підматриць за координатами їхнього розміщення у базисній матриці ДГП. Наявність горизонтально та вертикально розміщених ідентичних

підматриць скорочує кількість виконання циклічних згорток, тим самим зменшуючи обчислювальну складність дискретного гармонічного перетворення.

б. Визначення об'єднання вхідних даних, кількості та обсягу циклічних згорток, об'єднання результатів згорток, порядок формування вихідних значень перетворення є важливими складовими узагальненої методології синтезу алгоритму та подальшої організації його обчислення, що визначаються конкретними ДГП.

Основні результати розділу опубліковано в [9], [11] - [13], [16], [25], [27], [28], [34], [38], [44], [46], [54].

РОЗДІЛ 3

Синтез алгоритму обчислення чотирьох основних видів дискретного косинусного перетворення (ДКП I-IV) на основі циклічних згорток

3.1 Основні види дискретного косинусного перетворення

Починаючи з середини 60-х років інтенсивно розвивались швидкі обчислення дискретних перетворень класу Фур'є. Досліджувались і різноманітні модифікації перетворень та їхні ефективні алгоритми, у багатьох роботах [27], [164] акцентувалась увага на перспективності застосування тільки дійсних обчислень. Перетворення Фур'є дійсної парної функції $f(-x) = f(x)$ є дійсним парним, і перетворення дійсної непарної функції $f(-x) = -f(x)$ має тільки уявну частину і непарне. Крім цього, парна/непарна симетрії перетворення Фур'є дають можливість зберігати половину одержаних даних.

Косинусні та синусні перетворення і перетворення Фур'є взаємозв'язані відповідними математичними співвідношеннями, що дозволяють підібрати ефективний спосіб обчислення одного перетворення через інше [165]. Дискретні косинусне/синусне перетворення є подальшим вдосконаленням ДПФ для дійсних вхідних даних, адже комплексне перетворення Фур'є вносить надлишковість у цьому випадку.

Відповідно до теорії ДПФ для тригонометричних перетворень із базисом від 0 до π необхідно продовжити вхідну послідовність вдвічі (рис 3.1). При продовженні вісь симетрії дискретних вибірок (рис. 2.2) може бути на вибірці (парна кількість) або між двома вибірками, що відповідає зсуву на половину інтервалу (непарна кількість) дискретизації.

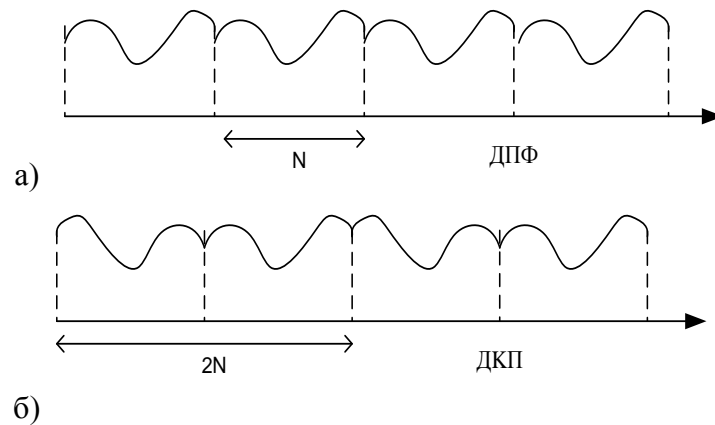


Рисунок 3.1 – Передбачувана періодичність вхідних даних для ДПФ і ДКП

Це дає різні варіанти перетворення дійсного парного або дійсного непарного ДПФ зсувом входу і/або виходу на половину вибірки. Відповідно для крайових умов (рис 3.2) вхідних даних ($j=0, \dots, n-1$), існують ДКП I-IV-го видів:

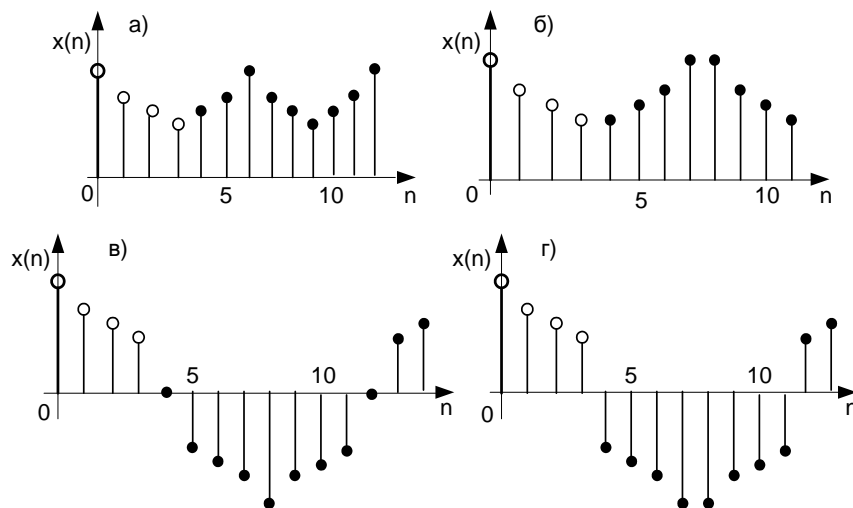


Рисунок 3.2 – Різні продовження послідовності $x(n)$ з 4-х елементів до парної періодичної: а – для ДКП-I; б – для ДКП-II; в – для ДКП-III; г – ДКП-IV

Тобто, маємо варіанти: парна кількість для ДПФ00, $N=2(n-1)$ або для ДПФ00, $N=2(n+1)$; інакше, $N=2n$. Всі продовження парні відносно початку функції, що є необхідною умовою косинусної частини у випадку відповідності ДПФ.

ДПФ 00 (ДКП-I): парне відносно $j=0$ і парне відносно $j=n-1$;

ДПФ 10 (ДКП-II): парне відносно $j=-\frac{1}{2}$ і парне відносно $j=n-\frac{1}{2}$;

ДПФ 01 (ДКП-III): парне відносно $j=0$ і непарне відносно $j=n$;

ДПФ 11 (ДКП-IV): парне відносно $j=-\frac{1}{2}$ і непарне відносно $j=n-\frac{1}{2}$;

Дискретні косинусні перетворення в аналітичній формі набувають вигляду для ДКП-I

$$X^{c1}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^N t_k t_n x(n) \cos\left[\frac{kn\pi}{N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

для ДКП-II

$$X^{c2}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} t_k x(n) \cos\left[\frac{k(2n+1)\pi}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

для ДКП-III

$$X^{c3}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} t_n x(n) \cos\left[\frac{(2k+1)n\pi}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.3)$$

для ДКП-IV

$$X^{c4}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left[\frac{(2k+1)(2n+1)\pi}{4N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.4)$$

де
$$t_j = \begin{cases} 1, & j = 0, N \\ 1/\sqrt{2}, & j \neq 0, N \end{cases}$$

Тому, відповідно, j -та компонента для кожного k -го базисного вектора (з нормалізуючим множником) обсягу n матиме вигляд

ДКП -I: $\cos jk \pi/(n-1)$ (поділене на $\sqrt{2}$ коли j або $k \in 0$ або $n - 1$);

ДКП -II: $\cos (j + 1/2) k \pi/n$ (поділене на $\sqrt{2}$ коли $k = 0$);

ДКП -III: $\cos j(k + 1/2) \pi/n$ (поділене на $\sqrt{2}$ коли $j = 0$);

ДКП -IV: $\cos (j + 1/2) (k + 1/2) \pi/n$.

Існують види ДКП V-VIII, що відповідають при переході до ДПФ непарного обсягу N , де їх незалежний або фізичний обсяг $n \in$ непарний. ДКП V-VIII співвідносяться як непарні перетворення, оскільки одна точка симетрії є на місці цілої вибірки, а інша – на півінтервалі між вибірками. Подання їх базисного вектора можливе зі знаменником $(n - 1/2)$ і $(n+1/2)$ аргумента косинуса, тому що відстань між центрами є не більшою за ціле значення.

ДКП- V: $\cos jk \pi/(n - 1/2)$ крайові умови мають центри $j = 0$ і $(n - 1/2)$;

ДКП- VI: $\cos (j + 1/2)k \pi/(n - 1/2)$ крайові умови мають центри $j = -1/2$ і $(n - 1)$;

ДКП- VII: $\cos j(k + 1/2) \pi/(n - 1/2)$ крайові умови мають центри $j = 0$ і $(n - 1/2)$;

ДКП- VIII: $\cos(j + 1/2)(k + 1/2) \pi / (n + 1/2)$ крайові умови мають центри $j = -1/2$ і n .

Взаємозв'язок прямих та зворотних обчислень ДКП загалом можна подати у вигляді:

$$(\text{ДКП-I}_N)^{-1} = (\text{ДКП-I}_N)^T = (\text{ДКП-I}_N); \quad (3.5)$$

$$(\text{ДКП-II}_N)^{-1} = (\text{ДКП-II}_N)^T = (\text{ДКП-III}_N); \quad (3.6)$$

$$(\text{ДКП-III}_N)^{-1} = (\text{ДКП-III}_N)^T = (\text{ДКП-II}_N); \quad (3.7)$$

$$(\text{ДКП-IV}_N - \text{VIII}_N)^{-1} = (\text{ДКП-IV}_N - \text{VIII}_N)^T = (\text{ДКП-IV}_N - \text{VIII}_N). \quad (3.8)$$

Для ДКП I, IV, V і VIII видів симетричні прямі і зворотні перетворення, а перетворення II і III типу та VI і VII видів переходять одне в інше.

ДКП широко використовують у багатьох прикладних сферах науки та техніки за рядом причин. По-перше, базисні функції ДКП добре апроксимують функції перетворення Карунена-Лоева для широкого класу стаціонарних випадкових процесів [166], тобто дозволяють описувати сигнал із заданою точністю з мінімальним числом компонент. По-друге, ДКП входить як складова у деякі ефективні алгоритми ДПФ, наприклад, алгоритм Капоріна-Уенга [11]. По-третє, ДКП містить особливі властивості завдяки тому, що перетворення сконцентровано у нижніх індексах більш інтенсивніше, і обнулення решти вихідних значень не приводить до суттєвої втрати енергії сигналу, що дозволяє запобігти крайовим ефектам при блочному кодуванні зображень [49], [167]-[172].

Отже, існує 8 видів дискретного косинусного перетворення, що відображають вхідні дані у лінійну комбінацію зважених базисних функцій. Всі види ДКП I-VIII перетворення ортогональні та мають зворотне обчислення [173]. Набір та аналіз вісьми видів ДКП та їх взаємозв'язок з дискретним W перетворенням розглянуто у роботі [37]. Перетворення видів ДКП V-VIII тільки починають досліджувати у напрямі їх застосувань в опрацюванні інформаційних даних, тому у роботі розглянуто синтез алгоритмів ефективного обчислення ДКП I-IV.

Дискретні косинусні перетворення згортки визначаються виразами одного виду перетворень або інших видів. Наприклад,

ДКП-I згортки через добутки ДКП-I (одного виду) послідовностей

$$(\text{ДКП-I})\{x(n) \otimes_c y(n)\} = (\text{ДКП-I})\{x(n)\} \times (\text{ДКП-I})\{y(n)\}; \quad (3.9)$$

ДКП-I згортки через добутки ДКП-II послідовностей визначається виразом

$$(\text{ДКП-I})\{x(n-1) \otimes_c y(n-1)\} = (\text{ДКП-II})\{x(n)\} \times (\text{ДКП-II})\{y(n)\}; \quad (3.10)$$

ДКП-III асиметрично-циклічної згортки через добутки ДСП-IV послідовностей визначається виразом

$$(\text{ДКП-III})\{x(n-1) \otimes_s y(n-1)\} = (\text{ДСП-IV})\{x(n)\} \times (\text{ДСП-IV})\{y(n)\}. \quad (3.11)$$

Отже, щоби за добутком ДКП визначити періодичну згортку потрібно використати різні види ДТП. Тобто, загалом забезпечення переведення операції згортки з області часових вибірок до частотної області використовує операції добутку над одними або різними видами ДТП перетворень послідовностей згортки [129], [174], [175].

У багатьох прикладних завданнях обчислення ДКП та ЗДКП (зворотного) є однією з найтриваліших процедур в інформаційних технологіях, наприклад, при стисненні та відтворенні кадрів зображень. Розглянемо обчислення ДКП I-IV на основі циклічних згорток, що дозволяє підвищити ефективність їх виконання за допомогою програмного та апаратного забезпечення у багатьох прикладних застосуваннях [89].

3.2 Синтез алгоритму обчислення ДКП-I на основі циклічних згорток

3.2.1 Аналіз базисної матриці ДКП-I першого виду

Підхід до визначення дійсного ДКП аналогічний до визначення ДПФ на основі комплексного базису перетворення Фур'є. Обчислення ДПФ ґрунтувалось на перетворенні вхідної послідовності $\tilde{x}_1(n)$ з врахуванням її періодичного продовження (рис. 3.1). Тоді як ДПФ містить неявну

періодичність, у ДКП закладається і періодичність, і парність, де за скінченною послідовністю x_1 будується періодична парна послідовність.

ДКП-I обсягом $N+1$ відповідає виду розширення, який особливо розглядає конкретні крайні значення вибірок скінченної послідовності. На рис. 3.3 показано приклад продовження для $n=4$ -х елементної послідовності, що відповідає крайовим умовам ДКП-I. Вибірки скінченної вхідної послідовності на рис. 3.3 позначено чорними крапками. Всі продовження періодичні і мають властивість парності. У кожному випадку скінченна послідовність легко виділяється як перші чотири елементи періоду та видно парну симетрію відносно точок $n=0$, $n=N-1$, $n = (2N-2)$.

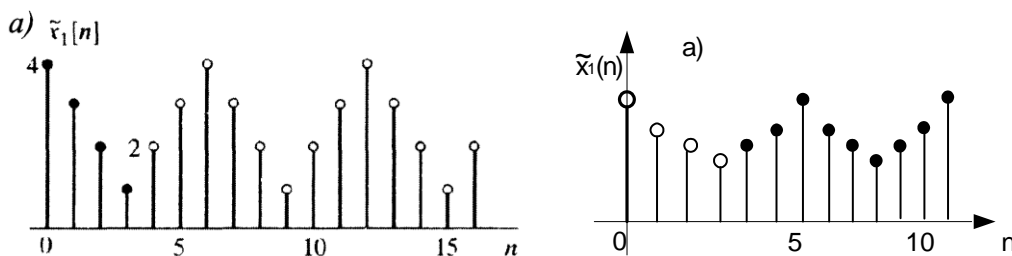


Рисунок 3.3 – Продовження 4-х елементної послідовності, що відповідає ДКП-I

Різниця між продовженнями для ДКП-I та іншими видами ДКП залежить від того, чи *накладаються* одна на одну крайні вибірки зсунутих версій послідовності, і якщо накладаються, то які саме. Для ДКП-I послідовність $x(j)$ спочатку модифікується у крайніх точках $j=0$ та $j=(n-1)$, а далі продовжується до $(2N-2)$ – періодичної послідовності. У результаті періодична послідовність описується формулою (симетрично продовженої послідовності)

$$\tilde{x}_1(n) = x_\alpha [((n))_{2N-2}] + x_\alpha [((-n))_{2N-2}], \quad (3.12)$$

де N -членна дійсна послідовність $x_\alpha[n] = a[n]x[n]$, крайні вибірки якої поділено на 2.

У прикладі (рис. 3.3) реальний період послідовності $x_1[j]$ дорівнює $(2n-2)=6$, причому вона має парну симетрію як відносно $j=0$, так і відносно $j = n-1=3$, що є центрами парної симетрії.

Отже, з одного боку, ДКП-I для обсягу N -членної послідовності ідентичне $(2N-2)$ -точковому ДПФ симетрично продовженої послідовності $x_1(n)$, а з другого – подвоєній дійсній частині перших N членів $(2N-2)$ -точкового ДПФ зваженої послідовності $x_a[n]$.

$$X_1[k] = 2 \operatorname{Re}\{X_\alpha[k]\} = 2 \sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n]x[n] \cos(2\pi kn/(2N-2)) = X^{c1}[k] \quad (3.13)$$

Половинні коефіцієнти крайніх вибірок компенсують подвоєння, що виникає при накладанні двох членів у формулі (3.13) у точках $n = k(2N-2)$ і $n = N-1 + k(2N-2)$ з цілим k . Тобто, має місце рівність: $\tilde{x}_1(n) = x(n)$, для $n=0,1,\dots,N-1$. Періодична послідовність $\tilde{x}_1(n)$ має парну симетрію відносно точок $n=0$, $n=N-1$, $n = 2N-2$ і так далі. У роботі [56] називають такий тип симетрії першим видом періодичної симетрії (рис 3.3), що відповідає ДКП-I.

Дійсно, продовження 4 елементної послідовності, наведене у двох прикладах (рис. 3.3), відповідає симетрії *WSWS* першого виду (табл. 2.1) з розширенням ε [129] для ДКП-I.

Пряме ДКП-I та зворотне ЗДКП-I взаємовідповідні

$$(\text{ДКП}^I_N)^{-1} = (\text{ДКП}^I_N)^T = (\text{ДКП}^I_N) \quad (3.14)$$

Подання ДКП-I у матричній формі має вигляд

$$X = C^I_{N+1} x \quad (3.15)$$

де матриці C^I_{N+1} мають розмірність $(N+1) \times (N+1)$ з індексами за рядками $k=0,\dots,N$ та індексами за стовпцями $n=0,\dots,N$; матриці стовпці вихідних $X(k)$, $k=0,1,\dots,N$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0,1,\dots,N$.

Відповідно, k -та компонента ДКП-I для кожного n -го базисного вектора матиме вигляд

$$c^2_{k,n} = \cos(k \cdot n \cdot \pi/N), \quad (3.16)$$

де $c^2_{k,n}$ – елемент у k -му рядку n -го стовпця відповідного немасштабованого перетворення.

Проаналізуємо структуру матриці базису ДКП-I за аргументами компонентів $c_{k,n}$ ($k,n=0,1,\dots,N$) базисних функцій

$$k \cdot n \cdot \pi/N = c_{k,n} \Delta\varphi, \quad (3.17)$$

де $\Delta\varphi=\pi/N$; $(N+1)$ – ціле значення обсягу ДКП-I.

Функція $\cos(k \cdot n \cdot \pi/N)$ – періодична відносно $2N$ вибірок, тому можна записати на основі базису матрицю аргументів косинусу порядку $(N \times N)$ у вигляді:

$$C_a^I(k,n) = [(k \cdot n) \bmod (2N)]. \quad (3.18)$$

Функція $\cos[(k \cdot n)\pi/N]$ – періодична відносно $2N$, симетрична відносно аргумента π , що відповідає значенню N , асиметрична відносно аргумента $\pi/2$, що відповідає значенню $(N/2)$. Тому спрощена матриця \underline{C}_a^I визначається послідовним виконанням обчислень:

$$c_{k,n} = (c_{k,n}) \bmod 2N; \quad (3.19)$$

$$c_{k,n} = 2N - [(c_{k,n}) \bmod 2N], \text{ якщо } [(c_{k,n}) \bmod 2N] > N, \quad (3.20)$$

$$\underline{c}_{k,n} = N - \{2N - [(c_{k,n}) \bmod 2N]\}, \text{ якщо } \{2N - [(c_{k,n}) \bmod 2N]\} > N/2,$$

$$\underline{c}_{k,n} = N, \text{ якщо } c_{k,n} = N; \quad \underline{c}_{k,n} = 0, \text{ якщо } c_{k,n} = N/2;$$

$$\text{інакше } \underline{c}_{k,n} = c_a(k,n). \quad (3.21)$$

Враховуючи симетричність матриці $C_a^I(k,n)$ аргументів функцій базису ДКП-I відносно осей π та $\pi/2$, їх можна повністю визначити для значень $\underline{c}_{k,n}$, що можуть набувати $0(1)N/2$, але доповнюючи матрицями знаків S_c косинуса.

Матриця знаків косинуса S_c формується на основі елементів матриці (3.26) і визначається за нерівностями:

$$S_c[k,n] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 3N/2 < c_a(k,n) < N/2 \\ 0, & \text{якщо } c_a(k,n) = N/2, 3N/2 \\ -1, & \text{якщо } N/2 < c_a(k,n) < 3N/2, \end{cases} \quad (3.22)$$

де $k=1(1)N-1$, $n=1(1)N-1$.

Наприклад, спрощена матриця \underline{C}_a^I аргументів та доповнююча матриця знаків S_c ДКП-I для обсягу $N=4$ мають значення

$$C_a^I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{C}_a^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_c = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Отже, аналіз та поетапне спрощення базисної матриці аргументів на основі використання властивості періодичності і симетричності базисної функції ДКП-I

дозволяє за спрощеною матрицею C_a^I аргументів та доповнюючої матриці знаків S_c проводити синтез алгоритму обчислення даного виду перетворення. У базисній матриці зі спрощеними аргументами, доповненій матрицею знаків, можна виділити ідентичні підматриці, що приводитимуть до скорочення обчислень ДКП-I.

3.2.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДКП-I на основі циклічних згорток

Розроблений підхід для ефективного обчислення дискретних косинусних перетворень, що базуються на декомпозиції базисної матриці на набір лівоциркулянтних підматриць розглянуто у роботах [176]-[180].

За цим підходом структуру базисної матриці можна задати твірним масивом на основі циклічного розкладу підстановки. Для ДКП-I твірний масив $P(n)$ формується за рядками, сформованими після виконання першої симетрії (3.20). Приклади твірних масивів для обсягів перетворення:

$N=7, k=2$

$P(6) = (1,3,5) (2,6,4); P(6) = (1,5,3) (2,4,6);$

$N=8, k=3, 5$

$P(7) = (1,5,7,3) (2,6) (4); P(7) = (1,3,7,5) (2,6) (4);$

$P(7) = (1,7) (2) (3,5) (4) (6).$

$N=10, k=4, 7$

$P(9) = (1,3,9,7) (2,6) (4,8) (5); P(9) = (1,7,9,3) (2,6) (4,8) (5);$

$P(9) = (1,9) (2) (3,7) (4) (5) (6) (8);$

$N=12, k=7, 8$

$P(11) = (1,5) (2,10) (3,9) (4) (6) (7,11) (8);$

$P(11) = (1,7) (2,10) (3) (4) (5,11) (6) (8) (9);$

$P(11) = (1, 11) (2) (3, 9) (4) (5, 7) (6) (8) (10);$

$N=14, k=4, 5, 10$

$P(13) = (1, 5, 3, 13, 9, 11) (2, 10, 6) (4, 8, 12) (7);$

$P(13) = (1, 11, 9, 13, 3, 5) (2, 6, 10) (4, 12, 8) (7);$

$P(13) = (1, 3, 9) (2, 6, 10) (4, 12, 8) (5, 13, 11) (7);$

$P(13) = (1, 9, 3) (2, 10, 6) (4, 8, 12) (5, 11, 13) (7);$

$P(13) = (1, 13) (2) (3, 11) (4) (5, 9) (6) (7) (8) (10) (12);$

$N=16, k=4, 7, 11$

$P(15) = (1, 3, 9, 5, 15, 13, 7, 11) (2, 6, 14, 10) (4, 12) (8);$
 $P(15) = (1, 5, 7, 3, 15, 11, 9, 13) (2, 10, 14, 6) (4, 12) (8);$
 $P(15) = (1, 11, 7, 13, 15, 5, 9, 3) (2, 10, 14, 6) (4, 12) (8);$
 $P(15) = (1, 13, 9, 11, 15, 3, 7, 5) (2, 6, 14, 10) (4, 12) (8);$
 $P(15) = (1, 7, 15, 9) (2, 14) (3, 11, 13, 5) (4) (6, 10) (8) (12);$
 $P(15) = (1, 9, 15, 7) (2, 14) (3, 5, 13, 11) (4) (6, 10) (8) (12);$
 $P(15) = (1, 15) (2) (3, 13) (4) (5, 11) (6) (7, 9) (8) (10) (12) (14).$

Твірний масив $P(n)$ для ДКП-I, як видно з наведених прикладів, може складатись як з одного підмасиву $P_1(n)$, так і з декількох $P_1(n_1), P_2(n_2), \dots, P_k(n_k)$, що можуть містити однакову або різну кількість елементів.

Твірний масив $P(n)$ задає порядок елементів вхідних даних $x(n)$ при обчисленні для ДКП-I.

Властивості симетрії та періодичності базису перетворення ДКП-I за виразами (3.19 - 3.21) приводять до подання $P(n)$ у вигляді спрощеного твірного масиву $P'(n)$, що містить менші значення елементів, з доповненням відповідним масивом знаків $S(n)$. Масив знаків $S(n)$ містить набір значень елементів зі значеннями $+1, -1, 0$. Приклади спрощених твірних масивів $P'(n)$ і відповідних масивів знаків $S(n)$ для обсягу перетворення:

$N=7,$

$P(6) = (1, 3, 5) (2, 6, 4); \quad P(6) = (1, 5, 3) (2, 4, 6);$
 $P'(6) = (1, 3, 2) (2, 1, 3); \quad P'(6) = (1, 2, 3) (2, 3, 1);$
 $S(6) = (+, +, -) (+, -, -); \quad S(6) = (+, -, +) (+, -, -).$

$N=8,$

$P(7) = (1, 5, 7, 3) (2, 6) (4); \quad P(7) = (1, 3, 7, 5) (2, 6) (4);$
 $P'(7) = (1, 3, 1, 3) (2, 2) (4); \quad P'(7) = (1, 3, 1, 3) (2, 2) (4);$
 $S(7) = (+, -, -, +) (+, -) (0); \quad S(7) = (+, +, -, -) (+, -) (0).$
 $P(7) = (1, 7) (2) (3, 5) (4) (6);$
 $P(7) = (1, 1) (2) (3, 3) (4) (4);$
 $S(7) = (+, -)(+) (+, -)(0)(-).$

$N=10$

$P(9) = (1, 3, 9, 7) (2, 6) (4, 8) (5); \quad P(9) = (1, 7, 9, 3) (2, 6) (4, 8) (5);$
 $P'(9) = (1, 3, 1, 3) (2, 4) (4, 2) (5); \quad P'(9) = (1, 3, 1, 3) (2, 4) (4, 2) (5);$
 $S(9) = (+, +, -, -) (+, -) (+, -) (0); \quad S(9) = (+, -, -, +) (+, -) (+, -) (0);$
 $P(9) = (1, 9) (2) (3, 7) (4) (5) (6) (8);$
 $P'(9) = (1, 1) (2) (3, 3) (4) (5) (4) (2);$
 $S(9) = (+, -) (+) (+, -)(+) (0) (-) (-).$

$N=12$

$P(11) = (1, 5) (2, 10) (3, 9) (4) (6) (7, 11) (8); \quad P(11) = (1, 7) (2, 10) (3) (4) (5, 11) (6) (8) (9);$

$P'(11) = (1, 5) (2, 2) (3, 3) (4) (6) (5, 1) (4)$; $P'(11) = (1, 5) (2, 2) (3) (4) (5, 1) (6) (4) (3)$;
 $S(11) = (+, +) (+, -) (+, -) (+) (0) (-, -) (-)$; $S(11) = (+, -) (+, -) (+) (+) (+, -) (0) (-) (-)$;
 $P(11) = (1, 11) (2) (3, 9) (4) (5, 7) (6) (8) (10)$;
 $P'(11) = (1, 1) (2) (3, 3) (4) (5, 5) (6) (4) (2)$;
 $S(11) = (+, -) (+) (+, -) (+) (+, -) (0) (-) (-)$.

N=14

$P(13) = (1, 3, 9) (2, 6, 10) (4, 12, 8) (5, 13, 11) (7)$;
 $P'(13) = (1, 3, 5) (2, 6, 4) (4, 2, 6) (5, 1, 3) (7)$;
 $S(13) = (+, +, -) (+, +, -) (+, -, -) (+, -, -) (0)$;

$P(13) = (1, 5, 3, 13, 9, 11) (2, 10, 6) (4, 8, 12) (7)$;
 $P'(13) = (1, 5, 3, 1, 5, 3) (2, 4, 6) (4, 6, 2) (7)$;
 $S(13) = (+, +, +, -, -, -) (+, -, +) (+, -, -) (0)$;

$P(13) = (1, 9, 3) (2, 10, 6) (4, 8, 12) (5, 11, 13) (7)$;
 $P'(13) = (1, 5, 3) (2, 4, 6) (4, 6, 2) (5, 3, 1) (7)$;
 $S(13) = (+, -, +) (+, -, +) (+, -, -) (+, -, -) (0)$;

$P(13) = (1, 11, 9, 13, 3, 5) (2, 6, 10) (4, 12, 8) (7)$;
 $P'(13) = (1, 3, 5, 1, 3, 5) (2, 6, 4) (4, 2, 6) (7)$;
 $S(13) = (+, -, -, -, +, +) (+, +, -) (+, -, -) (0)$;
 $P(13) = (1, 13) (2) (3, 11) (4) (5, 9) (6) (7) (8) (10) (12)$;
 $P'(13) = (1, 1) (2) (3, 3) (4) (5, 5) (6) (7) (6) (4) (2)$;
 $S(13) = (+, -) (+) (+, -) (+) (+, -) (+) (0) (-) (-) (-)$;

N=16

$P(15) = (1, 3, 9, 5, 15, 13, 7, 11) (2, 6, 14, 10) (4, 12) (8)$;
 $P'(15) = (1, 3, 7, 5, 1, 3, 7, 5) (2, 6, 2, 6) (4, 4) (8)$;
 $S(15) = (+, +, -, +, -, -, +, -) (+, +, -, -) (+, -) (0)$;

$P(15) = (1, 5, 7, 3, 15, 11, 9, 13) (2, 10, 14, 6) (4, 12) (8)$;
 $P'(15) = (1, 5, 7, 3, 1, 5, 7, 3) (2, 6, 2, 6) (4, 4) (8)$;
 $S(15) = (+, +, +, +, -, -, -, -) (+, -, -, +) (+, -) (0)$;

$P(15) = (1, 7, 15, 9) (2, 14) (3, 11, 13, 5) (4) (6, 10) (8) (12)$;
 $P'(15) = (1, 7, 1, 7) (2, 2) (3, 5, 3, 5) (4) (6, 6) (8) (4)$;
 $S(15) = (+, +, -, -) (+, -) (+, -, -, +) (+) (+, -) (0) (-)$;

$P(15) = (1, 9, 15, 7) (2, 14) (3, 5, 13, 11) (4) (6, 10) (8) (12)$;
 $P'(15) = (1, 7, 1, 7) (2, 2) (3, 5, 3, 5) (4) (6, 6) (8) (4)$;
 $S(15) = (+, -, -, +) (+, -) (+, +, -, -) (+) (+, -) (0) (-)$;

$P(15) = (1, 11, 7, 13, 15, 5, 9, 3) (2, 10, 14, 6) (4, 12) (8)$;
 $P'(15) = (1, 5, 7, 3, 1, 5, 7, 3) (2, 6, 2, 6) (4, 4) (8)$;

$$S(15) = (+, -, +, -, -, +, -, +) (+, -, -, +) (+, -) (0);$$

$$P(15) = (1, 13, 9, 11, 15, 3, 7, 5) (2, 6, 14, 10) (4, 12) (8);$$

$$P'(15) = (1, 3, 7, 5, 1, 3, 7, 5) (2, 6, 2, 6) (4, 4) (8);$$

$$S(15) = (+, -, -, -, -, +, +, +) (+, +, -, -) (+, -) (0);$$

$$P(15) = (1, 15) (2) (3, 13) (4) (5, 11) (6) (7, 9) (8) (10) (12) (14);$$

$$P'(15) = (1, 1) (2) (3, 3) (4) (5, 5) (6) (7, 7) (8) (6) (4) (2);$$

$$S(15) = (+, -) (+) (+, -)(+) (+, -) (+) (+, -)(0) (-) (-) (-).$$

Значення параметрів спрощеного твірною масиву $P'(n) = P'(n_1)P'(n_2) \dots P'(n_k)$ для даного обсягу N і виду перетворення визначаються:

- k – кількістю підмасивів у твірному масиві $P'(n) = P'(n_1)P'(n_2) \dots P'(n_k)$;
- (L_1, L_2, \dots, L_k) – кількістю елементів кожного твірною підмасиву;
- повторюваністю груп елементів кожного твірною підмасиву;
- $n_{i1}, i=1(1)k$ – першим елементом кожного твірною підмасиву.

Наприклад, базисна матриця ДКП-I обсягу $N=17$ описується твірною масивом

$$P(n) = (1, 13, 16, 4)(2, 9, 15, 8)(3, 5, 14, 12)(6, 10, 11, 7),$$

що має такі значення параметрів:

$$k=4; n = n_1+n_2+n_3+n_4 = 4+4+4+4 = 16;$$

$$L_1=L_2=L_3=L_4=4; n_{11}=1, n_{21}=2, n_{31}=3, n_{41}=6.$$

Відповідний спрощений твірною масив $P'(n)$ та масив знаків $S(n)$ будуть:

$$P'(n) = (1, 4, 1, 4)(2, 8, 2, 8)(3, 5, 3, 5)(6, 7, 6, 7),$$

$$S(n) = (+, -, -, +)(+, -, -, +)(+, +, -, -)(+, -, -, +).$$

Спрощений твірною масив $P'(n)$ містить повторюваність груп елементів у кожному твірною підмасиві.

Наступним кроком синтезу в алгоритмі обчислення ДКП-I є визначення ідентичних циклічних підматриць на основі значень параметрів твірною масиву $P(n)$ і спрощеного твірною масиву $P'(n)$ та масиву знаків $S(n)$. Елементи у $P'(n)$ можуть набувати значень, що повторюються групами з кількістю $n/2$, але при цьому необхідно враховувати ще повторення груп значень знаків у відповідному масиві $S(n)$.

У пункті 2.3.2 описано ефективніший метод аналізу структури базису перетворення на основі твірного масиву [161].

Отже, твірні масиви $P(n)$ та $P'(n)$, $S(n)$ задають структуру матриць аргументів і матриць знаків, які у сукупності становлять цілісність базису ДКП-I. Деякі з підматриць у базисній матриці C_{N+1}^I можуть починатися з проміжних елементів у твірних підмасивах $P(n_k)$. Підмасиви твірного масиву $P(n)$ формують Ганкелеві циклічні підматриці у базисній квадратній матриці C_{N+1}^I , що веде до обчислення циклічних згорток для значень базису з аргументами $S(n)P'(n)$ та вхідних даних.

Під час синтезу алгоритму за обчисленим $P(n)$ визначається порядок розміщення елементів вхідної послідовності $x(n)$ та обчисленої вихідної $X(n)$. За допомогою $P(n)$ визначаємо $s_{i,j}$ $c_{i,j}$ знак і значення першого спрощеного елемента підматриць для виконання аналізу та відбору однакових підматриць у структурі базису. Спрощений твірний масив $P'(n)$ збільшує повторюваність структурних елементів квадратної базисної матриці C_{N-1}^I для кожного конкретного обсягу перетворень N , що приводить до ефективнішого обчислення ДКП-I.

Отже, серед основних *особливостей*, які необхідно враховувати у процесі синтезу алгоритму ДКП-I, можна зазначити:

- розмірність матриці аргументів $(N-1) \times (N-1)$ з одним надлишковим елементом $(N-1)$ рядка та стовпця;
- твірний масив $P(n)$ формується після виконання першої симетрії $(2N-z, z > N)$;
- послідовність вхідних значень $[x]$ за твірним масивом із присвоєнням значення для $x(N-1)=0$;
- обчислені вихідні значення $X(i)$ без $x(0)$, $x(N-1)$;
- антисиметричність вихідних значень (однакові, але з протилежним знаком);
- особливість циклічних згорток, змішана (суцільна або з двома групами ідентичних елементів);
- кількість варіантів твірних масивів більше одного;
- для парних $2p$ значень обсягу перетворення наявна одна вісь симетрії $[\pi]$;

– для N значень обсягу кратних чотирьом $4p$ наявні такі осі симетрії $[\pi/2, \pi, 3\pi/2]$.

Значення аргументів базису у межах $(0, 2\pi)$, що належить до перерахованих осей симетрії вказано у табл. 3.1, де p – просте число.

Таблиця 3.1 – Осі симетрії для обсягів ДКП-I

0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	Осі симетрії для обсягів	
0	$N/2$	N	$3N/2$	$2N$	$2p-N$	$4p - N/2, N, 3N/2$

3.2.3 Приклад обчислення ДКП-I обсягу $N=15$ на основі циклічних згорток

Вірогідність теоретичних викладок принципів та етапів синтезу з врахуванням особливостей розглянемо на конкретному прикладі. Формула обчислення ДКП-I для обсягу $N=15$ має вигляд

$$X(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} [x(0) + (-1)^n x(14)] + \sum_{k=1}^{13} x(k) \cos\left(\frac{kn\pi}{14}\right), \quad n = 1, \dots, 13 \quad (3.24)$$

де вхідна послідовність $x(k)$, $k=0,1,\dots,N-1$, вихідні значення $X(0)$, $X(N-1)$ – обчислюються окремо через додавання.

Відповідно визначеним етапам синтезу алгоритму розглянемо приклад узагальненої схеми визначення ідентичних циклічних підматриць для обчислення ДКП-I обсягу $N=15$. Обсяг перетворення розкладається $N=15=3 \cdot 5$ на прості множники, і елементами твірного масиву можуть бути значення $n_{ij} = (1, \dots, 14)$.

Сформоване значення твірного масиву за підстановкою:

$$P(14) = P(n_1)P(n_2)P(n_3)P(n_4) = (1, 2, 4, 8)(14, 13, 11, 7)(6, 12, 9, 3)(10, 5);$$

$$P'(14) = (1, 2, 4, 7)(1, 2, 4, 7)(6, 3, 6, 3)(5, 5),$$

$$S(n) = (+, +, +, -)(-, -, -, +)(+, -, -, +)(+, -).$$

Твірний масив складається з підмасивів $P(n_3)$, $P(n_4)$, які містять елементи кратні 3, 5, що задають ідентичні циклічні структури в базисній матриці перетворення.

Визначення параметрів :

$k = 4$ – кількість підмасивів у твірному масиві;

$L_1=4, L_2=4, L_3=4, L_4=2$ – кількість елементів у підмасивах $P(n_i)$;

$m \geq k^2$ загальна кількість підматриць: $m=9+(2*7-1)=22$.

Відповідність координат (i, j) елементам твірного масиву $P(n_i)$ та $P'(n_i)$:

(i, j)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$P(14)$	(1, 2, 4, 8)	(14, 13, 11, 7)	(6, 12, 9, 3)	(10, 5)										
$P'(14)$	(1, 2, 4, 7)	(1, 2, 4, 7)	(6, 3, 6, 3)	(5, 5)										

Координати перших елементів підматриць визначаються за $(i+L_i), (j+L_i)$, де L_i – вибирається за приналежності до твірного підмасиву значень перших елементів підматриць у матричній структурі. Знак і значення першого елементу підматриць обчислюються за відповідністю координат (i, j) елементам $P(n)$ твірного масиву $(n_i \times n_j) \bmod 2N$, а у випадку одержання значення, більшого за N , спрощується за виразом $2N - [(n_i \times n_j) \bmod 2N]$ і подано у табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Матриця координат та значення перших елементів зі знаком підматриць аргументів базису ДКП-I $N=15$

$(i+L_i, j+L_i) - n_{ij}$ (координати рядок/стовпець) – знак і значення першого елементу підматриць						
$(1,1) - +1;$		$(1,5) - -1;$		$(1,9) - +6;$		$(1, 13) - +5;$
						$(3, 13) - +5;$
$(5,1) - -1;$		$(5,5) - +1;$		$(5,9) - -6;$		$(5, 13) - -5;$
						$(7, 13) - -5;$
$(9,1) - +6;$		$(9,5) - -6;$		$(9,9) - +6;$		$(9, 13) - 0;$
						$(11, 13) - 0;$
$(13,1) - +5;$	$(13,3) - +5;$	$(13,5) - -5;$	$(13,7) - -5;$	$(13,9) - 0;$	$(13,11) - 0;$	$(1, 13) - -5;$

Визначають ідентичні циклічні підматриці за координатами перших елементів підматриць горизонтально, у випадку рівності значень спрощених перших елементів підматриць:

$(1,1) - +1; (1,5) - -1$ для $P(n_1), P(n_2) = (1, 2, 4, 7)$;

$(5,1) - -1; (5,5) - +1$ для $P(n_1), P(n_2) = (1, 2, 4, 7)$ – антисиметричні значення.

$[x(1), x(2), x(4), x(8)] - [x(14)=0, x(13), x(11), x(7)]$ – поелементне об'єднання вхідних даних, враховуючи особливість ДПК-I присвоюємо для $x(14)=0$.

Для координат рядків, кратних *простим множникам* розкладу обсягу $N = 15=3 \cdot 5$ за структурою базису (табл. 3.4), виконуємо об'єднання вхідних даних горизонтально:

$(9,1) - +6; (9,5) - -6; (9,9) - +6$ для $P(n_3) = (6, 3, 6, 3)$,

$[x(1), x(2), x(4), x(8)] - [x(14)=0, x(13), x(11), x(7)] + [x(6), x(12), x(9), x(3)]$

– поелементне об'єднання вхідних даних;

$(13,1) - +5; (13,3) - +5; (13,5) - -5; (13,7) - -5; (1, 13) - -5$ для $P(n_4) = (5, 5)$,

$[x(1), x(2)] + [x(4), x(8)] - [x(14)=0, x(13)] - [x(11), x(7)] - [x(13), x(14)=0]$

– поелементне об'єднання вхідних даних.

Виконання поелементних додавань вхідних значень подається розширено для розуміння алгоритму, які будуть використовуватись для обчислення циклічних згорток при аналізі вертикально.

Відбір за координатами перших елементів однакових підматриць вертикально :

$(1,1) - +1$; для $P(n_1) = (1, 2, 4, 7)$ і поелементне об'єднаних даних:

$[x(1), x(2), x(4), x(8)] - [x(14)=0, x(13), x(11), x(7)]$;

$(9,1) - +6$; для $P(n_3) = (6, 3, 6, 3)$ і поелементне об'єднаних даних:

$[x(1), x(2), x(4), x(8)] - [x(14)=0, x(13), x(11), x(7)] + [x(6), x(12), x(9), x(3)]$;

$(13,1) - +5$; для $P(n_4) = (5, 5)$, і поелементне об'єднаних даних:

$[x(1), x(2)] + [x(4), x(8)] - [x(14)=0, x(13)] - [x(11), x(7)] - [x(13), x(14)=0]$.

Для координат стовпців, кратних *простим множникам* розкладу обсягу $N = 15=3 \cdot 5$, у структурі виконуємо обчислення циклічних згорток при аналізі підматриць вертикально:

$(1,9) - 6$; для $P(n_3) = (6, 3, 6, 3)$ (симетрична) і даних $[x(6), x(12), x(9), x(3)]$;

$(1,13) - +5$; для $P(n_4) = (5, 5)$ і даних $[x(13), x(14)=0]$.

Для решти незадіяних підматриць виконуються циклічні згортки за своїми параметрами на основі визначених координат, яких у табл. 3.4 немає.

Матриця координат та значень перших елементів зі знаком у процесі визначення ідентичних підматриць у горизонтальних та вертикальних *кратних простим множникам* структурах базису може бути скорочена, що дає змогу зменшити обсяг пам'яті для зберігання значень знака та спрощених перших елементів циклічних підматриць. Наприклад, для $P(n_3) = (6, 3, 6, 3)$ облік горизонтальних рядків починається від елемента (9,1) із нарощенням (9,5), (9,9) для та вертикальних – від елемента(1,9) із нарощенням (5,9), (9,9).

Об'єднання результатів згорток виконують горизонтально на основі відповідних координат перших елементів підматриць:

- результат 4-точкової згортки з координатами (1,1) додається до результату 2-точкової згортки з (1,9) з групою ідентичних елементів і додається до одноточкового добутку (1,13), а попереднє об'єднання результатів згорток відповідає з протилежним знаком ще трьом вихідним значенням без $X^{CI}(14)$;
- результат 2-точкової згортки з групою ідентичних елементів із координатами (9,1) додається до об'єднаних вхідних даних, і попереднє об'єднання результатів згорток відповідає з протилежним знаком ще двом вихідним значенням;
- результат одноточкового добутку з координатами (13,1) додається до об'єднаних вхідних даних $[x(6)+x(12)+x(9)+x(3)]$ і відповідає з протилежним знаком ще одному вихідному значенню.

Додаємо $[x(0)+(-1)^k x(14)]/\sqrt{2}$ до всіх об'єднаних значень, у результаті одержані вихідні значення перетворення відповідають порядку відповідно до значень твірного масиву:

$X^{CI}(1), X^{CI}(2), X^{CI}(4), X^{CI}(8), X^{CI}(14)$ -не обчислюємо, $X^{CI}(13), X^{CI}(11), X^{CI}(7), X^{CI}(6), X^{CI}(12), X^{CI}(9), X^{CI}(3), X^{CI}(10), X^{CI}(5)$.

Відповідність табл. 3.2 повним матрицям спрощених аргументів \underline{C}_a^I та знаків S_c подано у табл. 3.3.

Таблиця 3.3 – Матриці спрощених аргументів C_a^I та знаків Sc ДКП-I N=15

k^n	1:	2:	4:	8:	14:	13:	11:	7:	6:	12:	9:	3:	5:	10:
1:	1	2	4	7	1	2	4	7	6	3	6	3	5	5
2:	2	4	7	1	2	4	7	1	3	6	3	6	5	5
4:	4	7	1	2	4	7	1	2	6	3	6	3	5	5
8:	7	1	2	4	7	1	2	4	3	6	3	6	5	5
14:	1	2	4	7	1	2	4	7	6	3	6	3	5	5
13:	2	4	7	1	2	4	7	1	3	6	3	6	5	5
11:	4	7	1	2	4	7	1	2	6	3	6	3	5	5
7:	7	1	2	4	7	1	2	4	3	6	3	6	5	5
6:	6	3	6	3	6	3	6	3	6	3	6	3	0	0
12:	3	6	3	6	3	6	3	6	3	6	3	6	0	0
9:	6	3	6	3	6	3	6	3	6	3	6	3	0	0
3:	3	6	3	6	3	6	3	6	3	6	3	6	0	0
5:	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	5	5
10:	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	5	5

k^n	1:	2:	4:	8:	14:	13:	11:	7:	6:	12:	9:	3:	5:	10:
1:	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-
2:	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	+	+	-	+
4:	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	-	+	-
8:	-	+	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+
14:	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+
13:	-	-	+	-	+	+	-	+	+	+	-	-	+	-
11:	-	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+
7:	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-
6:	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	0	0
12:	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	0	0
9:	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	0	0
3:	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	0	0
5:	+	-	+	-	-	+	-	+	0	0	0	0	-	+
10:	-	+	-	+	+	-	+	-	0	0	0	0	+	-

Число циклічних згорток і векторних об'єднань, необхідне для обчислення дискретного косинусного перетворення, можна подати у вигляді структурної схеми. Наприклад, обчисленню ДКП-I для обсягу N=15 відповідає структурна схема, подана на рис. 3.4.

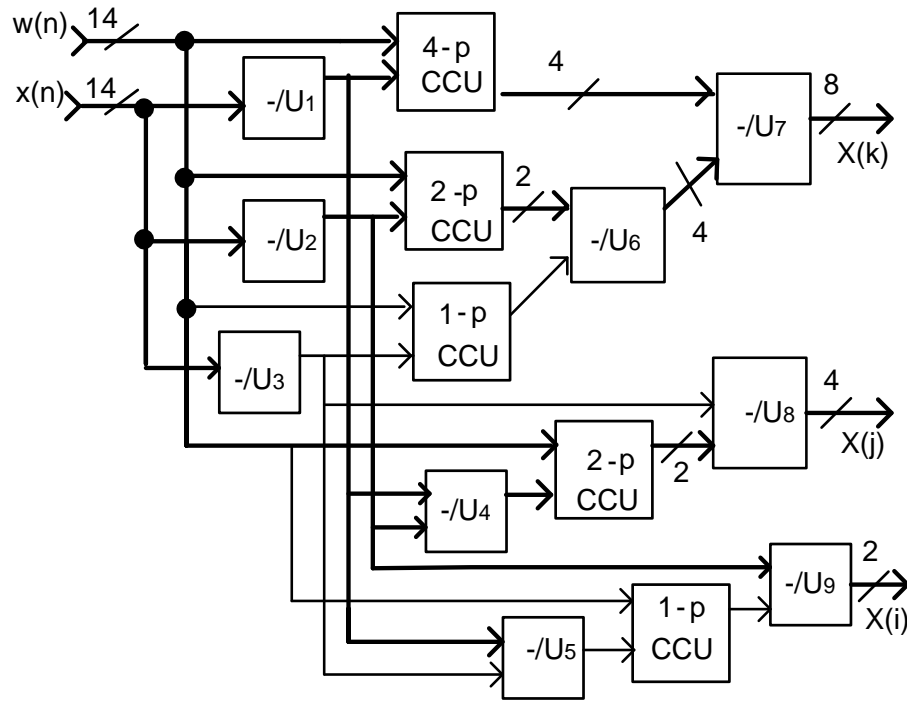


Рисунок 3.4 – Структурна схема обчислення ДКП-I
для обсягу перетворення $N=15$

Структурна схема (рис. 3.4) складається: \pm/U_{1-5} – блоків поелементного об'єднання вхідних даних; \pm/U_{6-9} – блоків об'єднання результатів згортки; CCU – блоки r -точкової циклічної згортки.

Послідовність коефіцієнтів базису ДКП-I перетворення:

$w(n) = \{\cos(\varphi), \cos(2\varphi), \cos(4\varphi), \cos(8\varphi), \cos(14\varphi), \cos(13\varphi), \cos(11\varphi), \cos(7\varphi), \cos(6\varphi), \cos(12\varphi), \cos(9\varphi), \cos(3\varphi), \cos(10\varphi), \cos(5\varphi)\}$, де $\varphi = \pi/15$.

Послідовність вхідних даних:

$x(n) = \{x(1), x(2), x(4), x(8), x(14)=0, x(13), x(11), x(7), x(6), x(12), x(9), x(3), x(10), x(5)\}$, які поелементно об'єднуються у блоках \pm/U_{1-5} .

Вихідні значення перетворення визначаються у блоках $\pm/U_{6,7,8}$ без врахування $x(0)$, $x(N)$, відповідно до аналізу структури базисної матриці перетворення горизонтально. Одержані вихідні значення перетворення відповідають порядку відповідно до значень твірного масиву без врахування значень $X(0)$, $X(N-1)$.

Отже, за твірним масивом, що стисло описує базисну матрицю аргументів, переставлення вхідних елементів послідовності і відповідної структуризації

базисної матриці до блочно-циклічних структур обчислюється ДКП-I за допомогою ефективних алгоритмів циклічної згортки.

3.3 Синтез алгоритму обчислення ДКП-II та ДКП-III на основі циклічних згорток

3.3.1 Аналіз базисної матриці ДКП-II та ДКП-III видів

Обґрунтування ДКП-II проводиться обчисленням ДПФ для випадку періодичного продовження скінченної вхідної послідовності, яке виражається у вигляді лінійної комбінації комплексних експонент. Тоді як ДПФ містить неявну періодичність, у ДКП закладається і періодичність, і парність. Для ДКП-II послідовність $x[n]$ продовжується до $2N$ -періодичної за правилом:

$$\tilde{x}_2(n) = x[((n))_{2N}] + x[(-(n-1))_{2N}]. \quad (3.25)$$

Оскільки накладень крайніх вибірок не відбувається, то рівність $x(n) = \tilde{x}_2(n)$, при $n=0,1,\dots,N-1$ виконано і для немодифікованої послідовності. Таке продовження називають періодичною симетрією другого виду (рис. 3.5), центри парної симетрії послідовності розміщені у «половинних вибірках»: $-1/2$, $(N-1/2)$, $(2N-1/2)$ і т. д.

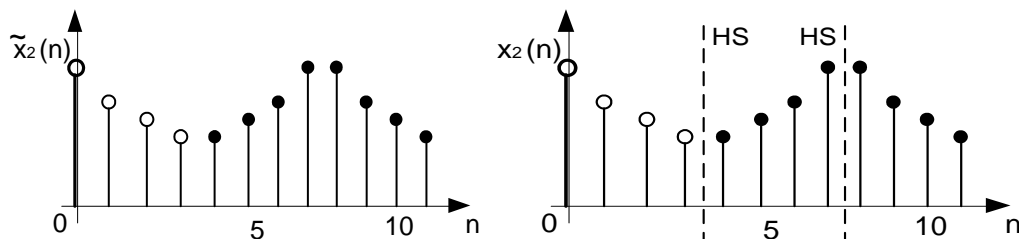


Рисунок 3.5 – Продовження 4 елементної послідовності, що відповідає ДКП-II

У роботі [129] таку симетрію ε позначають *HS* половинна симетрія, тобто вісь симетрії проходить між крайніми вибірками. Для ДКП-II відповідає набір симетрій, поданих у табл. 2.1 та на рис. 3.5.

Пряме і зворотне ДКП-II можна подати формулами

$$Y(n) = a(n) \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cos\left[\frac{(2m+1)n\pi}{2N}\right] = \sum_{m=0}^{N-1} c(n,m)x(m), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.26)$$

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)Y(n) \cos\left[\frac{(2n+1)m\pi}{2N}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} Y(n)c(n,m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.27)$$

Продовження послідовності з періодичною симетрією ε (табл. 2.1) виду *WSWA* відповідають ДКП-III. Цю симетрію (рис. 3.6) позначають *WS* повна симетрія, тобто вісь симетрії проходить між крайніми вибірками і *WA* повна асиметрія, де вибірки розміщуються асиметрично [129].

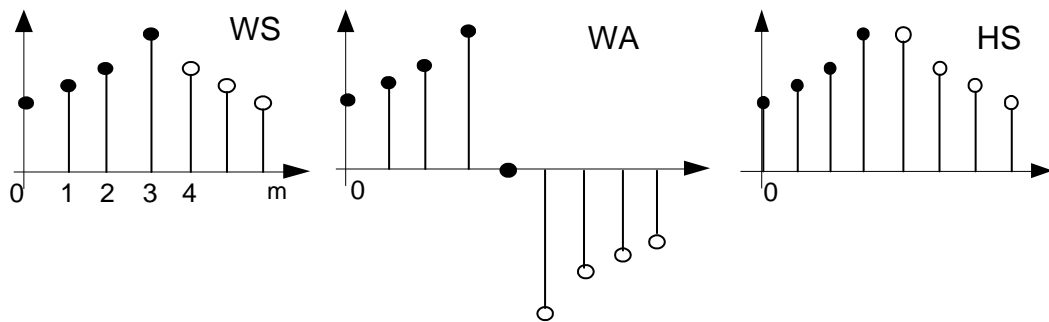


Рисунок 3.6 – Приклади симетрій *WS*, *WA*, *HS* для 4 елементної послідовності

Продовження послідовності з періодичною симетрією (табл. 2.1) виду *WAWSWA*, що відповідає ДКП-III для 4-х елементної послідовності, подано на рис. 3.7.

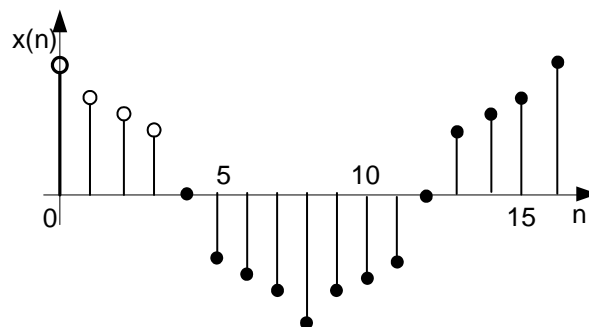


Рисунок 3.7 – Симетрія *WAWSWA* відповідає ДКП-III для 4 елементної послідовності

Аналіз крайових значень ДКП-III 4 елементної послідовності (рис. 3.7) з періодичною симетрією виду *WSWA* показує, що вихідні значення мають періодичну симетрію другого виду *HSHS*.

Тобто,

$$(\text{ДКП}_{II}^N)^{-1} = (\text{ДКП}_{II}^N)^T = (\text{ДКП}_{III}^N); \quad (3.28)$$

$$(\text{ДКП}_{III}^N)^{-1} = (\text{ДКП}_{III}^N)^T = (\text{ДКП}_{II}^N), \quad (3.29)$$

дискретні тригонометричні перетворення ДКП-II і ДКП-III взаємообернені.

Для ДКП-II пряме $X^{c2}(k)$ і ДКП-III пряме $X^{c3}(k)$ перетворення описуються формулами

$$X^{c2}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left[\frac{(2n+1)k\pi}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.30)$$

$$X^{c3}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left[\frac{(2k+1)n\pi}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.31)$$

Формули (3.30) та (3.31) відрізняються порядком аргументів косинуса.

Проаналізуємо базисні матриці ДКП-II, ДКП-III. Подання ДКП-II у матричній формі

$$X = C_{II}^N x, \quad (3.32)$$

де матриці C_{II}^N мають розмірність $(N \times N)$ з індексами для рядків $k = 0, \dots, N-1$ та індексами для стовпців $n = 0, \dots, N-1$.

Матриці C_{II}^N ортогональні: $C_{II}^{N-1} = C_{II}^{N T}$, тобто $(C_{II}^{N T} X C_{II}^N) = I$ і дійсні $C_{II}^N = C_{II}^{N*}$. Відповідно $c'_{k,n}$ k -та компонента ДКП-II для кожного n -го базисного вектора матиме вигляд

$$c'_{k,n} = \cos [k(2n+1) \pi / (2N)]. \quad (3.33)$$

Проаналізуємо структуру елементів матриці базису ДКП-II за аргументами компонентів $c_{k,n}$ ($k, n = 0, 1, \dots, N-1$) базисного перетворення

$$k(2n+1) \pi / 2N = c_{k,n} \Delta\varphi, \quad (3.34)$$

де $\Delta\varphi = \pi / (2N)$ для цілого значення N обсягу ДКП-II.

Функція $\cos[k(2n+1)\pi / (2N)]$ – періодична відносно $4N$ вибірок, тому можна записати базисну матрицю аргументів косинусу порядку $(N \times N)$ у вигляді:

$$C_a^{II}(k, n) = [(k(2n+1) \bmod (4N))], \quad (3.35)$$

де $c_a(k,n) = k(2n+1)$ – значення аргументів матриці за $k=0(1)N-1$ рядку та $n=0(1)N-1$ стовпцю.

З елементів $c_a(k,n)$ одержаної матриці C_a (3.35) виділяємо значення, більші за $2N$, і спрощуємо, враховуючи симетрію базису відносно π , за виразом

$$c_a = \begin{cases} 4N - c_a(k,n), & \text{якщо } c_a(k,n) > 2N ; \\ c_a(k,n), & \text{якщо } c_a(k,n) \leq 2N , \end{cases} \quad (3.36)$$

де $(k,n = 0,1,\dots,N-1)$.

Функція $\cos[k(2n+1)\pi/2N]$ – періодична відносно $4N$, симетрична відносно аргумента $2N$, що відповідає значенню π , асиметрична відносно аргумента N , що відповідає значенню $\pi/2$. Тому спрощена матриця C_a^{II} визначається послідовним виконанням обчислень

$$c_{k,n} = c_a(k,n) \bmod 4N; \quad (3.37)$$

$$c_{k,n} = 4N - [c_a(k,n) \bmod 4N], \text{ якщо } [c_a(k,n) \bmod 4N] > 2N; \quad (3.38)$$

$$\underline{c}_{k,n} = 2N - \{4N - [c_a(k,n) \bmod 4N]\}, \text{ якщо } \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N]\} > N, \quad (3.39)$$

інакше $\underline{c}_{k,n} = c_{k,n}$.

Спрощена матриця C_a доповнюється матрицею знаків Sc косинуса, що формується на основі елементів матриці (3.65) і визначається за нерівностями:

$$Sc[k,n] = \begin{cases} +1, & \text{if } 3N < c_{k,n} < N \\ 0, & \text{if } c_{k,n} = N, 3N \\ -1, & \text{if } N < c_{k,n} < 3N \end{cases}, \quad (3.40)$$

де $k=0(1)N-1, n=0,1,\dots,N-1$.

Наприклад, аргументи ДКП-II для $N=4$ мають значення

$$C_a^{\text{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \quad \underline{C}_a^{\text{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad Sc = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

На рис. 3.8 показано симетрію розміщення значень знаків косинусної матриці Sc , де схематичне зображення $+ | + -$ відповідає симетричному відображенню значень косинуса з віссю між стовпцями $(2N-1)$ і $2N$; схематичне

зображення - |+ є антисиметричне відображення значень рядків з віссю між стовпцями (N-1) і N матриці значень знаків косинуса. Маємо також симетричне відображення (рис. 3.8) значень парних і непарних рядків з віссю між рядками (N/2-1) для значень у квадраті (NxN).

	1	N	2N	4N-1
1		-	+	
N	+	-	+	
2N				
4N-1	+		+	

Рисунок 3.8 – Симетричність розміщення елементів у матрицях знаків Sc ДКП-II, де “+” відзначено симетричні знаки квадратів, “-” відзначено антисиметричні

Подання ДКП -III у матричній формі

$$X = C_N^{III} x \quad , \quad (3.42)$$

де матриці C_N мають розмір (N×N) з індексами для рядків $k = 0, 1, \dots, N-1$ та індексами для стовпців $n=0, 1, \dots, N-1$.

Відповідно $c'_{k,n}$ k-та компонента ДКП-III для кожного n-го базисного вектора матиме вигляд

$$c'_{k,n} = \cos [(2k+1)n \pi / (2N)], \quad (3.43)$$

Проаналізуємо структуру елементів матриці базису ДКП-III за аргументами компонентів $c_{k,n}$ ($k, n=0, 1, \dots, N-1$) базисного перетворення

$$(2k+1)n \pi / 2N = c_{k,n} \Delta\phi, \quad (3.44)$$

де $\Delta\phi = \pi / (2N)$ для цілого значення N обсягу ДКП-III.

Функція $\cos[(2k+1)n\pi/2N]$ періодична відносно 4N вибірок, тому можна записати на основі базису матрицю аргументів косинусу порядку (N×N) у вигляді:

$$C_a^{II}(k,n) = [(2k+1)n\pi/2N] \bmod (4N). \quad (3.45)$$

Функція $\cos[(2k+1)n\pi/2N]$ – періодична відносно 4N, симетрична відносно аргумента (2N), що відповідає значенню π , асиметрична відносно аргумента (N),

що відповідає значенню $\pi/2$. Тому спрощена матриця C_a^{III} визначається послідовним виконанням обчислень

$$c_{k,n} = (c_{k,n}) \bmod 4N; \quad (3.46)$$

$$c_{k,n} = 4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N], \text{ якщо } [(c_{k,n}) \bmod 4N] > 2N; \quad (3.47)$$

$$\underline{c}_{k,n} = 2N - \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N]\}, \text{ якщо } \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N]\} > N, \quad (3.48)$$

інакше $\underline{c}_{k,n} = c_{k,n}$.

Враховуючи симетричність матриці C_a^{III} аргументів функцій базису ДКП-III відносно осей π та $\pi/2$, їх можна повністю визначити для значень $\underline{c}_{k,n}$, що можуть набувати $0(1)N$, але доповнюючи матрицями знаків S_c косинуса (3.40).

Наприклад, після спрощень відповідно (3.46 - 3.48) матриці аргументів ДКП-III для $N=4$ мають значення

$$\underline{C}_a^{\text{III}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad S^{\text{III}} c = \begin{bmatrix} + + + + \\ + + - - \\ + - - + \\ + - + - \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Для порівняння наведемо матриці аргументів ДКП-II з обсягом $N=4$, що мають значення

$$\underline{C}_a^{\text{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad S^{\text{II}} c = \begin{bmatrix} + + + + \\ + + - - \\ + - - + \\ + - + - \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Матриці C_a^{II} та C_a^{III} спрощених аргументів і знаків S_c^{II} та S_c^{III} транспоновані (рядки рівнів стовпцям і навпаки). Відповідно до взаємозв'язку прямих та зворотних обчислень ДТП :

$$(\text{ДТП}^{\text{II}}_N)^{-1} = (\text{ДТП}^{\text{II}}_N)^T = (\text{ДТП}^{\text{III}}_N); \quad (3.51)$$

$$(\text{ДТП}^{\text{III}}_N)^{-1} = (\text{ДТП}^{\text{III}}_N)^T = (\text{ДТП}^{\text{II}}_N). \quad (3.52)$$

Отже, аналіз одержаних матриць C_a^{II} та C_a^{III} для аргументів базису ДКП-II та ДКП-III, що містять цілі числа, показує, що у матриці кожен рядок містить набір елементів $[c_{k,n} \bmod (4N)]$, що не повторюються. Матриця C_a^{II} та C_a^{III} для c_a аргументів базису ДКП симетрична відносно осі π для косинусної функції, тому

$$c_a = \begin{cases} (4N - c_{k,n}), & \text{якщо } c_{k,n} > 2N \\ c_{k,n}, & \text{якщо } c_{k,n} \leq 2N \end{cases}. \quad (3.53)$$

Одержану матрицю за (3.53) для аргументів базису ДКП можна подати за допомогою набору спрощених елементів, що враховують асиметрію відносно осі $\pi/2$ для косинусної функції, з доповненням матрицею знаків S_c за (3.40)

$$\underline{c}_a = \begin{cases} (2N - c_{k,n}) & \text{якщо } c_{k,n} > N \\ c_{k,n}, & \text{якщо } c_{k,n} \leq N \end{cases}, \quad (3.54)$$

де $k, n=0, 1, \dots, N-1$. Елементи у спрощеній матриці $\underline{c}_a[k, n]$ можуть бути однаковими і повторюватись групами.

Отже, на основі поетапного спрощення базисної матриці аргументів організуємо обчислення ДКП-II, ДКП-III шляхом декомпозиції матриці \underline{c}_a аргументів базисної функції [180] до блочно-циклічних структур.

3.3.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДКП-II, ДКП-III на основі циклічних згорток

Розроблений підхід для ефективного обчислення дискретних косинусних перетворень, що базуються на декомпозиції базисної матриці на набір лівоциркулянтних підматриць розглянуто у роботах [176] - [180]. За цим підходом структуру базисної матриці можна задати твірним масивом $P(n)$ на основі циклічного розкладу підстановки.

Компоненти $c_{k,n}$ базису ДКП-II, ДКП-III повинні задаватись $P(n)$ у діапазоні повної періодичності (0 до 2π) для синтезу алгоритму, тобто достатньо, щоб $c_{k,n}$ набували значень $(0, \dots, 2N)$. Тому набір значень аргументів базисної частини ДКП-II дорівнює $n=2N$, ДКП-III дорівнює $n=(2N-1)$.

Приклади $P(n)$ твірних масивів ДКП-II, сформованих на основі рядків базисної матриці аргументів частково спрощених за (3.38) для стовпців $(2N$ значень за індексом k), для обсягів перетворення

$N=9,$

(0) (1,5,11,17,13,7) (3,15) (9) (2,10,14)(4,16,8) (6)(12);

$N=11,$

(0)(1,3,9,17,7,21,19,13,5,15)(2,6,18,10,14)(4,12,8,20,16)(11);

(0)(3,7,13,1,17,19,15,9,21,5)(6,14,18,2,10)(12,16,8,4,20)(11);

$N=14,$

(0)(1,11,9,13,25,5)(2,22,18,26,6,10)(3,23,27,17,19,15)(4,12,20)(7,21)(8,24,16)(14);

$N=18,$

(0)(1,13,25,35,23,11)(2,26,22)(3,33)(4,20,28)(5,7,19,31,29,17)(6)(8,32,16)(9,27)(10,14,34)(12)(15,21)(18)(24)(30);

$N=20$

(0)(1,7,31,23)(2,14,18,34)(3,21,13,11)(4,28,36,12)(5,35)(6,38,26,22)(8,24)(9,17,39,33)(10)(15,25)(16,32)(19,27,29,37)(20)(30);

(0)(3,7,37,33)(6,14)(9,21,31,19)(12,28)(15,35,25,5)(18,38)(24)(27,17,13,23)(30,10)(36,4)(39,11,1,29)(32)(26,34)(20)(8)(2,22)(16),

або $P(n)$ твірні масивів ДКП-III, сформовані на основі рядків базисної матриці аргументів, спрощених за (3.47) для рядків ($2N$ значень за індексом n), для обсягів перетворення

$N=10,$

(0)(1,7,9,17)(2,14,18,6)(4,12)(5)(15)(3,19,13,11)(8,16)(10);

$N=15,$

(0)(1,7,11,17)(2,14,22,26)(3,21,27,9)(4,28,16,8)(5,25)(6,18)(10)(12,24)(13,29,23,19)(15) (20);

$N=17,$

(0)(1,3,9,27,13,29,19,11,33,31,25,7,21,5,15,23)(2,6,18,14,26,10,30,22)(4,12,32,28,16,20,8,24)(17);

(0)(1,9,13,19,33,25,21,15)(2,18,26,30)(3,27,29,11,31,7,5,23)(4,32,16,8)(6,14,10,22)(12,28,20,24)(17);

(0)(1,13,33,21)(2,26)(3,29,31,5)(4,16)(6,10)(7,23,27,11)(8,32)(9,19,25,15)(12,20)(14,22)(17)(18,30)(24,28);

$N=21,$

(0)(1,5,25,41,37,17)(2,10,34)(3,15,9,39,27,33)(4,20,16)(6,30,18)(7,35)(8,40,32)(11,29,23,31,13,19)(12,24,36)(14)(21)(22,26,38)(28);

$N=28,$

(0)(1,3,9,27,31,19,55,53,47,29,25,37)(2,6,18,54,50,38)(4,12,36)(5,15,45,23,43,17,51,41,11,33,13,39)(7,21,49,35)(8,24,40)(10,30,22,46,26,34)(14,42)(16,48,32)(20,52,44)(28);

(0)(1,5,25,13,47,11,55,51,31,43,9,45)(2,10,50,26,18,22)(3,15,37,39,29,33,53,41,19,17,27,23)(4,20,12,52,36,44)(6,30,38,34,54,46)(7,35,49,21)(8,40,24)(14,42)(16,32,48)

(28).

З наведених прикладів сформовані твірні масиви $P(n)$ для ДКП-II та ДКП-III одного обсягу N *однакові*, відрізняються лише формуванням матриць аргументів. Оскільки, аргумент n -ї компоненти ДКП-II для кожного k -го базисного вектора визначається $c_{k,n} = k(2n+1)$, а аргумент ДКП-III для кожного n -го базисного вектора дорівнює $c_{k,n} = (2k+1)n$.

Розглянемо приклади формуванням матриць аргументів за конкретними обсягами перетворення. Для ДКП-II обсягу $N=7$ за твірним масивом

$$P(14)=(0)(1,3,9)(13,11,5)(7)(2,6,10)(12,8,4)$$

можна сформувати (табл. 3.4) матрицю аргументів з $2N=(3+3+3+3+1+1)=14$ стовпців та $(3+3+3+3+1+1)=14$ рядків (з врахуванням 0-го рядка), використовуючи частково спрощені твірні підмасиви.

Таблиця 3.4 – Матриця аргументів ДКП-II $N=7$ (частково спрощена)

k^n	0:	1:	4:	13:	12:	9:	2:	7:	8:	11:	6:	5:	10:	3:
0:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1:	1	3	9	1	3	9	5	13	11	5	13	11	7	7
3:	3	9	1	3	9	1	13	11	5	13	11	5	7	7
9:	9	1	3	9	1	3	11	5	13	11	5	13	7	7
13:	13	11	5	13	11	5	9	1	3	9	1	3	7	7
11:	11	5	13	11	5	13	1	3	9	1	3	9	7	7
5:	5	13	11	5	13	11	3	9	1	3	9	1	7	7
2:	2	6	10	2	6	10	10	2	6	10	2	6	14	14
6:	6	10	2	6	10	2	2	6	10	2	6	10	14	14
10:	10	2	6	10	2	6	6	10	2	6	10	2	14	14
12:	12	8	4	12	8	4	4	12	8	4	12	8	0	0
8:	8	4	12	8	4	12	12	8	4	12	8	4	0	0
4:	4	12	8	4	12	8	8	4	12	8	4	12	0	0
7:	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

Для ДКП-III, $N=7$, за твірним масивом $P(14) = (0)(1,3,9)(13,11,5)(7)(2,6,10)(12,8,4)$ можна сформувати (табл. 3.5) матрицю аргументів з $(2N-1)=(3+3+3+3+1+1)=14$ стовпців (з врахуванням 0-го стовпця) та 14 рядків, використовуючи частково спрощені твірні підмасиви.

Таблиця 3.5 – Матриця аргументів ДКП-III N=7 (частково спрощена)

k^n	0:	1:	3:	9:	13:	11:	5:	2:	6:	10:	12:	8:	4:	7
1:	0	1	3	9	13	11	5	2	6	10	12	8	4	7
3:	0	3	9	1	11	5	13	6	10	2	8	4	12	7
9:	0	9	1	3	5	13	11	10	2	6	4	12	8	7
13:	0	13	11	5	1	3	9	2	6	10	12	8	4	7
11:	0	11	5	13	3	9	1	6	10	2	8	4	12	7
5:	0	5	13	11	9	1	3	10	2	6	4	12	8	7
7:	0	7	7	7	7	7	7	14	14	14	0	0	0	7
симетричне відображення														
7:	0	7	7	7	7	7	7	14	14	14	0	0	0	7
5:	0	5	13	11	9	1	3	10	2	6	4	12	8	7
11:	0	11	5	13	3	9	1	6	10	2	8	4	12	7
13:	0	13	11	5	1	3	9	2	6	10	12	8	4	7
9:	0	9	1	3	5	13	11	10	2	6	4	12	8	7
3:	0	3	9	1	11	5	13	6	10	2	8	4	12	7
1:	0	1	3	9	13	11	5	2	6	10	12	8	4	7

З наведених прикладів видно, що матриці аргументів ДКП-II (табл. 3.4) після транспонування відповідають матрицям аргументів ДКП-III (табл. 3.5), тому процес обчислення за твірними масивами має свої особливості, що визначається неоднозначною перестановкою стовпців і рядків.

Властивості симетрії та періодичності базису перетворення ДКП дозволяють описати твірний масив $P(n)$ – спрощеним $P'(n)$ з меншими значеннями елементів і з доповненням відповідним масивом знаків $Sc(n)$. Визначення твірного масиву $P(n)$ і додаткових, спрощеного масиву $P'(n)$ та масиву знаків $S(n)$, обчислювальні затрати для яких залежать від $T=2N$ – періоду базисної функції, проводяться з виконанням операцій у арифметиці над цілими числами.

Наприклад, для ДКП-II і ДКП-III малих обсягів перетворення матимемо спрощені твірні масиви:

ДКП-II, $N=7$, твірний масив сформований за першим і другим *стовпцями*, визначає перестановку стовпців (використовуємо твірні підмасиви з непарними елементами) та рядків (використовуємо твірні підмасиви зі всіма елементами):

$$P(7) = (1,3,9)(13,11,5)(7)(2,6,10)(12,8,4);$$

$$P'(7) = (1\ 3\ 5)\ (2\ 6\ 4)\ (7),$$

$$S(13) = (+, +, -)\ (+, +, -)(0);$$

ДКП-III, $N=7$, твірний масив сформований за першим і другим *рядками*, визначає перестановку стовпців та рядків (для рядків використовуємо твірні підмасиви з непарними елементами):

$$P(13) = (1,3,9)(13,11,5)(7)(2,6,10)(12,8,4);$$

$$P'(13) = (1,3,5)(1,3,5)(7)(2,6,4)(2,6,4),$$

$$S(13) = (+,+, -)(-, -, +)(+,+, -)(-, -, +)(0) \text{ для першого рядка.}$$

У додатку А подано твірні масиви $Pr(n)$, сформовані на їх основі масиви знаків $S(n)$ та спрощені твірні масиви $Pr(n)$, для коротких обсягів ДКП-II.

Аналіз структури базисних матриць аргументів на основі твірного масиву $P(n)$ та $P'(n)$, $Sc(n)$ дає можливість визначити загальні особливості розподілу циклічних підматриць ДКП-II, III для відповідних обсягів.

Одержана структура спрощених матриць \underline{C}_a^{II} , \underline{C}_a^{III} і відповідних матриць знаків Sc , визначених на основі твірного масиву $P(n)$, задає процес проведення обчислення ДКП-II,III за допомогою циклічних згорток. При цьому необхідно застосовувати швидкі алгоритми циклічних згорток [20], що і визначатимуть основні обчислювальні затрати для операції множення даного перетворення.

У процесі обчислення на початковому етапі проводиться *переставлення* вхідних даних $x(i)$, $i=1(1)2N-1$, що визначається за твірним масивом $P(n)$.

Одночасно за елементами спрощеного твірного масиву $P'(n)$ можуть визначатись абсолютні значення коефіцієнтів косинусних складових базису ДКП, що беруть участь у операціях згортки.

Наступним етапом у алгоритмі обчислення ДКП є визначення ідентичних циклічних підматриць відповідно до пункту 2.3.2. Особливості розподілу циклічних підматриць у базисні матриці ДКП та їхні характеристики визначають складність алгоритму обчислення ДКП.

Завершується обчислення об'єднанням результатів згорток горизонтально у структурі базису на основі відповідних координат перших елементів підматриць. Компонуючи послідовно одержані частини, проводимо обчислення вихідних значень дійсних дискретних коефіцієнтів ДКП-II,III.

Отже, серед основних *особливостей*, які необхідно враховувати у процесі синтезу алгоритму ДКП-II, виділяють:

- початкова розмірність матриці $(2N) \times (2N)$;
- обчислення зводиться до розмірності матриці $(N-1) \times (N)$;
- твірний масив $P(n)$ формується з базисної матриці $(2N) \times (2N)$ аргументів після виконання першої симетрії $(2N-z)$ за підстановкою для першого *стовпця*;
- індексація стовпців з $P_c(n)$ використовує з $P(n)$ підмасиви із непарними елементами перехід $(2n+1) \rightarrow n$;
- індексація рядків з $P_r(n)$ використовує з $P(n)$ підмасиви з першими непарними та парними N елементами;
- послідовність вхідних значень $[x] [x]'$ за твірним масивом $P_c(n)$ враховується індексація $(2n+1)$ інтервал плюс між $[x] [x]'$ бо симетрія косинусу на інтервалі $(0 \pm \pi \pm 2\pi)$;
- обчислені вихідні значення $X(i)$ без $X(0)$, оскільки обчислення зводиться до розмірності матриці $(N-1) \times (N)$;
- особливість циклічних згорток мішана (суцільна або з двома групами ідентичних елементів);
- кількість варіантів твірних масивів більше одного.
- для парних $2p$ обсягу перетворення, наявність значень на осях π одна вісь симетрії;
- для N , кратних чотирьом $4p$, маємо такі осі симетрії $[\pi/2]$;

Отже, серед основних *особливостей* синтезу алгоритму ДКП-III можна зазначити:

- початкова розмірність матриці $(2N) \times (2N)$;
- обчислення зводиться до розмірності матриці $(N) \times (N-1)$;
- твірний масив $P_c(n)$ формується з базисної матриці $(2N) \times (2N)$ аргументів після виконання $(\text{mod } 4N)$ за підстановкою для першого *рядка*;
- твірний масив $P_r(n)$ формується з базисної матриці $(2N) \times (2N)$ аргументів після виконання першої симетрії $(2N-z)$ за підстановкою для першого *стовпця*;

- послідовність вхідних значень $[x] [-x]'$ формується за твірним масивом $P_c(n)$, де враховується індексація (n) та мінус між $[x] [-x]'$, бо інтервал $(0 + \pi/2 - \pi)$;
- обчислені вихідні значення $2 * X(i)$ без $x(0)$;
- особливість циклічних згорток мішана (одна суцільна або з двома групами ідентичних елементів);
- для парних $2p$, значень обсягу перетворення π одна вісь симетрії;
- для N кратних чотирьом $4p$ маємо осі симетрії $\pi/2, \pi, 3\pi/2$;
- кількість варіантів твірних масивів більше одного.

3.3.3 Приклади обчислення ДКП-II та ДКП-III обсягу $N=7$ та $N=2^n$ на основі циклічних згорток

Розглянемо приклад застосування узагальненої методології для обчислення ДКП-II і ДКП-III обсягу $N=7$.

Сформоване значення твірного масиву для ДКП-II обсягу $N=7$ за циклічним розкладом підстановки для першого стовпця:

$$P(13) = P(n_1)P(n_2) P(n_3) P(n_4) P(n_5) = (1,3,9) (2,6,10) (13,11,5) (12,8,4) (7) .$$

Визначення параметрів твірного масиву:

$k = 5$ – кількість підмасивів у твірному масиві;

$L_1=3, L_2=3, L_3=3, L_4=3, L_5=1$ – кількість елементів у підмасивах $P(n_i)$, що задають обсяг циклічних згорток;

Наступний етап синтезу алгоритму – це визначення ідентичних циклічних підматриць для обчислення ДКП-II. Для цього необхідно сформувати матрицю координат та значення перших елементів зі знаком підматриць аргументів базису ДКП-II для $N=7$.

Відповідність координат (i, j) елементам твірного масиву $P(n_i)$:

$$\begin{array}{r} (i, j) \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \\ (1, 3, 9) (2, 6, 10) (13, 11, 5) (12, 8, 4) (7) \end{array}$$

Координати перших елементів підматриць визначаються за $(i+L_i), (j+L_i)$ (L_i – вибирається за належності до твірного підмасиву значень перших елементів підматриць у матричній структурі, які обчислюються за відповідністю координат (i,j) , відповідно для n_i $(0)(1,3,9)(2,6,10)$ рядків та n_j $(1,3,9)(13,11,5)(7)$ стовпців. Виконавши спрощення для перших елементів підматриць, відповідно твірному масиву: $z=(n_i \times n_j) \bmod 4N$ та послідовно умови симетрії $(4N-z)$, для $z > 2N=14$ та $(2N-z)$ для $z > N=7$, отримуємо табл. 3.6.

Таблиця 3.6 – Матриця координат та значення перших елементів зі знаком підматриць аргументів базису ДКП-II $N=7$

(рядок, стовпець) $(i+L_i, j+L_i)$ - $s_c n_{ij}$ – знак і значення першого елемента		
(0,0) – +0		
(1,0) – +1;	(1,3) – +1;	(1,6) – 7;
(3,1) – +2;	(3,3) – +2;	(3,6) – -0;

Відповідно до табл. 3.6 розширену матрицю аргументів та знаків подано у табл.3.7. Тобто, за твірним масивом $P(13)=(1,3,9)(2,6,10)(13,11,5)(12,8,4)(7)$ матриця аргументів (табл. 3.7) сформована з $(3+3+1)=7$ стовпців (непарні індекси) за масивом $P(7)=(1,3,9)(13,11,5)(7) \rightarrow (0,1,4)(6,5,2)(3)$ та з відібраними 7 рядками за масивом $P(7)=(0)(1,3,9)(2,6,10)$.

Таблиця 3.7 – Матриці спрощених аргументів та знаків базису ДКП II, $N=7$

k^n	0:	1:	4:	6:	5:	2:	3:
0:	0	0	0	0	0	0	0
1:	1	3	5	1	3	5	7
3:	3	5	1	3	5	1	7
9:	5	1	3	5	1	3	7
2:	2	6	4	2	6	4	14
6:	6	4	2	6	4	2	14
10:	4	2	6	4	2	6	14

k^n	0:	1:	4:	6:	5:	2:	3:
0:	1	1	1	1	1	1	1
1:	+	+	-	-	-	+	0
3:	+	-	+	-	+	-	0
9:	-	+	+	+	-	-	0
2:	+	+	-	+	+	-	-1
6:	+	-	+	+	-	+	-1
10:	-	+	+	-	+	+	-1

У табл. 3.8 повніше відображено процес синтезу, що пояснюється об'єднанням одержаних для аналізу матриць спрощених аргументів та знаків.

Таблиця 3.8 – Матриці спрощених аргументів та знаків базису ДКП-II N=7

k^n	0:	1:	4:	13:	12:	9:	7:	8:	2:	6:	5:	11:	3:	10:
0:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1:	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5	7	7
3:	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	7	7
9:	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	7	7
2:	2	6	4	2	6	4	2	6	4	2	6	4	14	14
6:	6	4	2	6	4	2	6	4	2	6	4	2	14	14
10:	4	2	6	4	2	6	4	2	6	4	2	6	14	14

k^n	0:	1:	4:	13:	12:	9:	7:	8:	2:	6:	5:	11:	3:	10:
0:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1:	+	+	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	0	0
3:	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	0	0
9:	-	+	+	-	+	+	+	-	-	+	-	-	0	0
2:	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-1	-1
6:	+	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-1	-1
10:	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-1	-1

Переіндексація за стовпцями визначає перехід $(2n+1) \rightarrow n$, тобто

$P_c(13)=(1,3,9)(15,17,5)(27,25,19)(13,11,23)(7,21) \rightarrow (0,1,4)(7,8,2)(13,12,9)(6,5,11)(3,10)$ (підстановка $2N$ елементів за рядками матриці аргументів базису відносно операції $\text{mod } 4N$).

Твірні масиви стовпців:

$P_c(7) = (1,3,9)(15,17,5)(27,25,19)(13,11,23) \rightarrow (0,1,4)(7,8,2)(13,12,9)(6,5,11)(3,10)$.

Твірні масиви рядків:

$P_r(7) = (1,3,9)(2,6,10)(0)$; $P'(7) = (1,3,5)(2,6,4)(0)$, $Sc(7)=(+,+,-)(+,+,-)(0)$,

де циклічний розклад підстановки сформований для першого стовпця. При обчисленні вихідних значень враховується ідентичність рядків (5) і (9); (4) і (10), що мають тільки різні знаки.

Аналогічно для ДКП-III, сформовані на основі рядків базисної матриці аргументів, значення твірних масиву, сформованого за циклічним розкладом підстановки першого та третього рядків, набувають вигляду:

$$P(13) = P(n_1)P(n_2)P(n_3)P(n_4)P(n_5) = (1,3,9) (13,11,5) (2,6,10) (12,8,4) (7),$$

$$P'(13) = P'(n_1)P'(n_2)P'(n_3)P'(n_4)P'(n_5) = (1,3,5)(1,3,5) (2,6,4)(2,6,4) (7),$$

$$S(13) = (+,+, -)(-, -, +) (+,+, -)(-, -, +) (0).$$

Визначення параметрів твірних масивів:

$(2N-1) = 13$ обсяг твірного масиву (кількість значень за індексом n для рядків);

$k = 5$ – кількість підмасивів у твірному масиві;

$L_1=3, L_2=3, L_3=3, L_4=3, L_5=1$ – кількість елементів у підмасивах $P(n_i)$, що задають обсяг циклічних згорток;

Відповідність координат (i, j) елементам твірного масиву $P(n_i)$ та $P'(n_i)$:

$$\begin{array}{l} (i, j) \quad 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \\ (1, 3, 9) (13, 11, 5) (2, 6, 10) (12, 8, 4) (7) \\ (+1, +3, -5)(-1, -3, -5)(+2, +6, -4)(-2, -6, +4) (0) \end{array}$$

Наступний етап синтезу алгоритму – визначення ідентичних циклічних підматриць для обчислення ДКП-III. Для цього необхідно сформувати матрицю координат та значення перших елементів зі знаком підматриць аргументів базису ДКП-III для $N=7$.

Координати перших елементів підматриць визначаються за $(i+L_i), (j+L_i)$ (L_i – вибирається за приналежності до твірного підмасиву значень перших елементів підматриць у матричній структурі, які обчислюються за відповідністю координат (i, j) для $(1, 3, 9)(13, 11, 5)$ рядків та $(1, 3, 9)(13, 11, 5)(2, 6, 10)(12, 8, 4)(7)$ стовпців $P(n)$ твірного масиву $(n_i \times n_j) \bmod 4N$, а у випадку одержання значення, більшого за $\{N\}$, спрощується за виразом, подано у табл. 3.9. Відповідність структури за табл. 3.9 можна перевірити, виконавши повний набір обчислень, за твірним масивом

$$P(13) = (1, 3, 9)(13, 11, 5)(2, 6, 10)(12, 8, 4)(7).$$

Таблиця 3.9 – Матриця координат та знаку і значення перших елементів підматриць аргументів базису ДКП-III $N=7$

(рядок, стовпець) $(i+L_i, j+L_i)$ - $s_{ij}n_{ij}$ знак і значення першого елемента				
$(1, 1) - +1;$	$(1, 4) - -1;$	$(1, 7) - +2;$	$(1, 10) - -2;$	$(1, 13) - 0;$
$(4, 1) - -1;$	$(4, 4) - +1;$	$(4, 7) - +2;$	$(4, 10) - -2;$	
$(7, 1) - 0;$		$(7, 7) - -1;$	$(7, 10) - +1;$	

Тобто, за твірним масивом $P(13)=(1,3,9)(2,6,10)(13,11,5)(12,8,4)(7)$ матриця аргументів (табл. 3.10) сформована з $(3+3+1)=7$ стовпців (непарні індекси) за масивом $P_c(7)=(0)(1,3,9)(2,6,10)$ та з відібраними 7 рядками за масивом $P(7)=(1,3,9)(13,11,5)(7) \rightarrow (0,1,4)(6,5,2)(3)$.

Таблиця 3.10 – Матриці спрощених аргументів та знаків базису ДКП III, $N=7$

$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$	1:	3:	9:	2:	6:	10:	7:
0:	1	3	5	2	6	4	7
1:	3	5	1	6	4	2	7
4:	5	1	3	4	2	6	7
6:	1	3	5	2	6	4	7
5:	3	5	1	6	4	2	7
2:	5	1	3	4	2	6	7
3:	7	7	7	14	14	14	7

$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$	1:	3:	9:	2:	6:	10:	7:
0:	+	+	-	+	+	-	0
1:	+	-	+	+	-	+	0
4:	-	+	+	-	+	+	0
6:	-	-	+	+	+	-	0
5:	-	+	-	+	-	+	0
2:	+	-	-	-	+	+	0
3:	0	0	0	+1	+1	+1	0

У табл. 3.10 повніше відображено процес синтезу, що пояснюється об'єднанням одержаних для аналізу матриць спрощених аргументів та знаків. Сформована (табл. 3.11) матриця аргументів складається з $(2N-1)=(3+3+3+3+1)=13$ стовпців (без врахування 0-го стовпця) та $(3+3+1)=7$ рядків (для $N=7$ вихідних значень ДКП-III).

Переіндексація за рядками визначає перехід $(2n+1) \rightarrow n$:

$$P(13)=(1,3,9)(13,11,5) \rightarrow (0,1,4) (6,5,2).$$

Тобто одержали натуральну ідексацію для вихідних значень.

Переіндексація за стовпцями:

$$P(13)=(1,3,9)(13,11,5)(2,6,10)(12,8,4)(7),$$

підстановка $2N$ елементів за спрощеними рядками матриці аргументів базису $4N-z$, $z > 2N$.

Рядки (1:, 3:, 9:, 13:, 11:, 5:) \rightarrow (0, 1, 4, 6, 5, 2) відповідають послідовності вихідних значень.

Таблиця 3.11 – Матриця спрощених аргументів та знаків базису ДКП-III N=7

k	n	1:	3:	9:	13:	11:	5:	2:	6:	10:	12:	8:	4:	7:
1:	0:	1	3	5	1	3	5	2	6	4	2	6	4	7
3:	1:	3	5	1	3	5	1	6	4	2	6	4	2	7
9:	4:	5	1	3	5	1	3	4	2	6	4	2	6	7
13:	6:	1	3	5	1	3	5	2	6	4	2	6	4	7
11:	5:	3	5	1	3	5	1	6	4	2	6	4	2	7
5:	2:	5	1	3	5	1	3	4	2	6	4	2	6	7
7:	3:	7	7	7	7	7	7	14	14	14	0	0	0	7

1:	0:	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	+	0
3:	1:	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	0
9:	4:	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	0
13:	6:	-	-	+	+	+	-	+	+	-	-	-	+	0
11:	5:	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-	0
5:	2:	+	-	-	-	+	+	-	+	+	+	-	-	0
7:	3:	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	1	1	1	0

Етап синтезу визначення ідентичних циклічних підматриць у структурі базису ДКП-II та ДКП-III проходить за однаковою схемою, однак їх розміщення транспоновані.

Визначення ідентичних циклічних підматриць виконується відбором за координатами перших елементів однакових підматриць горизонтально. Для координат рядків, кратних *простим множникам* розкладу обсягу N, у структурі базисної матриці виконуємо об'єднання вхідних даних горизонтально. Виконання поелементно додавань вхідних значень будуть використовуватись для обчислення циклічних згорток при наступному аналізі вертикально.

Тобто аналізують та відбирають за координатами перших елементів однакові підматриці вертикально. Особливо для координат стовпців, кратних *простим множникам* розкладу обсягу N, у структурі виконуємо обчислення циклічних згорток при аналізі підматриць вертикально. За наявності решти незадіяних підматриць виконуються циклічні згортки за своїми параметрами на основі визначених координат.

Матриці спрощених аргументів та знаків базису ДКП-II обсягом $N=7$ асиметричні вертикально, а ДКП-III обсягом $N=7$ – асиметричні горизонтально (табл. 3.12, 3.13).

Таблиця 3.12 – Матриці спрощених аргументів та знаків базису ДКП II, $N=7$

k^n	0:	1:	4:	6:	5:	2:	3:
0:	0	0	0	0	0	0	0
1:	1	3	5	1	3	5	7
3:	3	5	1	3	5	1	7
9:	5	1	3	5	1	3	7
2:	2	6	4	2	6	4	14
6:	6	4	2	6	4	2	14
10:	4	2	6	4	2	6	14

k^n	0:	1:	4:	6:	5:	2:	3:
0:	1	1	1	1	1	1	1
1:	+	+	-	-	-	+	0
3:	+	-	+	-	+	-	0
9:	-	+	+	+	-	-	0
2:	+	+	-	+	+	-	-1
6:	+	-	+	+	-	+	-1
10:	-	+	+	-	+	+	-1

Таблиця 3.13 – Матриці спрощених аргументів та знаків базису ДКП III, $N=7$

k^n	1:	3:	9:	2:	6:	10:	7:
0:	1	3	5	2	6	4	7
1:	3	5	1	6	4	2	7
4:	5	1	3	4	2	6	7
6:	1	3	5	2	6	4	7
5:	3	5	1	6	4	2	7
2:	5	1	3	4	2	6	7
3:	7	7	7	14	14	14	7

k^n	1:	3:	9:	2:	6:	10:	7:
0:	+	+	-	+	+	-	0
1:	+	-	+	+	-	+	0
4:	-	+	+	-	+	+	0
6:	-	-	+	+	+	-	0
5:	-	+	-	+	-	+	0
2:	+	-	-	-	+	+	0
3:	0	0	0	+1	+1	+1	0

Отже, порівнюючи одержані табл. 3.12 та 3.13, маємо транспоновані матриці для ДКП II = (ДКП III)^T і навпаки. Дані перетворення ДКП II/III мають свої особливості приведення до циклічних згорток у процесі синтезу алгоритму. Відповідно до результатів аналізу, для наведених прикладів для ДКП-II і ДКП-III обсягом $N=7$ необхідно виконати дві триточкові циклічні згортки.

Найбільше алгоритмічних та спеціальних апаратних засобів дискретного перетворення класу Фур'є розроблено для обсягу перетворення цілого степеня два.

Розглянемо на прикладі ефективне обчислення ДКП II на основі циклічних згорток для обсягу $N=8$, що широко застосовується при обробці зображень. Відповідно, твірний масив $P(n)$ об'єднує підмасиви

$$P(2^n - 1) = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L_1}) (n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L_2}) \dots (n_{kL_1}, n_{kL_2}, \dots, n_{kL_{n+1}}), \quad (3.55)$$

де n_{ij} – елемент підмасиви, $L_i = 2^i$ ($i = n, n-1, \dots, 0$) – кількість елементів у підмасиві $P(n_i)$, що i задає обсяг циклічних структур.

Для $N=8$ існують такі *варіанти твірних масивів*, що можна виділити у групи, що мають однакову кількість підмасивів

a) $k=4, L_i=8,4,2,1$

(1, 3, 9, 5, 15, 13, 7, 11) (2, 6, 14, 10) (4, 12) (8) сформовано за 1 і 3 стовпцем;
 (1, 5, 7, 3, 15, 11, 9, 13) (2, 10, 14, 6) (4, 12) (8);
 (1, 11, 7, 13, 15, 5, 9, 3) (2, 10, 14, 6) (4, 12) (8);
 (1, 13, 9, 11, 15, 3, 7, 5) (2, 6, 14, 10) (4, 12) (8);
 (3, 7, 5, 1, 13, 9, 11, 15) (6, 14, 10, 2) (12, 4) (8) сформовано за 3 і 7 стовпцем;

b) $k=7, L_i=4,2,1$

(1, 7, 15, 9) (3, 11, 13, 5) (2, 14) (6, 10) (4) (12) (8) сформовано за 1 і 7 стовпцем;
 (1, 9, 15, 7) (3, 5, 13, 11) (2, 14) (6, 10) (4) (12) (8);
 (3, 11, 13, 5) (9, 1, 7, 15) (14, 2) (6, 10) (4) (12) (8) сформовано за 3 і 11 стовпцем.

Тобто, твірний масив об'єднує підмасиви, що розбиті наполовину відносно $P(n)$ для груп а).

c) $k=12, L_i=2,1$

(1, 15) (3, 13) (5, 11) (7, 9) (0) (2) (4) (6) (8) (10) (12) (14) сформовано за 1 і 15 стовпцем.

Тобто, твірний масив $P(n)$ об'єднує підмасиви, що містять непарні елементи рівні $P_i(n) = (k, N-k)$ для $k=1, 2, \dots, N$.

Обчислення ДКП-II для $N=8$ у випадку а) із твірним масивом

$$P(15) = (1, 3, 9, 5, 15, 13, 7, 11) (2, 6, 14, 10) (4, 12) (8),$$

базисна матриця складається з N стовпців та $(2N-1)$ рядків за табл. 3.14.

Внаслідок симетрій (табл. 3.14) обчислення ДКП-II для $N=8$ зводиться до визначення:

4-х вихідних значень $X[1], X[3], -X[9], X[5]$ через 8-точкові згортки з повторенням елементів або 4-точкових згорток з об'єднанням повторень;

2-х вихідних значень $X[2], X[6]$ через 4-точкові симетричної згортки з повторенням елементів або 2-точкових згорток з об'єднанням повторень;

1-го вихідного значення $X[4]$ через 2-точкові симетричної згортки з повторенням елементів або один добуток з об'єднанням повторень.

Таблиця 3.14 – Матриці спрощених аргументів та знаків базису ДКП II, N=8

k^{2n+1}	1:	3:	9:	5:	17:	13:	7:	11:
k^n	0:	1:	4:	2:	8:	6:	3:	5:
1:	1	3	7	5	1	3	7	5
3:	3	7	5	1	3	7	5	1
9:	7	5	1	3	7	5	1	3
5:	5	1	3	7	5	1	3	7
15:	1	3	7	5	1	3	7	5
13:	3	7	5	1	3	7	5	1
7:	7	5	1	3	7	5	1	3
11:	5	1	3	7	5	1	3	7
2:	2	6	2	6	2	6	2	6
6:	6	2	6	2	6	2	6	2
14:	2	6	2	6	2	6	2	6
10:	6	2	6	2	6	2	6	2
12:	4	4	4	4	4	4	4	4
4:	4	4	4	4	4	4	4	4
8:	8	8	8	8	8	8	8	8

k^n	0:	1:	4:	2:	8:	6:	3:	5:
1:	+	+	-	+	-	-	+	-
3:	+	-	+	-	-	+	-	+
9:	-	+	-	-	+	-	+	+
5:	+	-	-	+	-	+	+	-
15:	-	-	+	-	+	+	-	+
13:	-	+	-	+	+	-	+	-
7:	+	-	+	+	-	+	-	-
11:	-	+	+	-	+	-	-	+
2:	+	+	-	-	+	+	-	-
6:	+	-	-	+	+	-	-	+
14:	-	-	+	+	-	-	+	+
10:	-	+	+	-	-	+	+	-
8:	0	0	0	0	0	0	0	0
12:	-	+	-	+	-	+	-	+
4:	+	-	+	-	+	-	+	-

Результуюча структура модуля для виконання обчислення ДКП-II для N=8 містить такі компоненти (рис. 3.9): BRC – буферний реєстр коефіцієнтів, BRD – буферний реєстр вхідних даних, $\pm/U_{1,2,3,4}$ – блок поелементного додавання/віднімання вхідних даних; CCU – блок циклічної згортки, відповідно 4, 2, 1 точкових обсягів.

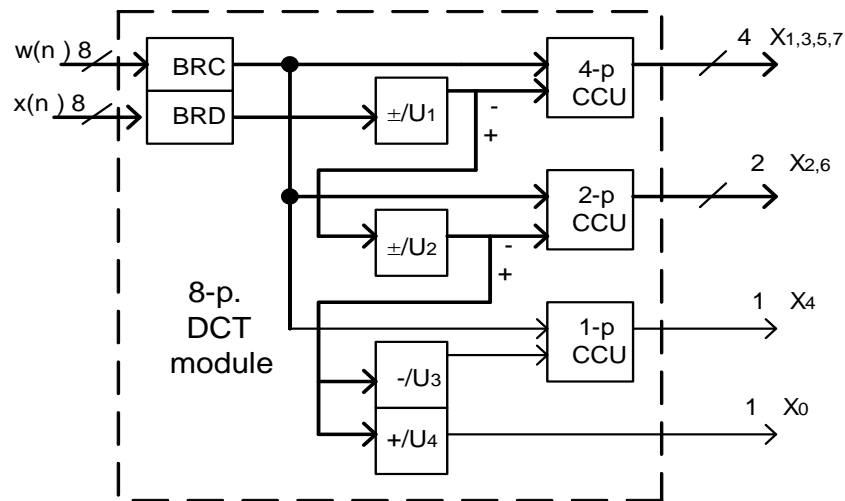


Рисунок 3.9 – Структурна схема модуля обчислення ДКП-II для N=8

Порядок послідовності коефіцієнтів у BRC :

$w(n) = \{\cos(\varphi), \cos(3\varphi), \cos(7\varphi), \cos(5\varphi), \cos(2\varphi), \cos(6\varphi), \cos(4\varphi)\}$, де $\varphi = \pi/16$.

Порядок послідовності вхідних даних у BRD

$x(n) = \{x(0), x(1), x(4), x(2), x(7), x(6), x(3), x(5)\}$,

що об'єднуються послідовно у блоках:

у блоці \pm/U_1

$x(0)+x(7), x(1)+x(6), x(4)+x(3), x(2)+x(5); x(0)-x(7), x(1)-x(6), x(4)-x(3), x(2)-x(5);$

у блоці \pm/U_2 :

$[(x(0)+x(7))-x(4)+x(3)], [(x(1)+x(6))-x(2)+x(5)];$

$[(x(0)+x(7))+x(4)+x(3)], [(x(1)+x(6))+x(2)+x(5)];$

у блоці \pm/U_3 :

$[(x(0)+x(7))+x(4)+x(3)]-[(x(1)+x(6))+x(2)+x(5)];$

у блоці \pm/U_4 :

$[(x(0)+x(7))+x(4)+x(3)]+[(x(1)+x(6))+x(2)+x(5)].$

У результаті виконання циклічних згорток у CCU блоках циклічної згортки визначаються вихідні дані $X_{1,3,5,7}, X_{2,6}, X_4, X_0$ перетворення ДКП-II для N=8 [181].

Аналогічно розглянемо ДКП-III для N=8, де твірний масив матиме значення $P(15) = (1,3,9,5,15,13,7,11) (0) (2,6,14,10) (4,12)(8)$.

Від твірного масиву переходимо до спрощеного

$P'(n) = (1\ 3\ 7\ 5\ 1\ 3\ 7\ 5)(0)(2\ 6\ 2\ 6)(4\ 4)(8), S_c = (+\ +\ -\ -\ -)(+)(-\ +\ +\ +)(-\ -)(+\ -)(0),$

що визначає матриці аргументів (табл. 3.15, 3.16) та матрицю координат з відповідними знаком і значеннями перших елементів підматриць (табл. 3.17).

Таблиця 3.15 – Матриці спрощених аргументів базису ДКП-III для N=8

$2k+1$	k	1:	3:	9:	5:	15:	13:	7:	11:	0:	2:	6:	14:	10:	4:	12:	8:
1:	0:	1	3	7	5	1	3	7	5	0	2	6	2	6	4	4	8
3:	1:	3	7	5	1	3	7	5	1	0	6	2	6	2	4	4	8
9:	4:	7	5	1	3	7	5	1	3	0	2	6	2	6	4	4	8
5:	2:	5	1	3	7	5	1	3	7	0	6	2	6	2	4	4	8
15:	7:	1	3	7	5	1	3	7	5	0	2	6	2	6	4	4	8
13:	6:	3	7	5	1	3	7	5	1	0	6	2	6	2	4	4	8
7:	3:	7	5	1	3	7	5	1	3	0	2	6	2	6	4	4	8
11:	5:	5	1	3	7	5	1	3	7	0	6	2	6	2	4	4	8

Таблиця 3.16 – Матриця знаків базису ДКП-III для N=8

k	1:	3:	9:	5:	15:	13:	7:	11:	0:	2:	6:	14:	10:	4:	12:	8:
0:	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-	0
1:	+	-	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	0
4:	-	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	0
2:	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	0
7:	-	-	+	-	+	+	-	+	+	+	+	-	-	+	-	0
6:	-	+	-	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	+	0
3:	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	+	+	-	0
5:	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	0

Таблиця 3.17 – Матриця координат та знаку і значення перших елементів підматриць аргументів базису ДКП-III для N=8

$(i+L_i, j+L_i) - s_{ij}n_{ij}$ – знак і значення першого елементу			
$(0,0) - +1;$	$(0,8) - 0;$	$(0,9) - +2;$	$(0,13) - + 4;$
			$(2,13) - +4;$
		$(4,9) - +2;$	$(4,13) - +4;$
			$(6,13) - +4;$

Порядок послідовності вхідних даних перетворення, відповідно твірному масиву $P(15)=(1,3,9,5,15,13,7,11)(0)(2,6,14,10)(4,12)(8)$ ($n=16$), задається у вигляді:
 $x(1), x(3), -x(6), x(5), -x(0), -x(2), x(7), -x(4), x(0), x(2), x(6), -x(1), -x(5), x(4), -x(3), -x(7)$.

Вхідна послідовність повторюється відповідно косинусоїди на половині періоду

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ x_0, & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6, & x_7 & -x_7, & -x_6 & -x_5 & -x_4 & -x_3 & -x_2 & -x_1 & -x_0 \end{array} .$$

Тому відповідно до спрощеного твірного масиву

$$P'(n)=(1,3,7,5,1,3,7,5)(0)(2,6,2,6)(4,4)$$

виконаємо поелементне об'єднання,

$$[x(1), x(3), -x(6), x(5)] + [-x(0), -x(2), x(7), -x(4)]; [x(2), x(6)] + [-x(1), -x(5)]; [x(4)]+[-x(3)].$$

Після аналізу блочно-циклічної структури базисної матриці (табл. 3.17) для ідентичних підматриць, розміщених горизонтально, об'єднуються вхідні дані.

Відповідно розподілу у структурі базисної матриці ДКП III для обсягу $N=8$ виконуються обчислення циклічних згорток:

– 8-точкової згортки з повторенням елементів або 4-точкової згортки (*) з об'єднанням повторень

$$[\cos(1\Delta\varphi), \cos(3\Delta\varphi), -\cos(7\Delta\varphi), \cos(5\Delta\varphi), -\cos(1\Delta\varphi), -\cos(3\Delta\varphi), \cos(7\Delta\varphi), -\cos(5\Delta\varphi)] * [x(1), x(3), -x(6), x(5), -x(0), -x(2), x(7), -x(4)] - 8\text{-точкова симетрична циклічна згортка};$$

$$W_1=[\cos(1\Delta\varphi), \cos(3\Delta\varphi), -\cos(7\Delta\varphi), \cos(5\Delta\varphi)] * \{[x(1), x(3), -x(6), x(5)] + [-x(0), -x(2), x(7), -x(4)]\} - 4\text{-точкова циклічна згортка};$$

– 4-точкової згортки з повторенням елементів або 2-точкових згорток з об'єднанням повторень

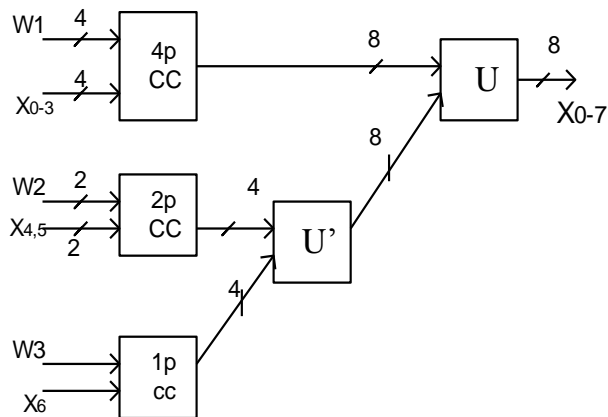
$$[\cos(2\Delta\varphi), \cos(6\Delta\varphi), -\cos(2\Delta\varphi), -\cos(6\Delta\varphi)] * [x(2), x(6), -x(1), -x(5)] - 4\text{-точкова циклічна згортка};$$

$$W_2=[\cos(2\Delta\varphi), \cos(6\Delta\varphi)] * \{[x(2), x(6)] + [-x(1), -x(5)]\} - 2\text{-точкова згортка};$$

– 2-точкової симетричної згортки з повторенням елементів або один добуток з об'єднанням повторень $W_3 = [\cos(4\Delta\varphi)] * [x(4) + (-x(3))] - \text{добуток та } [\cos(0) * x(0)] = x(0).$

Завершується обчислення об'єднанням результатів згорток горизонтально на основі відповідних координат перших елементів підматриць. Об'єднання результатів циклічних згорток виконуються відповідно поданої структурної

схеми (рис. 3.10), використовуючи додавання та зсуви, для визначення вихідної послідовності перетворення.



CC – р-точкова циклічна згортка;
 U' – розширення векторів;
 U – додавання результатів згорток;

Рисунок 3.10 – Структурна схема об'єднання результатів згорток ДКП-III, N=8

У результаті виконання визначаємо послідовність вихідних даних $X[0]$, $X[1]$, ..., $X[7]$ для ДКП-III обсягу $N=8$.

Розглянемо алгоритми ДКП-II для обсягу перетворень $N=2^n$ ($n=2,3,\dots,k$). Відповідно особливостей синтезу для ДКП-II твірні масиви задаються на основі стовпців обсягом $2 \times (2^n)$, що містять підмасиви з довжинами 2^i , ($i=0(1),\dots,n$) Значення аргументів у підматрицях базисної частини ДКП-II визначаються після виконання спрощення за першою симетрією ($4N - n_{ij} \bmod 4N$, $n_{ij} \bmod 4N > 2N$).

Приклади конкретних твірних масивів для обсягів $N=16, 32$

$N=16$,

а) $P(32)=P_1(1) P_2(2^4) P_3(2^3) P_4(2^2) P_5(2^1) P_6(2^0)$, (підмасиви з кількістю елементів)

$P(32)=(0) (1,3,9,27,17,13,25,11,31,29,23,5,15,19,7,21) (2,6,18,10,30,26,14,22)$

$(4,12,28,20) (8,24) (16)$;

$P(32)=(0) (1,5,25,3,15,11,9,19,31,27,7,29,17,21,23,13) (2,10,14,6,30,22,18,26)$

$(4,20,28,12) (8,24) (16)$;

б) $P(32)=P_1(1) P_2(2^3) P_3(2^2) P_4(2^3) P_5(2^1) P_6(2^2) P_7(2^0) P_8(2^1) P_9(2^0) P_{10}(2^0)$,

$P(32)=(0)(1,7,15,23,31,25,17,9)(2,14,30,18)(3,21,19,5,29,11,13,27)(4,28)(6,22,26,10)$

$(8)(12,20)(16)(24)$;

$P(32)=(0)(1,9,17,25,31,23,15,7)(2,18,30,14)(3,27,13,11,29,5,19,21)(4,28)(6,10,26,22)$

$(8)(12,20)(16)(24)$;

с)

$P(32)=P_1(1)P_2(2^2)P_3(2^1)P_4(2^2)P_5(2^0)P_6(2^2)P_7(2^1)P_8(2^2)P_9(2^0)P_{10}(2^1)P_{11}(2^0)P_{12}(2^1)P_{13}(2^0)$

$P_{14}(2^0) P_{15}(2^0) P_{16}(2^0)$,

$P(32)=(0)(1,15,31,17)(2,30)(3,19,29,13)(4)(5,11,27,21)(6,26)(7,23,25,9)(8)(10,22)$

$(12)(14,18)(16)(20)(24)(28)$;

$P(32)=(0)(1,17,31,15)(2,30)(3,13,29,19)(4)(5,21,27,11)(6,26)(7,9,25,23)(8)(10,22)$

(12)(14,18)(16)(20)(24)(28);

$P(32)=(0)(1,31)(2)(3,29)(4)(5,27)(6)(7,25)(8)(9,23)(10)(11,21)(12)(13,19)(14)(15,17)$
 $(16)(18)(20)(22)(24)(26)(28)(30)$;

$N=32$,

$P(64)=(0)(1,3,9,27,47,13,39,11,33,29,41,5,15,45,7,21,63,61,55,37,17,51,25,53,31,$
 $35,23,59,49,19,57,43)(2,6,18,54,34,26,50,22,62,58,46,10,30,38,14,42)$
 $(4,12,36,20,60,52,28,44)(8,24,56,40)(16,48)(32)$;

$P(64)=(0)(1,7,49,41,31,39,17,9,63,57,15,23,33,25,47,55)(2,14,30,46,62,50,34,18)$
 $(3,21,19,5,35,11,51,27,61,43,45,59,29,53,13,37)(4,28,60,36)(6,42,38,10,58,22,26,54)$
 $(8,56)(12,44,52,20)(16)(24,40)(32)(48)$;

$P(64)=(0)(1,15,31,47,63,49,33,17)(2,30,62,34)(3,45,35,13,61,19,29,51)(4,60)(5,53,27,$
 $21,59,11,37,43)(6,38,58,26)(7,23,39,55,57,41,25,9)(8)(10,22,54,42)(12,52)(14,46,50,$
 $18)(16)(20,44)(24)(28,36)(32)(40)(48)(56)$;

$P(64)=(0)(1,31,63,33)(2,62)(3,35,61,29)(4)(5,27,59,37)(6,58)(7,39,57,25)(8)(9,23,55,$
 $41)$
 $(10,54)(11,43,53,21)(12)(13,19,51,45)(14,50)(15,47,49,17)(16)(18,46)(20)(22,42)(24)$
 $(26,38)(28)(30,34)(32)(36)(40)(44)(48)(52)(56)(60)$

$P(64)=(0)(1,63)(2)(3,61)(4)(5,59)(6)(7,57)(8)(9,55)(10)(11,53)(12)(13,51)(14)(15,49)$
 $(16)(17,47)(18)(19,45)(20)(21,43)(22)(23,41)(24)(25,39)(26)(27,37)(28)(29,35)$
 $(30)(31,33)(32)(34)(36)(38)(40)(42)(44)(46)(48)(50)(52)(54)(56)(58)(60)(62)$;

У загальному випадку для ДКП-II обсягу $N=2^n$ циклічні підматриці, що визначаються відповідними твірними підмасивами $P(n_1), P(n_2), P(n_3), \dots$, твірного масиву $P(n)$ у базисній матриці аргументів, задають структуру відповідно до табл. 3.18.

У табл. 3.18 відображено, що твірний масив може складатись з підмасивів з кількістю варіантів а), б), в), ... Наприклад, варіант а), для обсягу $N=2^{n=4}=16$ може сформувати п'ять твірних підмасивів $P(32)=P_1(1) P_2(2^4) P_3(2^3) P_4(2^2) P_5(2^1) P_6(2^0)$ без урахування $P_1(1)=0$.

Аналогічно ДКП-II, твірний масив для ДКП-III обсягом $N=16$

$P(32)=P_1(1) P_2(2^4) P_3(2^3) P_4(2^2) P_5(2^1) P_6(2^0)$,

містить 6 підмасивів:

$P_2(2^4)=(1,3,9,27,17,13,25,11,31,29,23,5,15,19,7,21)$, $P_3(2^3)=(2,6,18,10,30,26,14,22)$,
 $P_4(2^2) = (4,12,28,20)$, $P_5(2^1) = (8,24)$, $P_6(2^0)=16$, $P_1(1) = 0$.

Таблиця 3.18 – Розподіл підматриць у базисній матриці аргументів ДКП-II

а) $P(n_1) - 2^{n-1}$ -точкових згорток;															
б) $P(n_{11}), P(n_{12}) -$ дві 2^{n-2} -точкових згорток;															
в) $P(n_{111}), P(n_{112}), P(n_{121}), P(n_{122}) -$ чотири 2^{n-3} -точкових згорток;															
...															
а) $P(n_2) - 2^{n-2}$ -точкових згорток;								а) $P(n_2)$							
б) $P(n_2) -$ дві 2^{n-3} -точкових згорток;								б) $P(n_2)$							
...															
а) $P(n_3) - 2^{n-3}$ згорток				$P(n_3)$				$P(n_3)$				$P(n_3)$			
...															
...															
$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$	$P(n)$
))))))))))))))))

Кількість отриманих операцій множення та додавання для варіантів твірних масивів у порівнянні з найкращими традиційними подано у табл. 3.19.

Таблиця 3.19 – Таблиця числа операцій ДКП II, $N=2^n$

Обсяг, $N=2^n$	Додавання а) б) в) ...1)	Множення а) б) в)... 1)	Традиційні дод./множ.
8	22 (35) (23)	8 (13) (21)	29 / 12
16	96 (119) (131)(83)	22 (33)(51) (85)	81 / 32
32	338 (412) ... (339)	55 (89) ... (341)	209 / 80
64	548 (809) ... (1359)	125(189) ... (1365)	513 / 192

Аналітичні вирази обчислювальних затрат, що складається з трьох складових C_I^+ – попереднього об'єднання даних, $\sum C_p^{+,*}$ – виконання циклічних згорток,

C_{III}^+ – формування вихідних значень подано у табл.3.20 для варіантів а), б),...1) твірних масивів ДКП II обсягів $N=2^n$.

Таблиця 3.20 – Обчислювальні затрати алгоритмів ДКП II для обсягів $N=2^n$

Твірні масиви		$C_I^+ =$	$\sum C_p^{+,*} =$	$C_{III}^+ =$
а)	$P(2^n)P(2^{n-1})\dots$ $P(2^0);$	$\sum_{i=1}^{n-1} (N/2^i) =$ $=N/2+N/4+\dots+2;$	$\sum_{i=1}^n (N/2^i)_p =$ $=(N/2)_p+(N/4)_p+\dots$ $+(2)_p+1_p ;$	0
б)	$P(2^{n-1}) P(2^{n-1})$ $P(2^{n-2}) P(2^{n-2})$ $P(2^{n-2}) P(2^{n-2})\dots$ $P(2^0);$	$\sum_{i=0}^n (N/2^i) =$ $=N+N/2+N/4+\dots +1;$	$\sum_{i=2}^n 4x(N/2^i)_p =$ $=4x(N/4)_p$ $+4x(N/8)_p +\dots+$ $(2)_p+1_p;$	$\sum_{i=1}^{n-1} (N/2^i) =$ $= N/2+N/4+\dots+2;$
...
1)	$P(2^1) P(2^1)\dots$ $P(2^1) P(2^0) \dots$ $P(2^0);$	$N + \sum_{i=0}^n (N/2^i + N/2^{i+1})$ $=N+(N+N/2)+ (N/2+$ $N/4)+\dots +1;$	$\sum_{i=1}^n [i (N/2^i)x(1)_p]$ $=(N/2)x(1_p)+2(N/$ $4)x(1_p)+\dots+1_p;$	$\sum_{i=1}^{n-1} (N/2^i) * (N/2^i - 1)$ $=N/2*(N/2-1)+$ $N/4* (N/4-1)$ $+\dots+2;$

Для ДКП III обсягу $N=16$, за підмасивами $P_2(2^4)$, $P_3(2^3)$, $P_4(2^2)$, $P_5(2^1)$, $P_6(2^0)$ твірного масиву $P(31)$ задають циклічні зліва підматриці, що мають структуру подану на рис. 3.11.

$P_2(2^4)$	$P_3(2^3)$	$P_4(2^2)$	$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
			$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
			$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
		$P_4(2^2)$	$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
			$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
			$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
	$P_3(2^3)$	$P_4(2^2)$	$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
			$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
			$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
		$P_4(2^2),$	$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
			$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$
			$P_5(2^1)$	$P_6(2^0)$

Рисунок 3.11 – Структура базисної матриці аргументів ДКП-III обсягу $N=16$

Отже, вибір твірних масиву та синтез алгоритму визначатиметься технологією проведення розпаралелення обчислень на основі твірних підмасивів.

Структуру базисної матриці аргументів ДКП-III $N=2^n$ подано на рис. 3.12.

в)	б)	а)	в)	б)	а)	в)	б)	а)	б)	а)											
											б)	а)	б)	а)	б)	а)					
																	а)	б)	а)	б)	а)

Рисунок 3.12 – Структура базисної матриці аргументів ДКП-III $N=2^n$ для твірних масивів форми а), б), в)

Виконання ДКП-III, ДКП-II з використанням циклічних згорток обсягом рівному цілому степеню два $N=16, 32, 64, 128, 256, \dots$, можна узагальнити на

основі сформованого за першим та третім рядком/стовпцем твірного масиву форми а) для одержаної структури базисної матриці та подати у вигляді табл.3.21 дані для кількості циклічних згорток – s , з відповідними обсягами – d . Дані згортки містять повторенням групи елементів, що приводить до двічі меншого виконання циклічних згорток.

Таблиця 3.21 – Циклічні згортки у структурі базису ДКП-II, ДКП-III для обсягів цілої степені два $N=2^n$

N	4	8	16	32	64	128	...	2^n
s	4	5	6	7	8	9	...	$N+2$
d	2	4	8	16	32	64		2^{n-1}
	1	2	4	8	16	32		2^{n-2}
		1	2	4	8	16
			1	2		2^2
				1	2	2		2
				1	1			1

Для обсягів $N=q^n$, де q просте число, більше за два, характерні ідентичні блочно-циклічної структури матричного базису основних чотирьох видів дискретних косинусних. Адже, для цих обсягів відповідні твірні масиви мають конкретний набір твірних підмасивів з певною кількістю елементів. Наприклад, для ДКП-II обсягів $N=q^n$ твірний масив складається з конкретного набору твірних підмасивів з вказаною кількістю елементів відповідно виразу:

$$\begin{aligned}
 P\{2 \cdot q^n - 1\} &= P_1\{q^n - q^{n-1}\} P_2\{q^n - q^{n-1}/q\} P_3\{q^{n-2} - q^{n-3}\} \dots P_n\{q^2 - q^1\} P_{n+1}\{1\} \\
 &P_{n+2}\{(q^n - q^{n-1})/2\} P_{n+3}\{(q^n - q^{n-1})/2\} P_{n+4}\{(q^{n-1} - q^{n-2})/(2q)\} P_{n+5}\{(q^{n-1} - q^{n-2})/(2q)\} \\
 &\dots P_{n+2n-3}\{(q^2 - q^1)/2\} P_{n+2n-2}\{(q^2 - q^1)/2\} \dots P_{n+2n-1}\{1\} P_{n+2n}\{1\}. \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

Це дозволяє вилучити етап аналізу ідентичних підматриць і відповідно прискорити процес синтезу алгоритму.

Отже, базисні матриці ДКП-II та ДКП-III для обсягів, що дорівнюють цілому степеню простого числа, мають закономірні особливості нарощення у структурі базисного перетворення і, відповідно, єдиний алгоритм обчислення у процесі збільшення степеня простого числа обсягу перетворення N .

3.4 Синтез алгоритму обчислення ДКП-IV на основі циклічних згорток

3.4.1 Аналіз базисної матриці ДКП-IV

ДКП-IV відповідає виду розширення, який особливо розглядає конкретні крайні значення вибірок послідовності перетворення. На рис. 3.6 показано приклад продовження для 4 елементної послідовності, що відповідає крайовим умовам *HS*. Вибірки вхідної послідовності (рис. 3.13) позначено чорними точками.

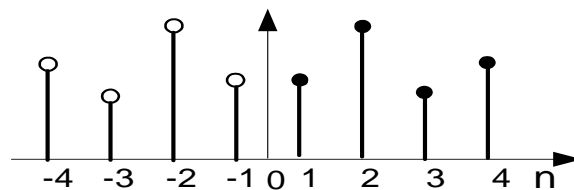


Рисунок 3.13 – Продовження 4 елементної послідовності

Продовження послідовності $x(n)$ відповідає симетрії ДКП-IV з розширенням *HSNA*, поданої у табл. 2.1, відповідно [129]. Всі продовження періодичні і мають властивість парності. У кожному випадку скінченна послідовність легко виділяється як перші чотири елементи періоду та видно парну симетрію або асиметрію відносно точок $n=0$, $n=N-1$, $n = (2N-2)$ відповідно до рис. 3.14.

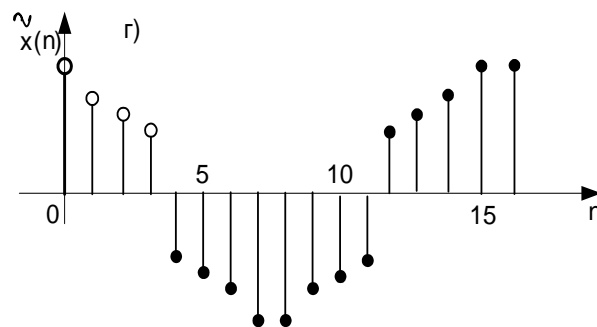


Рисунок 3.14 – Продовження 4 елементної послідовності для ДКП-IV

Різниця між продовженнями для ДКП-IV та іншими видами ДКП полягає у тому, що крайні вибірки зсунутих версій послідовності з одного краю симетричні, а іншого – асиметричні. Для ДКП-IV послідовність $x(n)$ відповідно ДПФ спочатку модифікується у крайніх точках $n=0$, $n=(N-1)$, а далі продовжується до $4N$ – періодичної послідовності. У прикладі (рис. 3.14),

реальний період послідовності $\tilde{x}(n)$ дорівнює $N=4$, причому вона має парну симетрію відносно $n=0$, і непарну відносно $n=N-1=3$. Називають такий тип симетрії видом періодичної симетрії ДКП-IV і позначають $X^{c4}(k)$. Формула обчислення ДКП-IV для вхідної послідовності $x(n)$ подається у вигляді

$$X^{c4}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left[\frac{(2k+1)(2n+1)\pi}{4N}\right], \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.57)$$

Пряме ДКП-IV та зворотне ЗДКП-IV взаємовідповідні

$$(\text{ДТП}_{N}^{\text{IV}})^{-1} = (\text{ДТП}_{N}^{\text{IV}})^{\text{T}} = (\text{ДТП}_{N}^{\text{IV}}). \quad (3.58)$$

Подання ДКП-IV у матричній формі відповідно буде

$$X = C_{N}^{\text{IV}} x, \quad (3.59)$$

де матриці C_{N}^{IV} мають розмірність $(N \times N)$ з індексами за рядками $k = 0, \dots, N-1$ та індексами за стовпцями $n = 0, \dots, N-1$; матриці стовпці вихідних $X(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ та вхідних даних $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Відповідна k -та компонента ДКП-IV для кожного n -го базисного вектора матиме вигляд

$$c'_{k,n} = \cos [(2k+1)(2n+1)\pi/4N]. \quad (3.60)$$

Проаналізуємо структуру матриці базису ДКП-IV за аргументами компонентів $c_{k,n}$ ($k, n = 0, 1, \dots, N$) базисного перетворення

$$(2k+1)(2n+1)\pi/4N = c_{k,n} \Delta\varphi, \quad (3.61)$$

де $\Delta\varphi = \pi/4N$; N – ціле значення обсягу ДКП-IV.

Проведемо детальний аналіз аргументів $c_{k,n} = (2k+1)(2n+1)$ базису ДКП-IV ($k, n = 0, 1, \dots, N-1$).

Функція $\cos [(2k+1)(2n+1)\pi/(4N)]$ – періодична відносно $8N$ вибірок, тому можна записати на основі базису матрицю аргументів косинусу порядку $(N \times N)$ у вигляді:

$$C_a^{\text{IV}}(k,n) = [(2k+1)*(2n+1) \bmod (8N)], \quad (3.62)$$

де $C_a^{\text{IV}}(k,n)$ – значення аргументів матриці для $k=0(1)N-1$ рядку та $n=0(1)N-1$ стовпцю.

З елементів $c_{k,n}$ матриці C_a^{IV} виділяємо значення, більші за $4N$, і спрощуємо, враховуючи симетрію базисної косинусної функції відносно π

$$C_a = \begin{cases} (8N - c_{k,n}), & \text{якщо } c_{k,n} > 4N; \\ c_{k,n}, & \text{якщо } c_{k,n} \leq 4N \end{cases} \quad (3.63)$$

Функція $\cos[(2k+1)(2n+1)\pi/4N]$ – періодична (3.62) відносно $8N$, симетрична відносно аргумента π , що відповідає значенню $(4N)$, асиметрична відносно аргумента $\pi/2$, що відповідає значенню $(2N)$. Тому спрощена матриця \underline{C}_a^{IV} визначається послідовним виконанням обчислень

$$c_{k,n} = (c_{k,n}) \bmod 8N; \quad (3.64)$$

$$c_{k,n} = 8N - [(c_{k,n}) \bmod 8N], \text{ якщо } [(c_{k,n}) \bmod 8N] > 4N; \quad (3.65)$$

$$\underline{c}_{k,n} = 4N - \{8N - [(c_{k,n}) \bmod 8N]\}, \text{ якщо } \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 8N]\} > 2N, \quad (3.66)$$

інакше $\underline{c}_{k,n} = c_{k,n}$.

Спрощена матриця \underline{C}_a доповнюється матрицею знаків S_c косинуса, що визначається за нерівностями:

$$S_c[k,n] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 2N > c_{k,n} > 6N; \\ 0, & \text{якщо } c_{k,n} = 2N, 6N; \\ -1, & \text{якщо } 2N < c_{k,n} < 6N, \end{cases} \quad (3.67)$$

де $k=0(1)N-1$, $n=0(1)N-1$.

Наприклад, матриці аргументів ДКП-IV для $N=4$ мають значення

$$C_a^{IV} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 15 & 5 \\ 5 & 15 & 9 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{C}_a^{IV} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_c = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & - & - \\ + & - & + & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Отже, аналіз та поетапне спрощення базисної матриці аргументів на основі використання властивості періодичності і симетричності базисної функції ДКП-IV привело до спрощеної матриці \underline{C}_a^{IV} аргументів з доповнюючою матрицею знаків S_c , що використовуватимуться для подальшої організації ефективного обчислення перетворення.

3.4.2 Особливості синтезу обчислення ДКП-IV на основі циклічних згорток

Розроблений підхід для ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень, що базуються на декомпозиції базисної матриці на лівоциркулянтні під матриці, розглянуто у роботах [178], [182]. Відповідно до підходу структуру базисної матриці можна задати твірним масивом $P(n)$.

Період ДКП- IV дорівнює $T=8N$ та індекси змінюються у вигляді $(2n+1)$. Тому твірні масиви містять кількість елементів $2N$, що перекриває набір на половині періоду функції косинус відповідно принципу узагальненої методології.

Приклади варіантів твірних масивів $P(n)$, $P'(n)$, $S(n)$ для ДКП- IV обсягів:

$N=11$

(1, 3, 9, 27, 7, 21, 25, 13, 39, 29) (5, 15, 43, 41, 35, 17, 37, 23, 19, 31) (11, 33),
 (0, 1, 4, 13, 3, 10, 12, 6, 19, 14) (2, 7, 21, 20, 17, 8, 18, 11, 9, 15) (5, 16),
 (+, +, +, -, +, +, -, +, -, -) (+, +, -, -, -, +, -, -, +, -) (+, -);

(1, 17, 25, 15, 9, 23, 39, 41, 7, 31) (3, 37, 13, 43, 27, 19, 29, 35, 21, 5) (11) (33),
 (0, 8, 12, 7, 4, 11, 19, 20, 3, 15) (1, 18, 6, 21, 13, 9, 14, 17, 10, 2) (5) (16),
 (+, +, -, +, +, -, -, -, +, -) (+, -, +, -, -, +, -, -, +, +) (+) (-);

(1, 7, 39, 9, 25) (3, 21, 29, 27, 13) (5, 35, 19, 43, 37) (11) (15, 17, 31, 41, 23)(33),
 (0, 3, 19, 4, 12) (1, 10, 14, 13, 6) (2, 17, 9, 21, 18) (5) (7, 8, 15, 20, 11) (16),
 (+, +, -, +, -) (+, +, -, -, +) (+, -, +, -, -) (+) (+, +, -, -, -) (-);

(1, 9, 7, 25, 39) (3, 27, 21, 13, 29) (5, 43, 35, 37, 19) (11) (15, 41, 17, 23, 31)(33),
 (0, 4, 3, 12, 19) (1, 13, 10, 6, 14) (2, 21, 17, 18, 9) (5) (7, 20, 8, 11, 15) (16),
 (+, +, +, -, -) (+, -, +, +, -) (+, -, -, -, +) (+) (+, -, +, -, -) (-);

$N=12$

(1, 3, 9, 27, 15, 45, 39, 21, 33, 3, 9, 27, 15, 45, 39, 21, 33, 3, 9, 27, 15, 45, 39, 21),
 (0, 1, 4, 13, 7, 22, 19, 10, 16, 1, 4, 13, 7, 22, 19, 10, 16, 1, 4, 13, 7, 22, 19, 10),
 (+, +, +, -, +, -, -, +, -, +, +, -, +, -, -, +, -, +, +, -, +, -, -, +);

(1, 5, 25, 29, 47, 43, 23, 19)(3, 15, 21, 9, 45, 33, 27, 39) (7, 35, 17, 11, 41, 13, 31 37),
 (0, 2, 12, 14, 23, 21, 11, 9) (1, 7, 10, 4, 22, 16, 13, 19) (3, 17, 8, 5, 20, 6, 15, 18),
 (+, +, -, -, -, -, +, +) (+, +, +, +, -, -, -, -) (+, -, +, +, -, +, -, -);

(1, 7, 47, 41)(3, 21, 45, 27)(5, 35, 43, 13)(9, 33, 39, 15)(11, 19, 37, 29)(17, 23, 31, 25),
 (0, 3, 23, 20) (1, 10, 22, 13) (2, 17, 21, 6) (4, 16, 19, 7) (5, 9, 18, 14) (8, 11, 15, 12),
 (+, +, -, -) (+, +, -, -) (+, -, -, +) (+, -, -, +) (+, +, -, -) (+, +, -, -);

N=13

(1 3 9 27 23 35) (5 15 45 31 11 33) (7 21 41 19 47 37) (13 39) (17 51 49 43 25 29),
 (0 1 4 13 11 17) (2 7 22 15 5 16) (3 10 20 9 23 18) (6 19) (8 2 5 24 21 12 14),
 + + + - + - + + - - + - + + - + - - + - + - - - + -);

(1 5 25 21) (3 15 29 41) (7 35 33 43) (9 45 17 19) (11 49 37 23) (13 39) (27 31 51 47),
 (0 2 12 10) (1 7 14 20) (3 17 16 21) (4 22 8 9) (5 24 18 11) (6 19) (13 15 25 23),
 + + + + + - - + - - - + - + + + - - + + - - - - -);

(1 7 49 31 9 41 25 33 23 47 17 15) (3 21 43 11 27 19 29 5 35 37 51 45) (13) (39),
 (0 3 24 15 4 20 12 16 11 23 8 7) (1 10 21 5 13 9 14 2 17 18 25 22) (6) (19),
 + + - - + - + - + - + + + + - + - + - + - - - - + -);

N=14

(1 3 9 27 31 19 55 53 47 29 25 37) (5 15 45 23 43 17 51 41 11 33 13 39) (7 21 49 35),
 (0 1 4 13 15 9 27 26 23 14 12 18) (2 7 22 11 21 8 25 20 5 16 6 19) (3 10 24 17),
 (+ + + + - + - - - - + -) (+ + - + - + - - - + - + -) (+ + - -);

(1 5 25 13 47 11 55 51 31 43 9 45) (3 15 37 39 29 33 53 41 19 17 27 23) (7 35 49 21);
 (0 2 12 6 23 5 27 25 15 21 4 22) (1 7 18 19 14 16 26 20 9 8 13 11) (3 17 24 10);
 + + + + - + - - - - + - + + - - - - - + + + + + - - +);

(1 9 31 55 47 25) (3 27 19 53 29 37) (5 45 43 51 11 13) (7 49) (15 23 17 41 33 39) (21
 35),
 (0 4 15 27 23 12) (1 13 9 26 14 18) (2 22 21 25 5 6) (3 24) (7 11 8 20 16 19) (10 17),
 + + - - - + + + + - - - + - - - + + + - + + + - - - + -);

N=15

(1 3 9 27 39 3 9 27 39 3 9 27 39 3 9 27 39 3 9 27 39 3 9 27 39 3 9 27 39 3),
 (0 1 4 13 19 1 4 13 19 1 4 13 19 1 4 13 19 1 4 13 19 1 4 13 19 1 4 13 19 1),
 + + + + - + + + - + + + - + + + - + + + - + + + - + + + - +);

(1 7 49 17) (3 21 27 51) (5 35) (9 57 39 33) (11 43 59 53) (13 29 37 19) (15) (23 41 47
 31) (25 55) (45);
 (0 3 24 8) (1 10 13 25) (2 17) (4 28 19 16) (5 21 29 26) (6 14 18 9) (7) (11 20 23 15) (12 27)
 (22),
 (+ + - + + + + - + - + - - - + - - - + + - + + + - - - - + - -).

Наприклад, твірний масив $P(16)$ для обсягу перетворення $N=8$ має значення елементів рядків/стовпців для $k, n=0$, що дорівнюють непарним цілочисельним значенням $P(16)$ для матриці, визначеної за $(2n+1)$, і подані у порядку відповідно $P(16)$

$$P(16) = (1,3,9,27,17,13,25,11,31,29,23,5,15,19,7,21),$$

де $n=2N=16$, $k=1$, n_{ij} – елемент масиву, що відповідає номеру рядків/стовпців у структурі базисної матриці. Перехід $P(16)$ від непарних значень елементів до відповідних значень $n_{ij} = (n_{ij}-1)/2$

$$P(16) = (0,1,4,13,8,6,12,5,15,14,11,2,7,9,3,10).$$

Твірний одновимірний масив $P(n)$, як видно з наведених прикладів, може складатись як з однієї підматриці $P_1(n)$, так і з декількох $P_1(n_1), P_2(n_2), \dots, P_k(n_k)$, що можуть містити однакову або різну кількість елементів.

Властивості симетрії та періодичності базису перетворення ДКП-IV приводять до ефективнішого подання меншими значеннями елементів спрощених твірних масивів $P'(n)$ із доповненнями відповідних масивів знаків $S(n)$. Матриці знаків $S(n)$ містять значення елементів, що дорівнюють $+1, -1, 0$.

Приклади спрощених твірних масивів $P(16)$ для обсягу перетворення $N=8$

$$P'(16) = (1, 3, 9, 5, 15, 13, 7, 11, 1, 3, 9, 5, 15, 13, 7, 11),$$

$$S(n) = (+, +, +, -, -, +, -, +, -, -, -, +, +, -, +, -),$$

що відповідають послідовності рядків/стовпців за

$$P(16) = (0,1,4,13,8,6,12,5,15,14,11,2,7,9,3,10),$$

у межах від 0 до $(2N-1)$. Твірні масиви $P(n)$, $P'(n)$, $S(n)$ визначають структуру аргументів C_a, C_c базисної матриці.

Процес подальшого синтезу обчислення ДКП-IV полягає у визначенні структури базисної матриці для конкретного обсягу N . Для визначення ідентичних циклічних підматриць у базисі ДКП-IV ефективно застосовувати аналіз структури за твірними масивами.

Об'єднання результатів згорток виконується горизонтально на основі відповідних координат перших елементів підматриць. Одержані вихідні значення перетворення відповідають порядку відповідно до значень елементів твірного масиву $P(n)$.

Отже, серед основних *особливостей*, які необхідно враховувати у процесі синтезу алгоритму ДКП-IV, можна відзначити:

– розмірність матриці $(2N) \times (2N)$;

- твірний масив $P(n)$ формується з базисної матриці аргументів після виконання першої симетрії $(8N-z)$;
- послідовність вхідних значень $[x] [-x]'$ за твірним масивом $P(n)$ враховує індексацію $(n/2-1)$;
- обчислені вихідні значення $2*X(i)$;
- особливість циклічних згорток мішана (суцільна або з двома групами ідентичних елементів);
- для парних $2p$, значень обсягу перетворення є одна вісь симетрії π ;
- для N кратних чотирьом $4p$ маємо такі осі симетрії $[\pi/2]$;
- значення аргументів базису в межах $(0,2\pi)$, що належать до перелічених осей симетрії: $0, N (\pi/2), 2N (\pi), 3N (3\pi/2), 2\pi$;
- кількість варіантів твірних масивів більше одного.

3.4.3 Приклад обчислення ДКП-IV обсягу $N=10$ на основі циклічних згорток

Розглянемо приклад узагальненої методології з врахуванням особливостей для обчислення ДКП-IV обсягу $N=10$. Формула обчислення ДКП-IV подається у вигляді:

$$X(k) = \sqrt{\frac{2}{10}} \sum_{n=0}^9 x(n) \cos\left[\frac{(2k+1)(2n+1)\pi}{40}\right], \quad k = 0,1,\dots,9, \quad (3.69)$$

де вхідна послідовність $x(k)$ та $X(k)$ вихідна послідовність перетворення.

Обсяг перетворення розкладається $N=10=2 \cdot 5$ на прості множники і елементами твірною масиву $P(n)$ можуть бути значення $p_{ij} = (1,3,5,\dots,4N-1)$.

Варіанти твірною масиву $P(n)$ $N=10$

- а) $k=6$,
 (1, 7, 31, 23) (3, 21, 13, 11) (5, 35) (9, 17, 39, 33) (15, 25) (19, 27, 29, 37),
 (0, 3, 15, 11) (1, 10, 6, 5) (2, 17) (4, 8, 19, 16) (7, 12) (9, 13, 14, 18),
 (+, +, -, -) (+, -, +, +) (+,-) (+, -, +, +) (-, -, +, -) (+, -, -, -);
- б) $k=5$,

(1, 11, 39, 29) (3, 33, 37, 7) (5, 25, 35, 15) (9, 19, 31, 21) (13, 17, 27, 23),
 (0, 5, 19, 14) (1, 16, 18, 3) (2, 12, 17, 7) (4, 9, 15, 10) (6, 8, 13, 11),
 (+, +, -, -) (+, -, -, +) (+, -, -, +) (+, +, -, -) (+, +, -, -);

(1, 13, 9, 37) (3, 39, 27, 31) (5, 15, 35, 25) (7, 11, 17, 19) (21, 33, 29, 23),
 (0, 6, 4, 18) (1, 19, 13, 15) (2, 7, 17, 12) (3, 5, 8, 9) (10, 16, 14, 11),
 (+, +, +, -) (+, -, -, -) (+, +, -, -) (+, +, +, +) (-, -, -, -);

в) $k=8$,

(1, 17, 31, 33) (3, 29, 13, 19) (5) (7, 39, 23, 9) (11, 27, 21, 37) (15) (25) (35),
 (0, 8, 15, 16) (1, 14, 6, 9) (2) (3, 19, 11, 4) (5, 13, 10, 18) (7) (12) (17),
 (+, +, -, -) (+, -, +, +) (+) (+, -, -, +) (+, -, -, -) (+) (-)(-);

г) $k=10$

(1, 9) (3, 27) (5, 35) (7, 17) (11, 19) (13, 37) (15, 25) (21, 29) (23, 33) (31, 39),
 (0, 4) (1, 13) (2, 17) (3, 8) (5, 9) (6, 18) (7, 12) (10, 14) (11, 16) (15, 19),
 (+, +) (+, -) (+, -) (+, +) (+, +) (+, -) (+, -) (-, -) (-, -) (-, -).

Розглянемо варіант сформованого значення твірною масиву обсягом $2N$ за циклічним розкладом підстановки симметричного спрощення:

$$P(n) = P(n_1) P(n_2) P(n_3) P(n_4) P(n_5), \quad k=5;$$

$$P(20) = (1,3,9,27)(5,15,35,25)(7,21,17,29)(11,33,19,23)(13,39,37,31).$$

Перехід від непарних значень елементів до відповідних значень $n_{ij} = (\underline{n}_{ij}-1)/2$

$$P(20) = (0,1,4,13)(2,7,17,12)(3,10,8,14)(5,16,9,11)(6,19,18,15) .$$

Спрощений твірний масив відповідно формул (3.86) набуває вигляду

$$P'(20) = (1,3,9,13) (1,3,9,13) (7,19,17,11)(7,19,17,11)(5,15,5,15),$$

$$Sc(20) = (+,+,+,-) (-,-,-,+) (+,-,+,-)(-,+,-,+)(+,+,-,-).$$

Твірний масив складається з підмасиву $P'(n_5)$, який містить елементи, кратні 5, що задають ідентичні циклічні структури у базисній матриці перетворення. Визначення параметрів: $k = 5$ – кількість підмасивів у твірному масиві; $L_1=4$, $L_2=4$, $L_3=4$, $L_4=4$, $L_5=4$ – кількість елементів у підмасивах $P(n_i)$ задають обсяг циклічних згорток; $m \geq k^2$ загальна кількість підматриць: $m = k^2 = 5^2 = 25$.

В аналізі структури базисної матриці обсягу $N=10$ для визначення ідентичних циклічних підматриць у базисі ДКП-IV ефективно застосовувати значення перших елементів циклічних підматриць і порівнювати між собою.

Таблиця 3.24 – Матриця знаків S_c ДКП-IV $N=10$

| k^n | | 0: | 1: | 4: | 13: | 3: | 10: | 8: | 14: | 12: | 2: | 7: | 17 |
|-------|----|----|----|----|-----|----|-----|----|-----|-----|----|----|----|
| | | 1 | 3 | 9 | 27 | 7 | 21 | 17 | 29 | 25 | 5 | 15 | 35 |
| 0: | 1 | + | + | + | - | + | - | + | - | - | + | + | - |
| 1: | 3 | + | + | - | + | - | + | - | + | + | + | - | - |
| 4: | 9 | + | - | + | + | + | - | + | - | + | - | - | + |
| 13: | 27 | - | + | + | + | - | + | - | + | - | - | + | + |
| 3: | 7 | + | - | + | - | - | + | - | - | + | - | - | + |
| 10: | 21 | - | + | - | + | + | - | - | - | - | - | + | + |
| 8: | 17 | + | - | + | - | - | - | - | + | - | + | + | - |
| 14: | 29 | - | + | - | + | - | - | + | - | + | + | - | - |
| 12: | 25 | - | + | + | - | + | - | - | + | + | - | - | + |
| 2: | 5 | + | + | - | - | - | - | + | + | - | - | + | + |
| 7: | 15 | + | - | - | + | - | + | + | - | - | + | + | - |
| 17: | 35 | - | - | + | + | + | + | - | - | + | + | - | - |

Формування послідовності вхідних значень за твірним масивом $[x] [-x]'$:

0, 1, ..., 9, 10, ..., 18, 19
 $x(0), x(1), \dots, x(9), -x(9), \dots, -x(1), -x(0)$.

На початку проводимо об'єднання вхідних значень відповідно масивів

$P(20) = (0,1,4,13)(12,2,7,17)(3,10,8,14)(16,9,11,5)(19,18,15,6);$
 $P'(20) = (1,3,9,13)(15,5,15,5)(7,19,17,11)(7,19,17,11)(1,3,9,13),$

відповідно повторення підмасивів (1,3,9,13) і (7,19,17,11)

$[x(0), x(1), x(4), x(13)] - [x(19), x(18), x(15), x(6)];$
 $[x(3), x(10), x(8), x(14)] + [x(16), x(9), x(11), x(5)].$

Визначення ідентичних циклічних підматриць виконується відбором за координатами перших елементів однакових підматриць горизонтально. Для координат рядків, кратних *простим множникам* розкладу обсягу $N=10=2 \times 5$ за структурою базису (табл. 3.22), виконуємо об'єднання вхідних даних горизонтально:

(9,1) – -15; (9,5) – +15; (9,10) – +15 для (5,15,5,15) поелементне об'єднання вхідних даних:

$-[x(0)-x(19), x(1)-x(18), x(4)-x(15), x(13)-x(6)] + [x(3)+x(16), x(10)+x(9), x(8)+x(11), x(14)+x(5)] + [x(12), x(2), x(7), x(17)].$

Виконання поелементних додавань вхідних значень подається розширено для розуміння алгоритму. Виконуємо обчислення циклічних згорток з елементами, кратними *простим множникам* розкладу обсягу (15,5,15,5):

(9,1) – -15; циклічна згортка між (15,5,15,5) та об'єднанням вхідних даних горизонтально, що зводиться до двоточнової. У даному випадку визначаємо два вихідні значення згортки.

Для координат стовпців (1,9), (5,9), (9,9) з елементами, кратними простим множникам розкладу обсягу, в структурі виконуємо обчислення циклічної згортки при аналізі підматриць вертикально: (1,9) – -15; циклічна згортка між (15,5,15,5) і даних $[x(12), x(2), x(7), x(17)]$, що зводиться до двоточнової.

Для решти незадіяних підматриць виконуються циклічні згортки за своїми параметрами на основі визначених координат за табл. 3.21 (1,1) – +1; (1,5) – +7; (5,1) – +7; (5,5) – -9; тобто виконуємо обчислення чотирьох 4-точкових циклічних згорток (рис. 3.15).

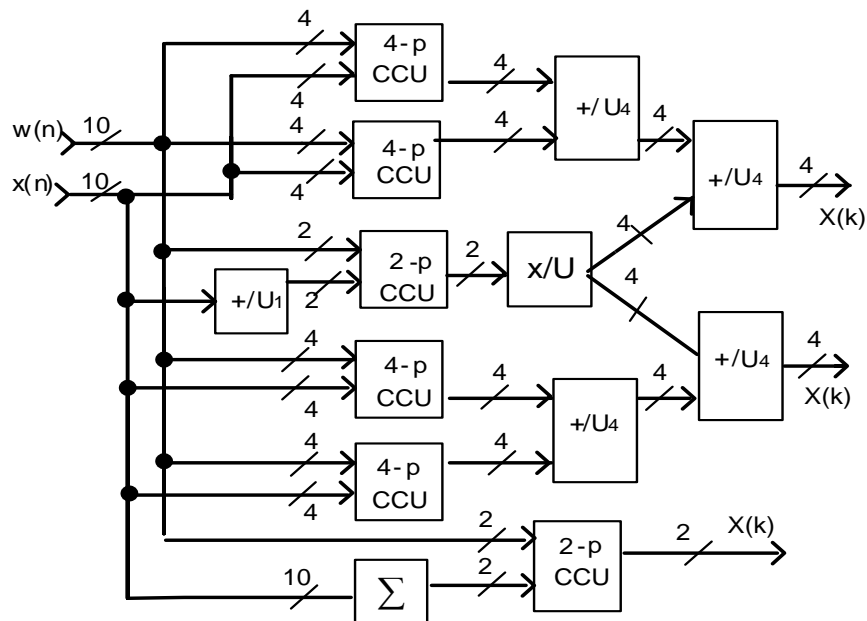


Рисунок 3.15 – Структурна схема обчислення ДКП-IV для обсягу перетворення $N=10$

Отже, обчислення ДКП-IV обсягу $N=10$ зводиться до виконання чотирьох 4-точкових та двох 2-точкових циклічних згорток. Об'єднання результатів згорток виконується горизонтально на основі відповідних координат перших

елементів підматриць. Збільшені вдвічі одержані вихідні значення ДКП-IV перетворення відповідають порядку, відповідно до значень твірного масиву, $X(0), X(1), X(4), X(6)=-X(13), X(3), X(9)=-X(10), X(8), X(5)=X(14), X(7)=-X(12), X(2)$.

У результаті проведеного аналізу об'єднаємо для чотирьох видів ДКП визначені особливості синтезу алгоритму в одну табл. 3.25.

Таблиця 3.25 – Особливості синтезу алгоритмів ДКП I-IV

| Особливості синтезу ДКП | | ДКП I | ДКП II | ДКП III | ДКП IV |
|--|--------------|---|--|--|--|
| Залежність індексів аргументів | | $(k\ n)$ | $k\ (2n+1)$ | $(2k+1)n$ | $(2k+1)$
$(2n+1)$ |
| Розмірність матриці аргументів (рядки)(стовпці) | | $\frac{(N-1)(N-1)}{2}$ | $\frac{(2N-1)(2N)}{2}$ | $(N)(2N-1)$ | $(2N)(2N)$ |
| Твірний масив $P(n)$ формується | | після виконання першої симетрії $P(n)$ $(2N-z)$; | $Pr(k), (4N-z);$
$Pc(n)$ | $Pr(2k+1)$
$Pc(n)$ | після виконання першої симетрії $P(n), (8N-z)$; |
| Послідовність вхідних значень (за твірним масивом) | | $[x]$ | $[x]\ [x']$
' з кінця | $[x]\ [-x']$
' з кінця | $[x]\ [-x']$
' з кінця |
| Послідовність вихідних значень (вдвічі більші) | | $[\pm X]$,
без $x(0), x(N-1)$ | $2[\pm X]$,
без $X(0)$ | $2[X]$,
без $x(0)$ | $2[\pm X]$, |
| Циклічні згортки з поторенням груп | | існує мішана | існує (2^n)
мішана | існує (2^n)
мішана | існує (2^n) |
| Кількість варіантів твірних масивів | | існує | існує | існує | існує |
| Осі симетрії для обсягів: | непарних p | $N(\pi)$ | $N(\pi/2),$
$2N(\pi),$
$3N(3\pi/2),$ | $N(\pi/2),$
$2N(\pi),$
$3N(3\pi/2),$ | $2N(\pi/2),$
$4N(\pi),$
$6N(3\pi/2),$ |

Отже, сформульовані принципи та етапи синтезу й обчислення з врахуванням особливостей, зведених у табл. 3.24 для кожного з чотирьох видів ДКП I-IV, підтверджують вірогідність розробленої узагальненої методології.

Висновки до третього розділу

1. У розділі розглянуто застосування узагальненої методології для синтезу алгоритмів дійсних дискретних косинусних перетворень чотирьох видів на основі ЦЗ, який передбачає аналіз базисної матриці, визначення особливостей синтезу алгоритму обчислення кожного з видів перетворення, побудову структурних схем обчислення ДКП I-IV.

2. Синтез алгоритму та виконання обчислення ДКП I-IV на основі циклічних згорток, відповідно узагальненої методології, містить етапи: аналізу виду та обсягу N перетворення; формування твірного масиву та спрощеного твірного масиву з доповненням масивом знаків; визначення коефіцієнтів функції косинусного базису за спрощеним твірним масивом; виділення ідентичних циклічних підматриць горизонтально та вертикально; переіндексацію за твірним масивом та об'єднання вхідних даних, відповідно однотипності циклічних підматриць горизонтально; ефективне обчислення зменшеної кількості циклічних згорток; об'єднання результатів швидких згорток для обчислення вихідних значень перетворення.

3. Твірний масив з відповідними параметрами характеризує загальну структуру базисних матриць та її особливості для ДКП I-IV і визначає алгоритм обчислення для кожного конкретного обсягу перетворення N . Одержана структура спрощених матриць і відповідних матриць знаків, визначених на основі твірного масиву $P(n)$, спрощує процес проведення обчислення ДКП I-IV на основі циклічних згорток.

4. При побудові твірного масиву необхідно враховувати особливості у процесі синтезу алгоритму для кожного виду ДКП. Особливості містять:

розмірність матриці аргументів; симетрії для формування елементів твірного масиву; послідовність вхідних значень; обчислені вихідні значення; антисиметричність вихідних значень; кількість варіантів твірних масивів; наявність осей симетрії;

5. Для взаємозворотніх перетворень ДКП-II і ДКП- III маємо транспоновані базисні матриці. Перетворення ДКП-II і ДКП-III мають свої конкретні особливості приведення до циклічних згорток у процесі синтезу та виконання алгоритму.

6. Базисні матриці ДКП I-IV для обсягів, що дорівнюють цілому степеню простого числа, мають закономірні особливості нарощення у структурі базисного перетворення і, відповідно, єдиний алгоритм обчислення у процесі збільшення степеня простого числа обсягу перетворення N . Завдяки цьому прискорюється процес синтезу алгоритму через виключення етапу аналізу ідентичних підматриць.

7. Сформульовані принципи та етапи синтезу й обчислення з врахуванням особливостей для кожного з чотирьох видів ДКП I-IV на прикладах підтверджують вірогідність розробленої узагальненої методології.

Основні результати розділу опубліковано в [1], [10], [17] - [19], [35], [36], [40], [49].

РОЗДІЛ 4

Синтез алгоритму обчислення чотирьох видів дискретного синусного перетворення (ДСП I-IV) на основі циклічних згорток

4.1 Основні види ДСП I-IV дискретного синусного перетворення

Дискретне синусне перетворення вперше запропоновано у 1976 році роботі для використання в обробці сигналів майже через два роки після появи дискретного косинусного перетворення. Подальший розвиток дискретних синусних перетворень пов'язаний з введенням нових його видів, аналізу їх властивостей та дослідженням можливих застосувань.

ДСП є вдосконаленням ДПФ для дійсних вхідних даних, адже комплексне перетворення Фур'є вносить надлишковість у цьому випадку [183]. Відповідно до теорії ДПФ для тригонометричних перетворень з базисом від 0 до π необхідно продовжити вхідну послідовність обсягом n . Продовження дійсних вхідних даних може розширюватись відповідно до правил WS, WA, NS, NA. Можливі тільки дві осі симетрії для обмеженої послідовності i , відповідно, можливі 8 варіантів ε -видів розширення [129], що відповідає 8 видам ДСП I-VIII (табл. 2.2.) Перетворення видів ДСП V-VIII не отримали ще широкого застосування в обробці сигналів, тому у роботі розглянуто синтез алгоритмів обчислення ДСП I-IV.

Взаємозв'язок прямих та зворотних (транспонованих) обчислень парних ДСП I-IV у загальному можна подати у вигляді:

$$(\text{ДСП}^I_N)^{-1} = (\text{ДСП}^I_N)^T = (\text{ДСП}^I_N); \quad (4.1)$$

$$(\text{ДСП}^{II}_N)^{-1} = (\text{ДСП}^{II}_N)^T = (\text{ДСП}^{III}_N); \quad (4.2)$$

$$(\text{ДСП}^{III}_N)^{-1} = (\text{ДСП}^{III}_N)^T = (\text{ДСП}^{II}_N); \quad (4.3)$$

$$(\text{ДСП}^{IV}_N)^{-1} = (\text{ДСП}^{IV}_N)^T = (\text{ДСП}^{IV}_N). \quad (4.4)$$

Для ДСП I, IV видів симетричні прямі і зворотні перетворення, а перетворення ДСП II і III видів взаємозворотні.

Розроблено різноманітні підходи [184], [185] ефективного обчислення ДСП I-IV. Одним з напрямів обчислення ДСП є алгоритми, що використовують швидкі циклічні згортки [186], [187]. Аналогічно ДКП, в алгоритмах ДСП на основі циклічних згорток у більшості розробок використано перехід від обчислення дискретного перетворення до циклічних згорток, застосовуючи переіндексацію за Рейдером [43] для простого обсягу перетворення, розклад складеного обсягу перетворення на прості множники за Агарвалом і Кулі [61] або комбінуючи дані підходи.

Розглянемо синтез алгоритму та виконання обчислення ДСП I-IV на основі циклічних згорток [188], що зможуть застосуватись на програмному та апаратному рівнях у багатьох прикладних розробках.

4.2 Синтез алгоритму обчислення ДСП-I на основі циклічних згорток

4.2.1 Аналіз базисної матриці ДСП-I першого виду

ДСП-I за [92] визначається за формулою

$$X_{N-1}^{s1}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-2} x(n) \sin\left[\frac{(k+1)(n+1)\pi}{N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-2, \quad (4.5)$$

$$[X^{s1}(k)]^{-1} = [X^{s1}(k)]^T = X^{s1}(k). \quad (4.6)$$

Подання ДСП-I у матричній формі має вигляд

$$X = C_{N-1}^I x, \quad (4.7)$$

де матриці C_{N-1} мають розмірність $(N-1 \times N-1)$ з індексами для рядків $k = 0, 1, \dots, N-2$ та індексами для стовпців $n=0, 1, \dots, N-2$; матриці-стовпці вихідних $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-2$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-2$.

Відповідна k -та компонента ДСП-I для кожного n -го базисного вектора матиме вигляд

$$c'_{k,n} = \sin [(k+1)(n+1)\pi/(N)]. \quad (4.8)$$

ДСП-I відповідає за [129] крайовим умовам розширення WAWA. Адже

відповідно до теорії ДПФ для тригонометричних перетворень з базисом від 0 до π необхідно продовжити вхідну послідовність синусного перетворення до періодичної.

Проаналізуємо структуру матриці базису ДСП-I за аргументами компонентів базисного перетворення

$$(k+1)(n+1)\pi/N = c_{k,n} \Delta\varphi, \quad (4.9)$$

де $\Delta\varphi = \pi/(N)$; N – ціле значення обсягу ДСП-I, $k, n = 0, 1, \dots, N-2$.

Функція $\sin [(k+1)(n+1)\pi/N]$ – періодична відносно $2N$ вибірок, тому можна записати на основі базису матрицю аргументів синусу порядку $(N \times N)$ у вигляді:

$$C_a^l(k, n) = [(k+1)(n+1) \bmod (2N)], \quad (4.10)$$

де $(k+1)(n+1) = c_{k,n}$ – значення аргументів матриці за $k=1(1)N-2$ рядком та $n=1(1)N-2$ стовпцем.

Функція $\sin[(k+1)(n+1)\pi/N]$ – періодична (4.10) відносно $2N$, асиметрична відносно аргументу π , що відповідає значенню N , симетрична відносно аргументу $\pi/2$, що відповідає значенню $N/2$. Тому спрощена матриця \underline{C}_a^l визначається послідовним виконанням обчислень

$$c_{k,n} = (c_{k,n}) \bmod 2N; \quad (4.11)$$

$$\underline{c}_{k,n} = 2N - [(c_{k,n}) \bmod 2N], \text{ якщо } [(c_{k,n}) \bmod 2N] > N, \quad (4.12)$$

далі виконується

$$\underline{c}_{k,n} = N - \{2N - [(c_{k,n}) \bmod 2N]\}, \text{ якщо } \{2N - [(c_{k,n}) \bmod 2N]\} > N/2, \quad (4.13)$$

$$\text{інакше } \underline{c}_{k,n} = c_{k,n},$$

з врахуванням доповнюючої матриці знаків S_s . Матриця знаків синуса S_s формується на основі елементів матриці (4.10) і визначається за нерівностями:

$$S_s[k, n] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 0 < c_{k,n} < N \\ 0, & \text{якщо } c_{k,n} = 0, N, \\ -1, & \text{якщо } N < c_{k,n} < 2N. \end{cases} \quad (4.14)$$

Враховуючи симетричність матриці $C_a^l(k, n)$ аргументів функцій базису ДСП-I відносно осей π та $\pi/2$, їх можна повністю визначити для значень $\underline{c}_{k,n}$, що можуть набувати $0(1)N/2$, але доповнюючи матрицями знаків S_s синуса.

Наприклад, у результаті (4.11-4.14) послідовність спрощених матриць \underline{C}_a^I аргументів та доповнююча матриця знаків S_s ДСП-I для $N=8$ мають значення

$$\underline{C}_a^I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 8 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{C}_a^I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad S_s^I = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & 0 & - & - & - \\ + & + & - & - & - & + & + \\ + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ + & - & - & + & - & - & + \\ + & - & + & 0 & - & + & - \\ + & - & + & - & + & - & + \end{bmatrix} .$$

Отже, аналіз та поетапне спрощення базисної матриці аргументів на основі використання властивості періодичності і симетричності базисної функції ДСП-I показав, що матриця \underline{C}_a^I аргументів містить значення елементів $(0,1,\dots,N/2)$. Застосовуючи спрощену матрицю \underline{C}_a^I аргументів та матрицю знаків S_s , синтезуємо алгоритм обчислення ДСП-I.

4.2.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДСП-I на основі циклічних згорток

Запропонований підхід для ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень, що базуються на декомпозиції базисної гармонічної функції розглянуто у роботах [153], [188] - [190]. У результаті структуру базисної матриці можна задати твірним масивом $P(n)$, де загальний n – обсяг масиву, що для ДСП-I визначається:

$$n = (n_1+n_2+\dots+n_k) = 2N-2, \quad (4.15)$$

де $n=(2N-1)$ набір значень аргументів базисної частини ДСП-I, без нульових значень. Твірний масив $P(n)$ об'єднує підмасиви. Число k підмасивів у $P(n)$ і їх обсяг визначається значенням N (просте, степінь простого, складене) обсягу перетворення.

Приклади твірних масивів ДСП-I для обсягів перетворення:

$N=7$

$(1,3,9,13,11,5)(2,6,4,12,8,10)(7)(0);$

(1,5,11,13,9,3)(2,10,8,12,4,6)(7)(0);

(1,9,11)(3,13,5)(2,4,8)(6,12,10);

(1,11,9)(3,5,13)(2,8,4)(6,10,12);

N=8,

(1,3,9,11)(15,13,7,5)(2,6)(10,14)(4,12);

(1,5,9,13)(3,15,11,7)(2,10)(4)(6,14)(12);

N=9

(1,5,7,17,13,11)(3,15)(9)(2,10,14,16,8,4)(6,12);

(1,7,13)(3)(5,17,11)(9)(15)(2,14,8)(4,10,16)(6)(12);

N=10

(1,3,9,7)(5,15)(11,13,19,17)(2,6,18,14)(4,12,16,8)(10);

(1,13,9,17)(3,19,7,11)(5)(15)(2,6,18,14)(4,12,16,8)(10);

N=11

(1,3,9,5,15)(7,21,19,13,17)(2,6,18,10,8)(4,12,14,20,16)(11)(0);

(1,13,15,19,5,21,9,7,3,17)(2,4,8,16,10,20,18,14,6,12)(11)(0);

N=12

(1,5)(2,10)(3,15)(4,20)(6)(8,16)(7,11)(9,21)(12)(13,17)(14,22)(18)(19,23)(0);

N=14

(1,3,9,27,25,19)(5,15,17,23,13,11)(2,6,18,26,22,10)(4,12,8,24,16,20)(7,21)(14);

(1,9,25)(3,27,19)(5,17,13)(7)(11,15,23)(21)(2,18,22)(4,8,16)(6,26,10)(12,24,20)(14)(0);

N=15

(1,7,19,13)(3,21,27,9)(5)(11,17,29,23)(15)(25)(2,14,8,26)(4,28,16,22)(6,12,24,18)(10)(20)(0);

N=16

(1,3,9,27,17,19,25,11)(5,15,13,7,21,31,29,23)(2,6,18,22)(4,12)(8,24)(10,30,26,14)(16)(20,28)(0);

(1,7,17,23)(3,21,19,5)(9,31,25,15)(11,13,27,29)(2,14)(4,28)(6,10)(8,24)(12,20)(16)(18,30)(22,26)(0).

Властивості симетрії та періодичності базису перетворення ДСП-I приводять до подання меншими значеннями елементів твірних підмасивів за спрощеним твірним масивом $P'(n)$ з доповненнями відповідним масивом знаків $Ss(n)$, який містить значення елементів рівними 0,+1,-1.

Приклади спрощених твірних масивів:

N=7

(1,3,9,13,11,5)(2,6,4,12,8,10)(7);

(1,3,2,1,3,2)(2,1,3,2,1,3)(0),

(+,+,-,-,+)(+,+,+,-,-)(0);

(1,9,11)(3,13,5)(2,4,8)(6,12,10);

(1,2,3)(3,1,2)(2,3,1)(1,2,3),

(+,-,-)(+,-,+)(+,+,-)(+,-,-);

N=8,

(1,3,9,11)(**15**,13,7,5)(2,6)(10,14)(4,12);
 (1,3,1,3)(**1**,3,1,3)(2,2)(2,2)(4,4)(0),
 (+,+,-,-)(+,-,-,+)(+,+)(-,-)(+,-)(0);
 (1,5,9,13)(3,15,11,7)(2,10)(4)(6,14)(12);
 (1,3,1,3)(3,1,3,1)(2,2)(4)(2,2)(4),
 (+,+,-,-)(+,-,-,+)(+,-)(+)(+,-)(-);

N=9

(1,5,7,17,13,11)(3,15)(**9**)(2,10,14,16,8,4)(6,12);
 (1,4,2,1,4,2)(3,3)(0)(2,1,4,2,1,4)(3,3),
 (+,+,+,-,-)(+,-)(0)(+,-,-,-,+)(+,-);
 (1,7,13)(3)(5,17,11)(**9**)(15)(2,14,8)(4,10,16)(6)(12);
 (1,2,4)(3)(4,1,2)(0)(3)(2,4,1)(4,1,2)(2)(2),
 (+,+,-)(+)(+,-,-)(0)(-)(+,-,+)(+,-,-)(+)(-);

N=10

(1,3,9,7)(5,15)(11,13,19,17)(2,6,18,14)(4,12,16,8)(**10**);
 (1,3,1,3)(5,5)(1,3,1,3)(2,4,2,4)(4,2,4,2)(0),
 (+,+,+,+)(+,-)(-,-,-,-)(+,-,-,-)(+,-,-,+)(0);
 (1,13,9,17)(3,19,7,11)(5)(15)(2,6,18,14)(4,12,16,8)(**10**);
 (1,3,1,3)(3,1,3,1)(5)(5)(2,4,2,4)(4,2,4,2)(0),
 (+,-,+,-)(+,-,+,-)(+)(-)(+,-,-,-)(+,-,-,+)(0);

N=11

(1,3,9,5,15)(7,21,19,13,17)(2,6,18,10,8)(4,12,14,20,16)(**11**);
 (1,3,2,5,4)(4,1,3,2,5)(2,5,4,1,3)(4,1,3,2,5)(0),
 (+,+,+,+,-)(+,-,-,-,-)(+,-,-,-,+)(+,-,-,-,-)(0);
 (1,13,15,19,5,21,9,7,3,17)(2,4,8,16,10,20,18,14,6,12)(11);
 (1,2,4,3,5,1,2,4,3,5)(2,4,3,5,1,2,4,3,5,1)(0),
 (+,-,-,-,+,-,+,-,+,-,+,-,+,-,+,-,+,-,+,-)(0);

N=12

(1,5)(2,10)(3,15)(4,20)(6)(8,16)(7,11)(9,21)(**12**)(13,17)(14,22)(18)(19,23);
 (1,5)(2,2)(3,3)(4,4)(6)(4,4)(5,1)(3,3)(0)(1,5)(2,2)(6)(5,1),
 (+,+)(+,+)(+,-)(+,-)(+)(+,-)(+,+)(+,-)(0)(-,-)(-,-)(-,-,-);

N=14

(1,3,9,27,25,19)(5,15,17,23,13,11)(2,6,18,26,22,10)(4,12,8,24,16,20)(7,21)(14);
 (1,3,5,1,3,5)(5,1,3,5,1,3)(2,6,4,2,6,4)(4,2,6,4,2,6)(7,7)(0),
 (+,+,+,-,-,-)(+,-,-,-,+)(+,-,-,-,+)(+,-,-,-,-)(+,-)(0);
 (1,9,25)(3,27,19)(5,17,13)(7)(11,15,23)(21)(2,18,22)(4,8,16)(6,26,10)(12,24,20)(14);
 (1,5,3)(3,1,5)(5,3,1)(7)(3,1,5)(7)(2,4,6)(4,6,2)(6,2,4)(2,4,6)(0),
 (+,+,-)(+,-,-)(+,-,+)(+)(+,-,-,-)(+,-,-,-,+)(+,-,+)(+,-,-)(0);

N=15

(1,7,19,13)(3,21,27,9)(5)(11,17,29,23)(15)(25)(2,14,8,26)(4,28,16,22)(6,12,24,18)(10)
 (20);

(1,7,4,2)(3,6,3,6)(5)(4,2,1,7)(0)(5)(2,1,7,4)(4,2,1,7)(6,3,6,3)(5)(5),
 (+,+,+,-,+)(+,-,-,+)(+)(+,-,-,-)(0)(-)(+,-,-,-,+)(+,-,-,-,+)(+,-,-,-,+)(-);

N=16

(1,3,9,27,17,19,25,11)(5,15,13,7,21,31,29,23)(2,6,18,22)(4,12)(8,24)(10,30,26,14)(16)(20,28);
 (1,3,7,5,1,3,7,5)(5,1,3,7,5,1,3,7)(2,6,2,6)(4,4)(8,8)(6,2,6,2)(0)(4,4),
 (+,+,+,-,-,-,+)(+,+,+,+,-,-,-)(+,+,-,-)(+,+)(+,-)(+,-,-,+)(0)(-,-);
 (1,7,17,23)(3,21,19,5)(9,31,25,15)(11,13,27,29)(2,14)(4,28)(6,10)(8,24)(12,20)(16)(18,30)(22,26);
 (1,7,1,7)(3,5,3,5)(7,1,7,1)(5,3,5,3)(2,2)(4,4)(6,6)(8,8)(4,4)(0)(2,2)(6,6),
 (+,+,+,-,-,+)(+,-,-,+)(+,-,-,+)(+,+,-,-)(+,+)(+,-)(+,+)(+,-)(+,-)(0)(-,-)(-,-).

Твірний масив $P(n)$ перетворення визначає особливість структури базисної матриці ДСП-I приведені до циклічних підматриць. Тому можна виділити параметри, що характеризують $P(n)$ і, відповідно, видозмінену базисну матрицю.

Значення параметрів спрощеного твірного масиву $P'(n)=P'(n_1)P'(n_2)\dots P'(n_k)$ для даного обсягу N і виду перетворення визначаються:

- k – кількістю підмасивів у твірному масиві $P'(n)=P'(n_1)P'(n_2)\dots P'(n_k)$;
- кількістю елементів кожного твірного підмасиву (L_1, L_2, \dots, L_k) ;
- першим елементом кожного твірного підмасиву n_{i1} , $i=1(1)k$.

Кількість підмасивів k визначає структуру базисної матриці, кількість елементів L_k підмасивів задає обсяг циклічних згорток.

Наприклад, базисна матриця ДСП-I обсягу $N=8$, описується твірним масивом, що має такі значення параметрів:

$k=6$; $L_1=4$, $L_2=4$, $L_3=2$, $L_4=2$, $L_5=2$, $L_k=1$; $n_{11}=1$, $n_{21}=15$, $n_{31}=2$, $n_{41}=10$, $n_{51}=4$; $n_{61}=0$
 або за спрощеним твірним масивом індексів $P'(n) = (+ 1, - 1, + 2, - 2, + 4, 0)$, доповнених масивом знаків $Ss(n)$.

Наступним кроком синтезу в алгоритмі обчислення ДСП-I є визначення ідентичних циклічних підматриць відповідно до пункту 2.3.2.

Серед основних *особливостей* синтезу алгоритму ДСП-I виділяють:

- розмірність матриці $(2N-1) \times (2N-1)$, з надлишковими елементами $(N-1, 2N-1)$ рядка та стовпця, синус яких дорівнює нулю;
- твірний масив $P(n)$ формується на основі рядків, визначених за $(\text{mod} 2N)$;
- послідовність вхідних значень $[x, -x]$ за твірним масивом із присвоєнням $x(N-1)$, $x(2N-1)=0$;

- обчислення деяких з $(N-1)$ вихідних значень $X(i)$ визначаються за властивістю асиметрії;

- особливість циклічних згорток (послідовність аргументів суцільна або з двома групами ідентичних елементів);

- кількість варіантів твірних масивів більше одного.

Отже, твірний масив $P(n)$, $P'(n)$, $Ss(n)$ задає структуру матриць аргументів і матриць знаків, які у сукупності становлять цілісність базису ДСП-I. При синтезі алгоритму твірний масив $P(n)$ задає порядок вхідної та вихідної послідовностей перетворення, $s_{ij} \in \{j\}$ – значення перших спрощених елементів підматриць та знака для виконання аналізу структури та відбору однакових підматриць. Спрощений твірний масив $P'(n)$ збільшує повторюваність структурних елементів квадратної базисної матриці для кожного конкретного обсягу перетворень N , що приводить до ефективнішого обчислення ДСП-I на основі циклічних згорток.

4.2.3 Приклад обчислення ДСП-I обсягу $N=8$ на основі циклічних згорток

Розглянемо приклад застосування узагальненої схеми для обчислення ДСП-I обсягу $N=8$. Цілісність базису ДСП-I задають твірні масиви $P(n)$, $P'(n)$, $Ss(n)$:

$$P(15) = P(n_1)P(n_2)P(n_3)P(n_4)P(n_5)P(n_6) = (1,3,9,11)(15,13,7,5)(2,6)(10,14)(4,12) (8);$$

$$P'(15) = (1,3,1,3)(1,3,1,3)(2,2)(2,2)(4,4)(0), Ss(15) = (+,+,-,-)(+,-,-,+)(+,+)(-,-)(+,-)(0);$$

Відповідність координат (i, j) таблиці елементам твірного масиву $P(n_i)$ та $P'(n_i)$:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|-------------------|--------------------|--------------|----------------|---------------|------------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| (i, j) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | (1,3,9,11) | (15,13,7,5) | (2,6) | (10,14) | (4,12) | (8) | | | | | | | | | |
| | (1,3,1,3) | (1,3,1,3) | (2,2) | (2,2) | (4,4) | (0); | | | | | | | | | |
| | (+,+,-,-) | (-,-,+,+) | (+,+) | (-,-) | (+,-) | (0). | | | | | | | | | |

Координати перших елементів підматриць (табл. 4.1) визначаються за $(i+L_i), (j+L_i)$, починаючи з $i=1, j=1$. Значення перших елементів підматриць

продовження Таблица 4.2

| k ⁿ | 0: | 2: | 8: | 10: | 14: | 12: | 6: | 4: | 7: | 1: | 5: | 9: | 13: | 3: | 11: | 15: |
|------------------|----|----|----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|-----|----|-----|-----|
| 0: | + | + | - | - | - | - | + | + | 0 | + | + | - | - | + | - | 0 |
| 2: | + | - | - | + | - | + | + | - | 0 | + | + | - | - | - | + | 0 |
| 8: | - | - | + | + | + | + | - | - | 0 | + | + | - | - | + | - | 0 |
| 10: | - | + | + | - | + | - | - | + | 0 | + | + | - | - | - | + | 0 |
| 14: | - | - | + | + | + | + | - | - | 0 | - | - | + | + | - | + | 0 |
| 12: | - | + | + | - | + | - | - | + | 0 | - | - | + | + | + | - | 0 |
| 6: | + | + | - | - | - | - | + | + | 0 | - | - | + | + | - | + | 0 |
| 4: | + | - | - | + | - | + | + | - | 0 | - | - | + | + | + | - | 0 |
| 7: | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1: | + | + | + | + | - | - | - | - | 0 | + | - | + | - | 0 | 0 | 0 |
| 5: | + | + | + | + | - | - | - | - | 0 | - | + | - | + | 0 | 0 | 0 |
| 9: | - | - | - | - | + | + | + | + | 0 | + | - | + | - | 0 | 0 | 0 |
| 13: | - | - | - | - | + | + | + | + | 0 | - | + | - | + | 0 | 0 | 0 |
| 3: | + | - | + | - | - | + | - | + | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11: | - | + | - | + | + | - | + | - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15: | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Визначення ідентичних циклічних підматриць виконується відбором за координатами перших елементів однакових підматриць без врахування знаків.

Горизонтально, відповідно до табл. 4.1, ідентичні циклічні підматриці:

$$(1,1) - +1 \text{ та } (1,5) - -1 \text{ для } P(n_1);$$

$$(1,9) - +2 \text{ та } (1,11) - -2 \text{ для } P(n_3);$$

$$(13,1) - +4 \text{ та } (13,5) - -4 \text{ для } P(n_5).$$

Виконання поелементно додавань вхідних значень будуть використовуватись для обчислення симетричних циклічних згорток після аналізу горизонтально.

Твірний масив $P(n)$ задає порядок елементів (1,3,9,11,15,13,7,5, 2,6,10,14,4,12,8,16) вхідних даних $x(n)$ при обчисленні дискретного перетворення на основі циклічних згорток

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \\ x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7), x(8), -x(1), -x(2), -x(3), -x(4), -x(5), -x(6), -x(7), -x(8),$$

у результаті матриця-стовпець матиме таку послідовність вхідних даних:

$$x(1), x(3), -x(1), -x(3), -x(7), -x(5), x(7), x(5), x(2), x(6), -x(2), -x(6), x(4), -x(4), \mathbf{x(8)}, \mathbf{-x(8)}.$$

Присвоєння значення $x(8)=0$ відповідає особливості ДСП-I.

Число циклічних *симетричних* згорток для ДСП-I обсягу $N=8$ складає одну 4-точкову згортку та дві одноточкові. Об'єднання результатів згорток

виконується горизонтально на основі відповідних координат перших елементів підматриць. Вихідні значення перетворення у результаті обчислення промасштабовані на 2 і визначаються для значень: $X(0), X(2), X(6), X(4), X(1), X(5), X(3)$.

4.3 Синтез алгоритму обчислення ДСП-II та ДСП-III на основі циклічних згорток

4.3.1 Аналіз базисної матриці ДСП-II та ДСП-III видів

Для ДСП-II пряме і зворотне перетворення $X^{s2}[k]$ за [92] описують формулами

$$X_N^{s2}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(n) x(n) \sin\left[\frac{(2n+1)(k+1)\pi}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.16)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(n) X_N^{s2}(k) \sin\left[\frac{(2n+1)(k+1)\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.17)$$

де $\alpha(n) = 1/\sqrt{2}$, якщо $n=N-1$; інакше $\alpha(n)=0$.

Подання ДСП-II у матричній формі відповідно буде

$$X = C_N^H x, \quad (4.18)$$

де матриці C_N мають розмірність $(N \times N)$ з індексами для рядків $k = 0, \dots, N-1$ та індексами для стовпців $n = 0, \dots, N-1$; матриці-стовпці вихідних $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$.

Відповідно $c'_{k,n}$ k -та компонента ДСП-II для кожного n -го базисного вектора матиме вигляд

$$c'_{k,n} = \sin [(k+1)(2n+1)\pi/(2N)]. \quad (4.19)$$

Відповідно до теорії ДПФ для тригонометричних перетворень з базисом від 0 до π необхідно продовжити вхідну послідовність синусного перетворення до періодичної. Дійсно, продовження *НАНА* послідовності, подане у табл.2.2,

відповідає симетрії виду ДСП-II із розширенням ε [139].

Проаналізуємо структуру матриці базису ДСП-II за аргументами компонентів $c_{k,n}$ ($k,n=0,1,\dots,N-1$) базисного перетворення

$$(k+1)(2n+1)\pi/(2N) = c_{k,n} \Delta\varphi, \quad (4.20)$$

де $\Delta\varphi=\pi/(2N)$; N - ціле значення обсягу ДСП-II.

Проведемо детальний аналіз аргументів $c_{k,n}=(k+1)(2n+1)$ базису ДСП-II ($k,n=0,1,\dots,N-1$). Функція $\sin[(2n+1)(k+1)\pi/(2N)]$ - періодична відносно $4N$ вибірок, тому можна записати на основі базису матрицю аргументів синусу порядку $(N \times N)$ у вигляді:

$$C_a^{II}(k,n) = [c_{k,n} \bmod (4N)], \quad (4.21)$$

де $c_{k,n}=(k+1)(2n+1)$ - значення аргументів матриці для $k=1(1)N-1$ рядка та $n=1(1)N-1$ стовпця.

Функція $\sin[(2n+1)(k+1)\pi/(2N)]$ - періодична відносно $4N$, асиметрична відносно аргументу π , що відповідає значенню $(2N)$, симетрична відносно аргументу $\pi/2$, що відповідає значенню (N) . Тому спрощена матриця \underline{C}_a^I визначається послідовним виконанням обчислень

$$c_{k,n} = ((2n+1)(k+1)) \bmod 4N; \quad (4.22)$$

$$c_{k,n} = 4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N], \text{ якщо } [(c_{k,n}) \bmod 4N] > 2N. \quad (4.23)$$

Матриця знаків синуса S^{II} s формується на основі елементів матриці (4.22) і визначається за нерівностями:

$$S^{II}s[k,n] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 0 < c_{k,n} < 2N \\ 0, & \text{якщо } c_{k,n} = 0, 2N, \\ -1, & \text{якщо } 2N < c_{k,n} < 4N, \end{cases} \quad (4.24)$$

далі виконується спрощення

$$\underline{c}_{k,n} = 2N - \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N]\}, \text{ якщо } \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N]\} > N, \quad (4.25)$$

$$\text{інакше } \underline{c}_{k,n} = c_{k,n}.$$

Спрощена матриця аргументів \underline{C}_a^I доповнюється матрицею знаків S^{II} s за (4.24), де $k=1(1)N-1$, $n=1(1)N-1$. Наприклад, спрощена матриця \underline{C}_a^I аргументів та доповнююча матриця знаків Ss для ДСП-II обсягу $N=8$ мають значення

$$\underline{C}_a^{II} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 5 & 1 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 3 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 6 & 6 & 2 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}, S_s^{II} = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & + & - & - & + & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & + & + & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & + & + & + & + & + & + \end{bmatrix}.$$

Отже, виконано поетапне спрощення базисної матриці аргументів на основі використання властивості періодичності і симетричності базисної функції ДСП-II приводить до подання базису матрицею аргументів \underline{C}_a , що містить цілі значення елементів у межах від 1 до N та матрицею знаків S_s^{II} зі значеннями елементів +1, -1, 0.

Зворотне ДСП-II перетворення $X^{s2}[k]$ відповідає ДСП-III

$$[X^{s2}(k)]^{-1} = [X^{s2}(k)]^T = X^{s3}(k).$$

Проаналізуємо базисну матрицю ДСП-III, що описується [92] формулою

$$X_N^{s3}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(n) x(n) \sin\left[\frac{(n+1)(2k+1)\pi}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.26)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(n) X_N^{s3}(k) \sin\left[\frac{(n+1)(2k+1)\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.27)$$

$\alpha(n) = 1/\sqrt{2}$, якщо $n=N-1$; інакше $\alpha(n)=0$.

Подання ДСП-III у матричній формі відповідно буде

$$X = C_N^{III} x, \quad (4.28)$$

де матриці C_N мають розмірність $(N \times N)$ з індексами для рядків $k = 0, \dots, N-1$ та індексами для стовпців $n = 0, \dots, N-1$; матриці-стовпці вихідних $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$.

Відповідно $c'_{k,n}$, k-та компонента ДСП-III для кожного n-го базисного вектора матиме вигляд

$$c'_{k,n} = \sin [(2k+1)(n+1)\pi/(2N)]. \quad (4.29)$$

Відповідно до теорії ДПФ для тригонометричних перетворень з базисом від 0 до π необхідно продовжити вхідну послідовність синусного перетворення до

періодичної. Дійсно, продовження *WAWS* послідовності подане у табл. 2.2 відповідає симетрії виду ДСП- III із розширенням ε [129].

Функція $\sin[(2k+1)(n+1)(\pi/(2N))]$ – періодична відносно $4N$ вибірок, тому можна записати на основі базису матрицю аргументів синусу порядку $(N \times N)$ у вигляді:

$$C_a^{III}(k,n) = [(2k+1)(n+1) \bmod (4N)], \quad (4.30)$$

де $(2k+1)(n+1) = c_{k,n}$ – значення аргументів матриці для $k=0(1)N-1$ рядка та $n=0,1,\dots,N-1$ стовпця.

Функція $\sin[(2k+1)(n+1)\pi/(2N)]$ – періодична (4.35) відносно $4N$, асиметрична відносно аргументу π , що відповідає значенню $(2N)$, симетрична відносно аргументу $\pi/2$, що відповідає значенню (N) . Тому елементи спрощеної матриці \underline{C}_a^{III} визначаються послідовним виконанням обчислень

$$c_{k,n} = ((2k+1)(n+1)) \bmod 4N; \quad (4.31)$$

$$\underline{c}_{k,n} = 4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N], \text{ якщо } [(c_{k,n}) \bmod 4N] > 2N. \quad (4.32)$$

Матриця знаків синуса *Ss* формується на основі елементів матриці (4.34) і визначається за нерівностями:

$$Ss[k,n] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 0 < c_{k,n} < 2N \\ 0, & \text{якщо } c_{k,n} = 0, 2N, \\ -1, & \text{якщо } 2N < c_{k,n} < 4N, \end{cases} \quad (4.33)$$

далі виконується

$$\underline{c}_{k,n} = 2N - \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N]\}, \text{ якщо } \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 4N]\} > N, \quad (4.34)$$

інакше $\underline{c}_{k,n} = c_{k,n}$.

З врахуванням доповнюючої матриці знаків *Ss* (4.33) та спрощеної матриці \underline{C}_a^{III} аргументів $n,k=0,1,\dots,N-1$ за (4.34) отримуємо опис базису перетворення. Наприклад, спрощені матриці \underline{C}_a^{III} аргументів та доповнююча матриця знаків *Ss* ДСП-III для $N=8$ мають значення

$$\underline{C}_a^{III} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 14 & 11 & 8 \\ 5 & 10 & 15 & 12 & 7 & 2 & 3 & 8 \\ 7 & 14 & 11 & 4 & 3 & 10 & 15 & 8 \\ 9 & 14 & 5 & 4 & 13 & 10 & 1 & 8 \\ 11 & 10 & 1 & 12 & 9 & 2 & 13 & 8 \\ 13 & 6 & 7 & 12 & 1 & 14 & 5 & 8 \\ 15 & 2 & 13 & 4 & 11 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \underline{C}_a^{III} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & 3 & 8 \\ 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad S_s^{III} = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & - & - & + \\ + & + & + & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & + & + & - & + & + & + \\ + & - & + & - & + & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{bmatrix}.$$

Матриці \underline{C}_a^{II} та \underline{C}_a^{III} спрощених аргументів і знаків S_s^{II} та S_s^{III} відповідно транспоновані (рядки рівнів стовпцям і навпаки). Відповідно до взаємозв'язку прямих та зворотних обчислень наших ДСП :

$$(\text{ДСП}_{N}^{II})^{-1} = (\text{ДСП}_{N}^{II})^T = (\text{ДСП}_{N}^{III}); \quad (4.35)$$

$$(\text{ДСП}_{N}^{III})^{-1} = (\text{ДСП}_{N}^{III})^T = (\text{ДСП}_{N}^{II}). \quad (4.36)$$

Отже, аналіз одержаних матриць C_a^{II} та C_a^{III} для аргументів базису ДСП-II та ДСП-III показує, що у матриці кожен рядок містить набір елементів $s_a(k,n)$, який не повторюються. У результаті спрощення одержано матрицю аргументів базису \underline{C}_a , що містить цілі значення елементів у межах від 1 до N, та доповнюючу матрицю знаків S_s зі значеннями елементів +1, -1, 0. Тобто, на основі поетапного спрощення базисної матриці аргументів за властивостями періодичності і симетричності виконаємо ефективну організацію обчислення ДСП-II, ДСП-III [191].

4.3.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДСП-II та ДСП-III на основі циклічних згорток

Розроблений підхід для ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень, що базуються на декомпозиції базисної гармонічної функції розглянуто у роботах [153, 192]. У результаті підходу структуру базисної матриці ДСП-II можна задати твірним масивом $P_{II}(n)$, де загальний n – обсяг масиву рівний

$$n = (n_1+n_2+\dots+n_k) = 4N-1. \quad (4.37)$$

Число підматриць у $P_{II}(n)$ і вибір обсягу циклічних структур визначається значенням N (просте, степінь простого, складене) обсягу перетворення.

Приклади твірних масивів $P_{II}(n)$, $Pr(n)$, $Pc(n)$ для обсягів перетворення:

$N=7$ (просте)

(1,3,9,27,25,19) (2,6,18,26,22,10) (4,12,8,24,16,20) (5,15,17,23,13,11) (7,21) (14),
 $Pr(n) = (1,3,9,27,25,19) (2,6,18,26,22,10)(7)$,
 $Pc(n) = (1,3,9,27,25,19) (5,15,17,23,13,11) (7,21)$;

(1,9,25)(2,18,22)(3,27,19)(4,8,16)(5,17,13)(6,26,10)(7)(11,15,23)(12,24,20)(14)(21),
 $Pr(n) = (1,9,25) (2,18,22)$,
 $Pc(n) = (1,9,25) (3,27,19) (5,17,13) (7)(11,15,23) (21)$;

$N=8$ (степінь простого)

(1,3,9,27,17,19,25,11)(2,6,18,22)(4,12)(8,24)(5,15,13,7,21,31,29,23)(10,30,26,14)(16)
 (20,28),
 $Pr(n) = (1,3,9,27,17,19,25,11) (2,6,18,22)(4,12)(8,24)$,
 $Pc(n) = (1,3,9,27,17,19,25,11) (5,15,13,7,21,31,29,23)$;

(1,7,17,23)(2,14)(3,21,19,5)(4,28)(6,10)(8,24)(9,31,25,15)(11,13,27,29)(12,20)(16)
 (18,30)(22,26);
 $Pr(n) = (1,7,17,23)(2,14)(3,21,19,5)(4,28)(6,10)(8,24)$,
 $Pc(n) = (1,7,17,23)(3,21,19,5)(9,31,25,15)(11,13,27,29)$.

$N=10$ (складене)

(1,3,9,27)(2,6,18,14)(4,12,36,28)(5,15)(7,21,23,29)(8,24,32,16)(10,30)(11,33,19,17)(1
 3,39,37,31)(20)(22,26,38,34)(25,35),
 $Pr(n) = (1,3,9,27)(2,6,18,14)(4,12,36,28)(5,15)(10,30)$,
 $Pc(n) = (1,3,9,27)(5,15)(7,21,23,29)(11,33,19,17)(13,39,37,31)(25,35)$.

Властивості симетрії та періодичності базису перетворення ДСП-II приводять до подання меншими значеннями елементів твірних підмасивів за спрощеним твірним масивом $P'(n)$ з доповненнями відповідним масивом знаків $Ss(n)$. Масив знаків $Ss(n)$ містить значення елементів рівними +1,-1,0. Приклади спрощених твірних $P'(n)$, $Ss(n)$ масивів для обсягів перетворення:

$N=7$

(1,3,9,27,25,19) (2,6,18,26,22,10) (4,12,8,24,16,20) (5,15,17,23,13,11) (7,21) (14),
 (1,3,5,1,3,5)(2,6,4,2,6,4)(4,2,6,4,2,6)(5,1,3,5,11,3)(7,7)(0),
 (+,+,+,-,-,-)(+,+,-,-,-,+)(+,+,+,-,-,-)(+,-,-,-,+)(+,-)(0);

(1,9,25)(2,18,22)(3,27,19)(4,8,16)(5,17,13)(6,26,10)(7)(11,15,23)(12,24,20) (14) (21),
 (1,5,3)(2,4,6)(3,1,5)(4,6,2)(5,3,1)(6,2,4)(7)(3,1,5)(2,4,6)(0)(7),
 (+,+,-)(+,-,-)(+,-,-)(+,-,-)(+,-,-)(+,-,-)(+,-,-)(0)(+,-,-)(+,-,-)(0)(-);

N=8

(1,3,9,27,17,19,25,11)(2,6,18,22)(4,12)(8,24)(5,15,13,7,21,31,29,23)(10,30,26,14)(16)
 (20,28),
 (1,3,7,5,1,3,7,5)(2,6,2,6)(4,4)(8,8)(5,1,3,7,5,1,3,7)(6,2,6,2)(0)(4,4),
 (+,+,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-,-,+)(0)(-,-);

(1,7,17,23)(2,14)(3,21,19,5)(4,28)(6,10)(8,24)(9,31,25,15)(11,13,27,29)(12,20)(16)
 (18,30)(22,26),
 (1,7,1,7)(2,2)(3,5,3,5)(4,4)6,6)(8,8)(7,1,7,1)(5,3,5,3)(4,4)(0)(2,2)(6,6),
 (+,+,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-,-,+)(0)(-,-)(-,-);

N=10

(1,3,9,27)(2,6,18,14)(4,12,36,28)(5,15)(7,21,23,29)(8,24,32,16)(10,30)(11,33,19,17)
 (13,39,37,31)(20)(22,26,38,34)(25,35),
 (1,3,9,7)(2,6,2,6)(4,8,4,8)(5,5)(7,1,3,9)(8,4,8,4)(10,10)(9,7,1,3)(7,1,3,9)(0)(2,6,2,6)
 (5,5),
 (+,+,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-,-,+)(0)(-,-,-,-,-,-);

У додатку Б подано варіанти твірних масивів для синтезу алгоритму ДСП-II коротких N обсягів перетворення.

Розглянемо приклад узагальненої схеми визначення ідентичних циклічних підматриць необхідних для обчислення ДСП-II обсягу N=8.

У базисній матриці аргументів ДСП-II після виконання операції добутку за модулем $4N$ містяться значення елементів у першому рядку кількістю – 16

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 |
|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

і в першому стовпці кількістю – 31

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | ... | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|

На основі одержаної матриці визначається за першим i за індексами k, n відповідним стовпцем матриці після виконання операції добутку за модулем $4N$ твірний масив $P_{II}(n)$:

(1,3,9,27,17,19,25,11)(2,6,18,22)(4,12)(8,24)(5,15,13,7,21,31,29,23)(10,30,26,14)(16)(20,28).

$P_c(n) = (0, 1, 4, 13, 8, 9, 12, 5) (15, 14, 11, 2, 7, 6, 3, 10)$, задає n перестановок стовпців (відібрано підмасиви з непарними елементами та здійснено перехід значень $(2n+1)$ до n , друга половина є сума, що дорівнює 15).

$Pr(n)=(0,2,8,26,16,18,24,10)(1,5,17,21)(3,11)(7,23)$, задає k перестановок рядків (здійснено перехід значень від $(k+1)$ до k).

Відповідно до твірного масиву $Pr(n)$, для матриці ДСП-II вибрано 14 рядків (табл. 4.3), що дозволяють обчислити 8 вихідних значень на основі циклічних згорток.

Таблиця 4.3 – Матриця координат та значення перших елементів зі знаком підматриць аргументів базису ДСП-II, $N=8$

| $\backslash n$
$k \backslash$ | $(i+L_i, j+L_i) - n_{ij}$ (координати рядок/стовпець)
– знак і значення першого елемента підматриць | | | |
|----------------------------------|--|------------|-------------|-------------|
| 0: | (1,1) – +1; | | (1,9) – -1; | |
| 2: | | | | |
| 8: | | | | |
| 26: | | | | |
| 16: | | | | |
| 18: | | | | |
| 24: | | | | |
| 10: | | | | |
| 1: | (9,1) – +2; | (9,4) – +2 | (9,9) – -2; | (9,13) – -2 |
| 5: | | | | |
| 17: | | | | |
| 21: | | | | |
| 3: | (13,1) – +4 | | (13,9) – +4 | |
| 7: | (14,1) – 8 | | | |

Спрощений твірний масив значень за перестановкою стовпців:

$$P_c'(n) = (1,3,7,5,1,3,7,5) (1,3,7,5,1,3,7,5) ,$$

$$S_s(n) = (+, +, +, -, -, -, -, +)(-, -, -, +, +, +, +, -).$$

Спрощений твірний масив за перестановкою рядків:

$$Pr'(n) = (1,3,7,5,1,3,7,5)(2,6,2,6,4,8).$$

У табл. 4.3 узагальнено базисну матрицю аргументів розмірністю (14x16), де вказано кількість значень елементів відносно горизонталі та вертикалі

Твірний масив $P_{II}(n)=(0, 1, 4, 13, 8, 9, 12, 5)$ (15, 14, 11, 2, 7, 6, 3, 10) задає порядок елементів вхідних даних $x(n)$, адже відповідно до симетричності

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ + & + & + & + & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

за початкового обчислення дискретного перетворення послідовності

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7), x(8), & -x(8), -x(7), -x(6), -x(5), -x(4), -x(3), -x(2), -x(1), \end{array}$$

матриця стовпець у результаті матиме таку послідовність вхідних даних:

$$x(1), x(2), x(5), -x(3), -x(8), -x(7), -x(4), x(6), -x(1), -x(2), -x(5), x(3), x(8), x(7), x(4), -x(6).$$

Число циклічних симетричних згорток для ДСП-II обсягу $N=8$ складає одну 8-точкову згортку з повторенням групи елементів, у результаті якої визначаються 4 вихідні значення, та 4-точкову згортку з повторенням групи елементів, у результаті якої визначаються 2 вихідні значення. Решта 2 вихідні значення визначаються одноточковими добутками.

Об'єднання результатів згорток виконується горизонтально на основі відповідних координат перших елементів підматриць. Вихідні значення перетворення у результаті обчислення промасштабовані на 2 і визначаються для 8 значень: $X(0)$, $X(2)$, $-X(4)$, $-X(6)$, $X(1)$, $X(5)$, $X(3)$, $X(7)$. Вихідні значення $-X(4)$, $-X(6)$ необхідно взяти із протилежним знаком відповідно до алгоритму.

У результаті одержаної узагальненої схеми обчислення ДСП-II обсягу $N=8$ побудуємо (рис. 4.1) конкретну структурну схему (BRC – буферний регістр коефіцієнтів, BRD – буферний регістр даних, \pm/U_1 , \pm/U_2 , \pm/U_3 , \pm/U_4 – блоки об'єднання даних, CCU – блок p -точкових циклічних згорток).

Порядок послідовності коефіцієнтів у BRC :

$$w(n)=\{\sin(1\varphi), \sin(3\varphi), \sin(7\varphi), -\sin(5\varphi), \sin(2\varphi), \sin(6\varphi), \sin(4\varphi), \sin(8\varphi)\}, \text{ де } \varphi=\pi/16.$$

Порядок послідовності вхідних даних у BRD:

$$x(n)=\{2x(1), 2x(2), 2x(5), 2(-x(3)), 2(-x(8)), 2(-x(7)), 2(-x(4)), 2x(6)\},$$

що об'єднуються поелементно-послідовно у блоках \pm/U_1 , \pm/U_2 , \pm/U_3 , \pm/U_4 .

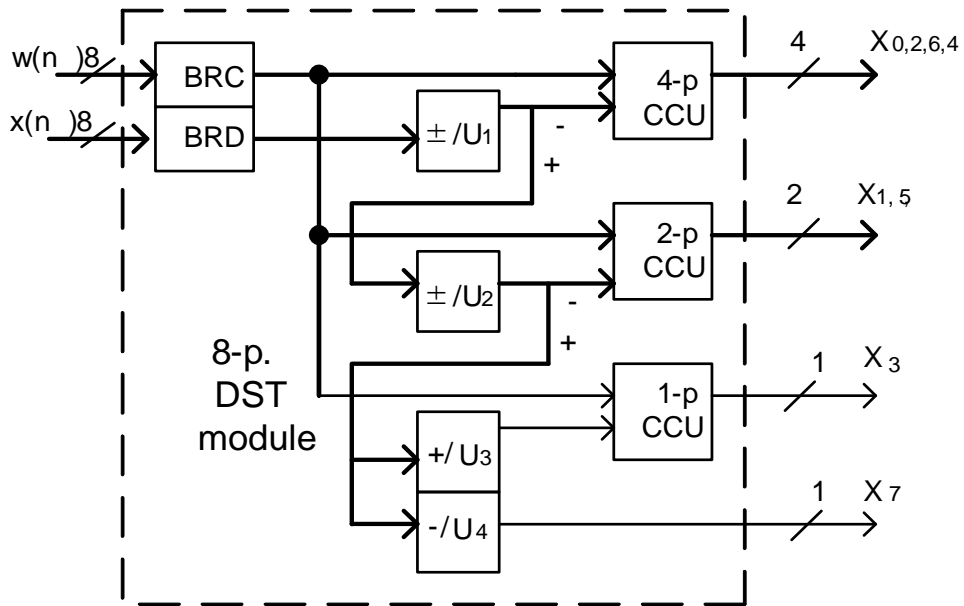


Рисунок 4.1 – Структурна схема модуля обчислення ДСП-II для N=8

Так, у блоці \pm/U_1 додаються відповідно:

$$x_0(n) - x_1(n) = \{x(1), x(2), x(5), (-x(3))\} - \{(-x(8)), (-x(7)), (-x(4)), x(6)\},$$

$$x_0(n) + x_1(n) = \{x(1), x(2), x(5), (-x(3))\} + \{(-x(8)), (-x(7)), (-x(4)), x(6)\}$$

для виконання 4-точкової \otimes - циклічної згортки:

$$\{\sin(1\varphi), \sin(3\varphi), \sin(7\varphi), -\sin(5\varphi)\} \otimes (x_0 - x_1) = y_0.$$

У результаті виконання циклічних згорток у CCU блоках циклічної згортки визначаються вихідні дані $X_{0,2,8,4}$, $X_{1,5}$, X_3 , X_7 перетворення ДСП-II для N=8 відповідно блочно-циклічної структури базису перетворення даного обсягу.

Розроблено підхід для ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень, що базуються на декомпозиції базисної функції ДСП-III розглянуто у роботах [153, 189]. У результаті, структуру базисної матриці можна задати твірним масивом $P_{III}(n)$, де загальний n – обсяг масиву, що дорівнює:

$$n = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) = 4N - 1, \quad (4.38)$$

Твірний масив $P_{III}(n)$ об'єднує підмасиви. Число підмасивів у $P_{III}(n)$ і вибір обсягу циклічних структур визначаються значенням N (просте, степінь простого, складене) обсягу перетворення.

Приклади твірних масивів ДСП-II, ДСП-III для обсягів N=8:

ДСП-II N=8, P(n) =
 = (1,3,9,27,17,19,25,11)(2,6,18,22)(4,12)(8,24)(5,15,13,7,21,31,29,23)(10,30,26,14)
 (16)(20,28),
 Pr(n)= (1,3,9,27,17,19,25,11) (2,6,18,22)(4,12)(8,24),
 Pc(n)= (1,3,9,27,17,19,25,11) (5,15,13,7,21,31,29,23);

ДСП-III N=8, P(n) =
 = (1,3,9,27,17,19,25,11)(31,29,23,5,15,13,7,21) (2,6,18,22)(14,10,30,26)(4,12)
 (20,28) (8,24) (16)(32),
 (+,+,+,-,-,-) (-,-,-,+,+,+,+) (+,+,+,+)(+,+) -,+,-)(+,-,+,-)(+,-)(0),
 (1,3,7,5,1,3,7,5) (1,3,7,5,1,3,7,5) (2,6,2,6)(2,6,2,6) (4,4)(4,4) (8,8)(16)(32);
 Pr(n)= (1,3,9,27,17,19,25,11) -> (0,1,4,13,8,9,12,5),
 (інверсія вихідних значень: 5-27, 7-25, 13-19, 15-17, 13-2, 12-3, 9-6, 8-7)
 Pc(n)= (1,3,9,27,17,19,25,11)(2,6,18,22)(4,12)(8,24)(16).

Твірні масиви $P_{III}(n)=P_{II}(n)$ для ДСП-III аналогічні ДСП-II, однак відрізняються $Pr(n)$ та $Pc(n)$.

Властивості симетрії та періодичності базису перетворення ДСП-III приводять до подання меншими значеннями елементів твірних підмасивів за спрощеним твірним масивом $P^2(n)$ із доповненнями відповідним масивом знаків $Ss(n)$. Приклади твірних масивів ДСП-III для обсягів перетворення:

N=7
 (1,3,9,27,25,19)(2,6,18,26,22,10)(4,12,8,24,16,20)(5,15,17,23,13,11)(7,21)(14),
 (1,3,5,1,3,5)(2,6,4,2,6,4)(4,2,6,4,2,6)(5,1,3,5,11,3)(7,7)(0),
 (+,+,+,-,-,-)(+,+,-,-,-,+)(+,+,+,-,-,-)(+,-,-,-,+)(+,-)(0);
 Pc(n)= (1,3,9,27,25,19) (2,6,18,26,22,10)(7); (n+1)
 Pr(n)= (1,3,9,27,25,19) (5,15,17,23,13,11) (7,21); (2k+1)

(1,9,25)(2,18,22)(3,27,19)(4,8,16)(5,17,13)(6,26,10)(7)(11,15,23)(12,24,20)(14)(21),
 (1,5,3)(2,4,6)(3,1,5)(4,6,2)(5,3,1)(6,2,4)(7)(3,1,5)(2,4,6)(0)(7),
 (+,+,+)(+,-,-)(+,-,-)(+,+,-)(+,-,+)(+,-,+)(0)(+,-,-)(+,-,-)(0)(-);
 Pc(n)= (1,9,25) (2,18,22)(3,27,19)(4,8,16)(7);
 Pr(n)= (1,9,25)(3,27,19)(5,17,13)(7)(11,15,23)(21);

N=8
 (1,3,9,27,17,19,25,11)(2,6,18,22)(4,12)(8,24)(5,15,13,7,21,31,29,23)(10,30,26,14)(16)
 (20,28),
 (1,3,7,5,1,3,7,5)(2,6,2,6)(4,4)(8,8)(5,1,3,7,5,1,3,7)(6,2,6,2)(0)(4,4),
 (+,+,+,-,-,-,+)(+,+,-,-,-,+)(+,+)(+,-)(+,+,+,+,-,-,-,-)(+,-,-,+)(0)(-,-);
 Pc(n) = (1,3,9,27,17,19,25,11)(2,6,18,22)(4,12)(8,24),
 Pr(n) = (1,3,9,27,17,19,25,11)(5,15,13,7,21,31,29,23);

(1,7,17,23)(2,14)(3,21,19,5)(4,28)(6,10)(8,24)(9,31,25,15)(11,13,27,29)(12,20)(16)
(18,30)(22,26);

(1,7,1,7)(2,2)(3,5,3,5)(4,4)6,6)(8,8)(7,1,7,1)(5,3,5,3)(4,4)(0)(2,2)(6,6),

(+,+,-,-)(+,+)(+,-,-,+)(+,-)(+,+)(+,-)(+,-,-,+)(+,+,-,-)(+,-)(0)(-,-)(-,-).

Pc(n)= (1,7,17,23)(2,14)(3,21,19,5)(4,28)(6,10)(8,24),

Pr(n)= **(1,7,17,23)(3,21,19,5)(9,31,25,15)(11,13,27,29)**.

N=9

(1,5,25,17,13,29)(2,10,14,34,26,22)(3,15)(4,20,28,32,16,8)(6,30)(7,35,31,11,19,23)(9)
(12,24)(18) (21,33)(27),

(1,5,7,1,5,7)(2,8,4,2,8,4)(3,3)(4,2,8,4,2,8)(6,6)(7,1,5,7,1,5)(6,6)(0)(3,3)(9),

(+,+,-,+,+,-)(+,+,+,-,-,-)(+,+)(+,-,-,-,+)(+,-)(+,-,-,+,-,-)(+)(+,-)(0)(-,-)(-);

Pc(n)= (1,5,25,17,13,29)(2,10,14,34,26,22)(3,15)(6,30)(9),

Pr(n)= **(1,5,25,17,13,29) (3,15) (7,35,31,11,19,23)(9)**;

(1,7,13,19,25,31)(2,14,26)(3,21)(4,28,16)(5,35,29,23,17,11)(6)

(8,20,32)(9,27)(10,34,22)(12)(15,33)(18)(24)(30),

(1,7,5,1,7,5)(2,4,8)(3,3)(4,8,2)(5,1,7,5,1,7)(6)(8,2,4)(9,9)(8,2,4)(6)(3,3)(0)(6)(6),

(+,+,+,-,-,-)(+,+,-)(+,-)(+,-,+)(+,-,-,-,+)(+)(+,-,-)(+,-)(+,-,-)(+)(+,-)(0)(-)(-),

Pc(n)= (1,7,13,19,25,31)(2,14,26)(3,21)(4,28,16)(6)(9,27),

Pr(n)= **(1,7,13,19,25,31)(3,21) (5,35,29,23,17,11)(9,27)(15,33)**.

N=10

(1,3,9,27)(2,6,18,14)(4,12,36,28)(5,15)(7,21,23,29)(8,24,32,16)(10,30)(11,33,19,17)
(13,39,37,31)(20)(22,26,38,34)(25,35),

(1,3,9,7)(2,6,2,6)(4,8,4,8)(5,5)(7,1,3,9)(8,4,8,4)(10,10)(9,7,1,3)(7,1,3,9)(0)(2,6,2,6)

(5,5),

(+,+,+,-)(+,+,+,+)(+,+,-,-)(+,+)(+,-,-,-)(+,-,-,+)(+,-)(+,-,+,+)(+,-,-,-)(0)(-,-,-,-)(-,-),

Pc(n)= (1,3,9,27)(2,6,18,14)(4,12,36,28)(5,15)(7,21,23,29)(10,30),

Pr(n)= **(1,3,9,27)(5,15)(7,21,23,29)(11,33,19,17)(13,39,37,31)**.

N=11

(1,3,9,27,37,23,25,31,5,15)(2,6,18,10,30)(4,12,36,20,16)(7,21,19,13,39,29,43,41,35,
17)(8,24,28,40,32)(11,33)(14,42,38,26,34)(22),

(1,3,9,5,7,5,1,3,9,5,7)(2,6,4,10,8)(4,10,8,2,6)(7,1,3,9,5,7,1,3,9,5)(8,2,6,4,10)(11,11)

(8,2,6,4,10)(0),

(+,+,+,-,-,-,-,+)(+,+,+,+,-)(+,+,-,+)(+,+,+,+,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-)(+,-)(+,-,-,-,-)(0),

Pc(n)= (1,3,9,27,37,23,25,31,5,15)(2,6,18,10,30)(4,12,36,20,16),

Pr(n)= **(1,3,9,27,37,23,25,31,5,15)(7,21,19,13,39,29,43,41,35,17)(11,33)**;

(1,5,25,37,9)(2,10,6,30,18)(3,15,31,23,27)(4,20,12,16,36)(7,35,43,39,19)(8,40,24,32,
28)(11)(13,21,17,41,29)(14,26,42,34,38)(22)(33),

(1,5,3,7,9)(2,10,6,8,4)(3,7,9,1,5)(4,2,10,6,8)(7,9,1,5,3)(8,4,2,10,6)(11)(13,1,5,3,7)(8,4,
2,10,6)(0)(11),

(+,+,-,-,+) (+,+,+,-,+) (+,+,-,-,-) (+,+,+,+,-) (+,-,-,-,+) (+,-,-,-,-) (+)(+,+,+,-,-)
 (+,-,-,-,-)(0) (-),
 $P_c(n) = (1,5,25,37,9)(2,10,6,30,18)(3,7,9,1,5)(4,20,12,16,36)(11)$,
 $Pr(n) = (1,5,25,37,9)(3,15,31,23,27)(7,35,43,39,19)(11)(13,21,17,41,29)$.

Розглянемо приклад узагальненої схеми визначення ідентичних циклічних підматриць, необхідних для обчислення ДСП-III обсягу $N=8$.

У базисній матриці аргументів з елементами після виконання операції добутку за модулем ($\text{mod } 4N$) міститься кількість значень елементів у першому рядку 31,

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | ... | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|

і в першому стовпці 16

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 |
|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

Адже у матриці аргументів ДСП-III після виконання операції добутку за модулем ($\text{mod } 4N$) індекси рядків змінюються (вертикально) для $(2k+1)$ до 16 і стовпців (горизонтально) для $(n+1)$ до 32, і, відповідно, навпаки для ДСП-II.

Твірні масиви для рядків і більш розширений для стовпців:

$$Pr(n) = (1,3,9,27,17,19,25,11),$$

(відповідно рядків визначаємо всі 8-м вихідних даних, причому для 4-х вихідних значень необхідна інверсія знаку результату 5-27, 7-25, 13-19, 15-17);

$$P_c(n) = (1,3,9,27,17,19,25,11)(31,29,23,5,15,13,7,21)(2,6,18,22)(14,10,30,26)(4,12)(20,28)(8,24)(16)(32),$$

(відповідно перестановка 32 стовпців визначається горизонтально за першим рядком і відповідним рядком матриці після виконання операції $\text{mod } 4N$).

Спрощений твірний масив при перестановці стовпців:

$$P_c'(n) = (1,3,7,5,1,3,7,5) (1,3,7,5,1,3,7,5) (2,6,2,6)(2,6,2,6) (4,4)(4,4) (8,8)(16)(32),$$

$$S_s(n) = (+,+,+,-,-,-) (-,-,-,+,+,+,-) (+,+,-,-)(+,+,-,-) (+,+) (-,-)(+,-)(0)(0).$$

Твірний масив $P(n)$ задає порядок елементів ДСП-III вхідних даних при обчисленні дискретного перетворення на основі циклічних згорток:

$$(1,3,9,27,17,19,25,11)(31,29,23,5,15,13,7,21)(2,6,18,22)(14,10,30,26)(4,12)(20,28)(8,24)(16)(32).$$

Продовжені вхідні дані відповідно до алгоритму визначають вихідні дані, збільшені вдвічі:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
 x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6),x(7),x(8), x(8),x(7),x(6),x(5),x(4),x(3),x(2),x(1),
 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32
 -x(1),-x(2),-x(3),-x(4),-x(5),-x(6),-x(7),-x(8),-x(8),-x(7),-x(6),-x(5),-x(4),-x(3),-x(2),-x(1),

у результаті матриця стовпець вхідних даних матиме за P(n) таку послідовність:

x(1),x(3),x(8),-x(6),-x(1),-x(3),-x(8),x(6), -x(2),-x(4),-x(7),x(5),x(2),x(4),x(7),-x(5),
 x(2),x(6),-x(2),-x(6),x(3),x(7),-x(3),-x(7), x(4),x(8),-x(4),-x(5),x(8),-x(8),x(1),-x(1) .

Схема визначення ідентичних циклічних підматриць, необхідних для ефективного обчислення ДСП-III обсягу N=8, визначається при аналізі за табл.4.4 розподілу підматриць у структурі базисної матриці.

Таблиця 4.4 – Матриця координат та значення перших елементів зі знаком підматриць аргументів базису ДСП-III, N=8

| (i+L _i , j+L _i) - n _{ij} (координати рядок/стовпець)
– знак і значення першого елемента під матриць | | | | | | | |
|--|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------------------|-------------|
| (1,1) – +1; | (1,9) – +1; | (1,17) – +2; | (1,21) – +2; | (1,25) – +4; | (1,27) – -4; | (1,29) – +8;
– -8; | (1,31) – 0; |
| | | | | (3,25) – +4; | (3,27) – -4; | | |
| | | (5,17) – 2 | (5,21) – 2 | (5,25) – +4; | (5,27) – -4; | | |
| | | | | (7,25) – +4; | (7,27) – -4; | | |

У табл. 4.4 узагальнено базисну матрицю аргументів розмірністю (8 x 32), де вказано горизонтально та вертикально кількість значень елементів.

Число циклічних *симетричних* згорток для ДСП-III обсягу N=8 складає одну 8-точкову згортку з повторенням групи елементів та дві 4-точкові згортки з повторенням групи елементів, решта значень визначаються одноточковими добутками.

Об'єднання результатів згорток виконується горизонтально на основі відповідних координат перших елементів підматриць. Вихідні значення перетворення у результаті обчислення промасштабовані на 4 і визначаються для 8-ми значень: $X(0), X(1), X(4), -X(2), -X(7), -X(6), -X(3), X(5)$. Чотири вихідні значення $-X(2), -X(7), -X(6), -X(3)$ необхідно взяти з протилежним знаком відповідно до конкретного алгоритму обчислення за циклічними згортками з повторенням груп елементів у одній з послідовностей.

Процес синтезу алгоритму ДСП-III описано відповідно до загального випадку синтезу, для конкретних алгоритмів можна спростити кількість стовпців у базисній матриці вдвічі i , відповідно $P_c(n)$, причому повторення вхідних даних зменшиться вдвічі та вихідні значення перетворення у результаті обчислення будуть промасштабовані на 2.

4.3.3 Порівняння особливостей синтезу алгоритмів обчислення ДСП-II та ДСП-III на основі циклічних згорток

ДСП-II та ДСП-III є взаємозворотними перетвореннями, однак синтез алгоритмів обчислення на основі циклічних згорток для кожного з них має певні особливості.

Серед основних *особливостей* синтезу алгоритму ДСП-II та ДСП-III можна зазначити:

- розмірність базисної матриці аргументів для ДСП-II $(4N) \times (2N)$, а для ДСП-III $(2N) \times (4N)$;
- послідовність вхідних значень $[x]$ переставлена за твірним масивом: для ДСП-II $[x, -x']$, а для ДСП-III $[x, x', -x, -x']$;
- відбір для визначення N вихідних значень виконується для ДСП-II за $(2N)$ рядків, а для ДСП-III за $(2N)$ стовпців;
- обчислені вихідні значення $X(i)$, що дорівнюють $2X(i)$ для ДСП-II, а для ДСП-III – $4X(i)$;

- твірний масив $P(n)$ формується для ДСП-II на основі стовпців, а для ДСП-III – на основі рядків.

Серед основних спільних *особливостей* синтезу алгоритмів ДСП-II та ДСП-III можна зазначити:

- обчислені деякі з N вихідних значень $X(i)$ визначаються за властивістю асиметрії;

- особливість циклічних згорток, коли послідовність коефіцієнтів ДСП для згортки з різними елементами або з двома групами ідентичних елементів;

- можлива кількість варіантів твірних масивів більше одного;

- однакові осі симетрії для базисних функцій перетворень.

Отже, аналіз одержаних матриць C_a^{II} та C_a^{III} для аргументів базису ДСП-II, ДСП-III та синтез алгоритму показують наявність спільних та специфічних особливостей між ними у процесі обчислення цих перетворень на основі циклічних згорток.

4.4 Синтез алгоритму обчислення ДСП-IV на основі циклічних згорток

4.4.1 Аналіз базисної матриці ДСП-IV виду

Для ДСП-IV пряме і зворотне перетворення $X^{s4}[k]$ за [92] визначаються

$$X_N^{s4}(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left[\frac{(2n+1)(2k+1)\pi}{4N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.39)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_N^{s4}(k) \sin\left[\frac{(2n+1)(2k+1)\pi}{4N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.40)$$

Подання ДСП-IV у матричній формі буде

$$X = C_N^{IV} x, \quad (4.41)$$

де матриці C_N^{IV} мають розмірність $(N \times N)$ з індексами для рядків $k = 0, \dots, N-1$ та індексами для стовпців $n = 0, \dots, N-1$, матриці-стовпці вихідних $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$.

Відповідно $c'_{k,n}$ k -та компонента ДСП-IV для кожного n -го базисного вектора матиме вигляд

$$c'_{k,n} = \sin [(2k+1)(2n+1)\pi/(4N)], \quad (4.42)$$

позначимо $c_{k,n}=[(2k+1)(2n+1)]$ – елемент у k -му рядку n -го стовпця відповідного немасштабованого перетворення.

Відповідно до теорії ДПФ для тригонометричних перетворень з базисом від 0 до 2π необхідно продовжити вхідну послідовність синусного перетворення до періодичної. Продовження *НАНС* (табл. 2.2) послідовності $x(n)$ відповідає ДСП-IV симетрії з розширенням ε [129].

Проаналізуємо структуру матриці базису ДСП-IV за аргументами компонентів $c_{k,n}$ ($k,n=0,1,\dots,N-1$) базисного перетворення

$$(2k+1)(2n+1)\pi/(4N) = c_{k,n} \Delta\varphi, \quad (4.43)$$

де $\Delta\varphi=\pi/(4N)$; N – ціле значення обсягу ДСП-IV.

Проведемо детальний аналіз аргументів $c_{k,n}=(2k+1)(2n+1)$ функції базису ДСП-IV ($k,n=0,1,\dots,N-1$). Функція $\sin[(2k+1)(2n+1)\pi/4N]$ – періодична відносно $8N$, симетрична відносно аргументу π , що відповідає значенню $4N$, асиметрична відносно аргументу $\pi/2$, що відповідає значенню $2N$. Тому елементи спрощеної матриці \underline{C}_a^{IV} визначається послідовним виконанням обчислень

$$c_{k,n} = [(2k+1)(2n+1)] \bmod 8N; \quad (4.44)$$

$$c_{k,n} = 8N - [(c_{k,n}) \bmod 8N], \text{ якщо } [(c_{k,n}) \bmod 8N] > 4N; \quad (4.45)$$

$$\underline{c}_{k,n} = 4N - \{8N - [(c_{k,n}) \bmod 8N]\}, \text{ якщо } \{4N - [(c_{k,n}) \bmod 8N]\} > 2N, \quad (4.46)$$

$$\text{інакше } \underline{c}_{k,n} = c_{k,n}.$$

Спрощена матриця \underline{C}_a доповнюється матрицею знаків S_s синуса, що формується за (4.46) на основі елементів матриці $c_{k,n} = 0, \dots, 8N$ за нерівностями:

$$S_s[k,n] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 0 < c_{k,n} < 4N \\ 0, & \text{якщо } c_{k,n} = 0, 4N \\ -1, & \text{якщо } 4N < c_a(k,n) < 8N, \end{cases} \quad (4.47)$$

де $k=0(1)N-1$, $n=0(1)N-1$.

Наприклад, матриці зі спрощеними аргументами для ДСП-IV обсягом $N=8$ мають значення:

$$C_a^{IV} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 31 & 25 & 19 \\ 5 & 15 & 25 & 29 & 19 & 9 & 1 & 11 \\ 7 & 21 & 29 & 15 & 1 & 13 & 27 & 23 \\ 9 & 27 & 19 & 1 & 17 & 29 & 11 & 7 \\ 11 & 31 & 9 & 13 & 29 & 25 & 15 & 27 \\ 13 & 25 & 1 & 27 & 11 & 15 & 9 & 3 \\ 15 & 19 & 11 & 23 & 7 & 27 & 3 & 31 \end{bmatrix}, \underline{C}_a^{IV} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 3 & 9 & 15 & 11 & 5 & 1 & 7 & 13 \\ 5 & 15 & 7 & 3 & 13 & 9 & 1 & 11 \\ 7 & 11 & 3 & 15 & 1 & 13 & 5 & 9 \\ 9 & 5 & 13 & 1 & 15 & 3 & 11 & 7 \\ 11 & 1 & 9 & 13 & 3 & 7 & 15 & 5 \\ 13 & 7 & 1 & 5 & 11 & 15 & 9 & 3 \\ 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, S_s^{IV} = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & - & - & - \\ + & + & + & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & - & + & + & - \\ + & + & - & - & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & + & - & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{bmatrix}.$$

Тобто, аналіз та поетапне спрощення базисної матриці аргументів на основі використання властивості періодичності і симетричності базисної функції ДСП-IV привело до спрощеної матриці \underline{C}_a^{IV} аргументів із доповненням матрицею знаків S_s , що використовуються для виконання ефективного обчислення перетворення.

4.4.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДСП-IV на основі циклічних згорток

Розроблено підхід до ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень [153], [190], [193]. У результаті, структуру базисної матриці ДСП-IV можна задати твірним масивом $P(n)$, де n – обсяг масиву, що дорівнює

$$n = (n_1+n_2+\dots+n_k) = 4N. \quad (4.48)$$

Твірний масив $P(n)$ об'єднує підмасиви. Кількість k підмасивів $P(n)$ і обсяг циклічних структур визначаються значенням N (просте, степінь простого, складене) обсягу перетворення. Приклади твірних масивів $P(n)$, що формуються для обсягів перетворення:

$N=5$ (просте)

(1,3,9,27) (21,23,29,7) (19,17,11,33)(39,37,31,13) (5,15) (25,35);
(0,1,4,13)(3,10,11,14)(5,16,9,8) (6,19,18,15) (2,7)(12,17), індекси $(n-1)/2$.

$N=8$ (степінь простого)

(1,3,9,27,17,51,25,11,33,35,41,59,49,19,57,43)(5,15,45,7,21,63,61,55,37,47,13,39,53, 31,29,23);

(1,7,49,23,33,39,17,55)(3,21,19,5,35,53,51,37)(9,63,57,15,41,31,25,47)(11,13,27,61,43,45,59,29);

N=10 (складене)

(1,3,9,27)(5,15,45,55)(7,21,63,29)(11,33,19,57)(13,39,37,31)(17,51,73,59)(23,69,47,61)(25,75,65,35)(41,43,49,67)(53,79,77,71);

Властивості симетрії та періодичності базису перетворення ДСП-IV приводять до подання меншими значеннями елементів твірних підмасивів через спрощений твірний масив $P'(n)$, доповнений відповідним масивом знаків $Ss(n)$. Приклади спрощених твірних масивів $P'(n)$ та $Ss(n)$, що формуються для обсягів перетворення:

N=5

(1,3,9,27) (21,23,29,7) (19,17,11,33)(39,37,31,13) (5,15) (25,35);
 (1,3,9,7) (1,3,9,7) (1,3,9,7) (1,3,9,7) (5,5)(5,5),
 (+,+,+,-)(-,-,-,+)(+,+,+,-)(-,-,-,+)(+,+)(-,-);

N=8

(1,3,9,27,17,51,25,11,33,35,41,59,49,19,57,43)(5,15,45,7,21,63,61,55,37,47,13,39,53,31,29,23);
 (1,3,9,5,15,13,7,11,1,3,9,5,15,13,7,11)(5,15,13,7,11,1,3,9,5,15,13,7,11,1,3,9),
 (+,+,+,+,+,-,+,+,-,-,-,-,+,-,-)(+,+,-,+,+,-,-,-,-,+,-,-,+,+,+).

(1,7,49,23,33,39,17,55)(3,21,19,5,35,53,51,37)(9,63,57,15,41,31,25,47)(11,13,27,61,43,45,59,29);
 (1,7,15,9,1,7,15,9)(3,11,13,5,3,11,13,5)(9,1,7,15,9,1,7,15)(11,13,5,3,11,13,6,3),
 (+,+,+,-,-,-,+,-)(+,+,+,+,-,-,-,-)(+,-,-,+,+,+,-)(+,+,+,-,-,-,+);

N=10

(1,3,9,27)(5,15,45,55)(7,21,63,29)(11,33,19,57)(13,39,37,31)(17,51,73,59)(23,69,47,61)(25,75,65,35)(41,43,49,67)(53,79,77,71);
 (1,3,9,13)(5,15,5,15)(7,19,17,11)(11,7,19,17)(13,1,3,9)(17,11,7,19)(17,11,7,19)(15,5,15,5)(1,3,9,13)(13,1,3,9),
 (+,+,+,+)(+,+,-,-)(+,+,-,+)(+,+,+,-)(+,+,+,+)(+,-,-,-)(+,-,-,-)(+,-,-,+)(-,-,-,-)(-,-,-,-).

У додатку В подано твірні масиви для синтезу алгоритму обчислення ДСП-IV коротких N обсягів перетворення.

Твірний масив $P(n)$ перетворення визначає особливість структури базисної матриці ДСП-IV, приведеної до циклічних підматриць. Тому можна виділити

параметри, що характеризують $P(n)$ і відповідно видозмінену базисну матрицю.

Значення параметрів спрощеного твірною масиву $P'(n)=P'(n_1)P'(n_2)\dots P'(n_k)$ для даного обсягу N і виду перетворення визначаються:

- k – кількістю підмасивів у твірному масиві $P'(n)=P'(n_1)P'(n_2)\dots P'(n_k)$;
- кількістю елементів кожного твірною підмасиву (L_1, L_2, \dots, L_k) ;
- першим елементом кожного твірною підмасиву n_{i1} , $i=1(1)k$,

де n_{ij} – елемент підмасиву; L_i – кількість елементів у підмасиві $P(n_i)$. Кількість підмасивів k визначає структуру базисної матриці, кількість елементів L_i підмасивів задає обсяг циклічних згорток.

Наприклад, базисна матриця ДСП-IV обсягу $N=5$ описується твірним масивом, що має такі параметри: $k=6$; $L_1=4$, $L_2=4$, $L_3=4$, $L_4=4$, $L_5=2$, $L_k=2$. Спрощений твірний масив індексів $P'(n)=(+1, -1, +1, -1, +5, -5)$ доповнений масивом знаків $Ss(n)$.

Наступним етапом синтезу в алгоритмі обчислення ДСП-IV є визначення ідентичних циклічних підматриць за пунктом 2.3.2.

Отже, серед основних *особливостей* синтезу алгоритму ДСП-IV можна зазначити:

- розмірність базисної матриці аргументів $(4N) \times (4N)$ із непарними елементами;
- твірний масив $P(n)$ формується на основі рядків, визначених за $(\text{mod}8N)$;
- послідовність вхідних значень $[x, x', -x, -x']$ переставлена за твірним масивом;
- виконується відбір рядків для визначення N вихідних значень;
- обчислені деякі з N вихідних значень $4X(i)$ визначаються за властивістю асиметрії;
- особливість циклічних згорток, що включають послідовність коефіцієнтів ДСП з різними елементами або з двома групами ідентичних елементів;
- можлива кількість варіантів твірних масивів більше одного.

4.4.3 Приклад обчислення ДСП-IV обсягу $N=5$ на основі циклічних згорток

Розглянемо на основі узагальненої методології з врахуванням особливостей приклад обчислення ДСП-IV обсягу $N=5$.

У базисній матриці аргументів з елементами після виконання операції добутку за модулем ($\text{mod } 8N$) міститься кількість значень елементів у перших рядках – 5 і в стовпцях – 20. Відповідно до твірного масиву $P(n)$ для ДСП-IV вибрано горизонтальних 5 – рядків $(1,3,9,27)(5)$, що дозволяють обчислити 5 вихідних значень за згортками.

У табл. 4.5 узагальнено базисну матрицю аргументів розмірністю (5×20) , де вказано кількість горизонтальних та вертикальних значень елементів.

Таблиця 4.5 – Матриця координат та значення перших елементів зі знаком підматриць аргументів базису ДСП-IV $N=5$

| k | $(i+L_i, j+L_i) - n_{ij}$ (координати рядок/стовпець) – знак і значення першого елемента підматриць | | | | | |
|-----|---|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| 0: | (1,1) – +1; | (1,5) – -1; | (1,9) – +1; | (1,13) – -1; | (1,17) – +5; | (1,19) – -5; |
| 1: | | | | | | |
| 4: | | | | | | |
| 13: | | | | | | |
| 2: | (1,1) – +5; | (1,5) – -5; | (1,9) – +5; | (1,13) – -5; | (1,17) – -5; | (1,19) – +5; |

Відповідність табл. 4.5 спрощеним матрицям аргументів та знаків для ДСП-IV, $N=5$ (табл. 4.6).

Таблиця 4.6 – Матриця спрощених аргументів та знаків для ДСП-IV, $N=5$

| k | 0 | 1 | 4 | 13 | 10 | 11 | 14 | 3 | 9 | 8 | 5 | 16 | 19 | 18 | 15 | 6 | 2 | 7 | 12 | 17 |
|-----|---|---|---|----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|---|---|---|----|----|
| 0: | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 1: | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 4: | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 7 | 9 | 7 | 1 | 7 | 9 | 7 | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 13: | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 7 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 2: | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 0: | + | + | + | - | - | - | - | + | + | + | + | - | - | - | - | + | + | + | - | - |
| 1: | + | + | - | + | - | - | + | - | + | + | - | + | - | - | + | - | + | + | - | - |
| 4: | + | - | + | + | - | + | - | - | + | - | + | + | - | + | - | - | + | + | - | - |
| 13: | - | + | + | + | + | - | - | - | - | + | + | + | + | - | - | - | + | + | - | - |
| 3: | + | - | - | - | - | + | + | + | + | - | - | - | - | + | + | + | - | - | + | + |

Визначають ідентичні циклічні підматриці відбором за координатами перших елементів однакових підматриць без врахування знаків. Горизонтально, відповідно до табл. 4.5, ідентичні циклічні підматриці:

$(1,1) - +1; (1,5) - -1; (1,9) - +1; (1,13) - -1$ для $P(n_1)=(1,3,9,7); Ss(n_1) = (+,+,+,-);$

$(1,17) - +5; (1,19) - -5$ для $P(n_2)=(5,5); Ss(n_2) = (+,+),$

які визначають виконання поелементних додавань підмасивів вхідних значень.

Після аналізу ідентичних циклічних підматриць вертикально виконується для них обчислення циклічних згорток, які у даному випадку відсутні.

Твірний масив $P_k(20)$ задає порядок елементів $(0,1,4,13) (3,10,11,14) (5,16,9,8) (6,19,18,15) (2,7) (12,17)$ вхідних даних $x(n)$ при обчисленні дискретного перетворення ДСП-IV на основі циклічних згорток

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ x(0),x(1),x(2),x(3),x(4),-x(4),-x(3),-x(2),-x(1),-x(0), \\ & & & & & & & & & & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ & & & & & & & & & & -x(0),-x(1),-x(2),-x(3),-x(4),-x(4),-x(3),-x(2),-x(1),-x(0), \end{array}$$

у результаті матриця стовпець матиме таку послідовність вхідних даних:

$$\begin{array}{cccccccccccc} x(0),x(1),x(4),-x(3),x(3),-x(0),-x(1),-x(4),-x(4),-x(3), \\ -x(0),-x(1),-x(3),-x(0),-x(1),-x(4),x(2),-x(2),-x(2),-x(2). \end{array}$$

Число циклічних згорток для ДСП-IV обсягу $N=5$ складає одну 4-точкову згортку, у результаті якої визначаються 4 вихідні значення та 1 вихідне значення визначається одноточковим добутком.

Об'єднання результатів згорток виконується горизонтально на основі відповідних координат перших елементів підматриць. Вихідні значення перетворення у результаті промасштабовані на 2 і визначаються для 5 значень: $X(0), X(1), X(4), -X(3), X(2)$. Вихідне значення $-X(3)$ необхідно взяти з протилежним знаком відповідно до цього алгоритму [203].

У табл. 4.7 порівняння кількості операцій подана для чотирьох видів ДСП I-IV обсягу $N=8$ і показує співвимірність балансу операцій за меншої рівної кількості множень.

Таблиця 4.7 – Таблиця кількості операцій прикладів ДСП I-IV

| ДСП | Запропоновані | Традиційні |
|------------|-------------------|--------------|
| ДСП I | $N=8, m=6, a=22$ | $m=6, a=19$ |
| ДСП II/III | $N=8, m=8, a=30$ | $m=9, a=24$ |
| ДСП IV | $N=8, m=14, a=46$ | $m=20, a=38$ |

Порівняння кількості операцій обчислення ДСП I-IV на основі швидких алгоритмів циклічної згортки з мінімальним числом добутків (табл. 4.7) показує меншу кількість операцій множення порівняно з відомими традиційними алгоритмами [81], [134]. Підвищення обчислювальної ефективності ДСП I-IV у плані зменшення кількості множень приводить до збільшення кількості додавань у розроблених алгоритмах обчислення ДСП I-IV на основі ЦЗ порівняно з традиційними.

Отже, сформульовані принципи та етапи синтезу й обчислення з врахуванням особливостей кожного з чотирьох видів ДСП I-IV (табл. 4.8) підтверджують вірогідність розробленої узагальненої методології.

Таблиця 4.8 – Особливості синтезу алгоритму ДСП I-IV

| Особливості синтезу ДСП | ДСП I | ДСП II | ДСП III | ДСП IV |
|---|----------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| Аргументи базисних функцій | $(k+1)(n+1)$ | $(k+1)(2n+1)$ | $(2k+1)(n+1)$ | $(2k+1)(2n+1)$ |
| Розмірність матриці аргументів (рядки) (стовпці) | $(2N)(2N)$ | $(4N)(2N)$ | $(2N)(4N)$ | $(4N)(4N)$ |
| Послідовність вхідних значень (повторення з протилежним знаком) | $[x] [-x']$
' з кінця | $[x] [-x']$
' з кінця | $[x] [x']$
$[-x] [-x']$ | $[x] [x']$
$[-x] [-x']$ |
| Послідовність вихідних значень | $2[\pm X]$,
без $X(N)$ | $2[\pm X]$, | $4[\pm X]$, | $4[\pm X]$, |
| Симетричні циклічні згортки | існує | існує (2^n) | існує (2^n) | |
| Кількість варіантів твірних масивів | існує | існує | існує | існує |
| Осі симетрії для обсягів: | непарних p | $N (\pi)$ | $N (\pi/2)$, | $2N (\pi/2)$, |
| | для парних $2p, 4p, 8p$ | $N/2 (\pi/2)$,
$N (\pi)$,
$3N/2(3\pi/2)$ | $2N (\pi)$,
$3N (3\pi/2)$ | $2N (\pi)$,
$3N (3\pi/2)$ |

Висновки до четвертого розділу

1. У розділі розглянуто застосування узагальненої методології для синтезу алгоритмів дійсних дискретних синусних перетворень чотирьох видів на основі ЦЗ, який включає аналіз базисної матриці, визначення особливостей синтезу алгоритму перетворення, побудову структурних схем обчислення ДСП I-IV. Алгоритми ДСП I-IV поряд з алгоритмами ДКП I-IV на основі ЦЗ, відповідно до кожного з чотирьох видів, характеризуються однотипними етапами та особливостями синтезу.

2. Проаналізовано базис перетворення, синтезовано алгоритм та виконано обчислення ДСП I-IV на основі циклічних згорток. Відповідно до розробленої узагальненої методології сформована структура базисної матриці аргументів ДСП I-IV залежно від значення обсягу перетворення може містити від однієї матриці до декількох циклічних підматриць, що повторюються як горизонтально, так і вертикально. Це скорочує процес обчислення ДСП I-IV на основі циклічних згорток.

3. Блочно-циклічна структура базисної матриці аргументів ДСП I-IV формується за твірним масивом $P(n)$. Одержану структуру базисної матриці можна подати у вигляді спрощених елементів зі знаками за допомогою спрощеного твірного масиву $P'(n)$, доповненого масивом знаків $Ss(n)$. Ці твірні масиви визначаються у процесі синтезу алгоритму обчислення ДСП I-IV на основі циклічних згорток.

4. У процесі синтезу алгоритму для кожного з видів ДСП I-IV враховують особливості, що включають: розмірність матриці аргументів для визначення твірного масиву, переставлення послідовності вхідних значень за твірним масивом, значення осей симетрії базисних функцій перетворень, масштабованість та асиметричність вхідних значень; кількість варіантів твірних масивів.

5. ДСП-II та ДСП-III є взаємозворотними перетвореннями, однак синтез алгоритмів обчислення на основі циклічних згорток для кожного з них має певні

особливості. Аналіз синтезу алгоритму та одержаних матриць для аргументів базису ДСП-II, ДСП-III із набором циклічних підматриць показує наявність спільних та специфічних особливостей між взаємозворотними перетвореннями у процесі обчислення цих перетворень на основі циклічних згорток

6. Сформульовані принципи та етапи синтезу й обчислення з врахуванням особливостей для кожного з чотирьох видів ДСП I-IV на прикладах підтверджують вірогідність розробленої узагальненої методології.

Основні результати розділу опубліковано в [3], [7], [10], [20], [21], [40], [47], [51].

РОЗДІЛ 5

Синтез алгоритму обчислення загального дискретного перетворення Хартлі на основі циклічних згорток

5.1 Види та властивості загального дискретного перетворення Хартлі

Дискретне перетворення Хартлі стало подальшим розвитком перетворень класу Фур'є та знайшло застосування у багатьох прикладних галузях. Адже ДПХ над дійсними даними тісно взаємопов'язано з ДПФ дійсної послідовності і може розглядатись як альтернатива обчислення ДКП [194]. ДПФ над дійсними даними є інформаційно надлишковим, а сама дійсна частина ДПФ є парною функцією та уявно непарною. Використання цієї симетрії застосовується у модифікованих ефективних алгоритмах, що приблизно вдвічі зменшує часові затрати на їх виконання.

Дійсна та уявна частини перетворення Фур'є хоч і мають певний фізичний зміст як амплітудний розподіл косинусних і синусних коливань, в якісному аналізі сигналів застосовуються достатньо рідко. Більше практичне значення для аналізу мають модуль та фаза спектра (амплітудно-частотна і фазово-частотна характеристики) і спектр густини потужності сигналу. Фаза $\varphi(k)$, яка визначається як відношення уявної та дійсної частин і може бути виражена за допомогою парної і непарної складової $H(k)$ дискретного перетворення Хартлі

$$\varphi(k) = \arctg [H(N-k) - H(k)] / [H(k) + H(N-k)] \quad . \quad (5.1)$$

Спектр густини потужності сигналу $P(v)$ у випадку дійсних даних ДПХ, виходячи з вихідних даних $H(v)$ перетворення, визначається за співвідношенням

$$P(k) = [H(k)]^2 + [H(N-k)]^2 \quad . \quad (5.2)$$

Американський вчений Р.В.Л. Хартлі в 1942 році для перетворення над дійсними числами [135, 195] розробив один з варіантів обчислення ДПФ. Значний внесок у розвиток і популяризацію перетворення Хартлі належить

Р. Брейсуеллу. Починаючи з 1983 року [30], [196], Р. Брейсуелл розробив основи теорії неперервного і дискретного перетворення Хартлі, а також один з варіантів його швидкого перетворення для обсягів $N=2^n$ з обчислювальною складністю $O(N \log_2 N)$, що часто називають алгоритмом Хартлі-Брейсуелла [31].

За певних умов застосування ДПХ перетворення дають доволі високий результат. Так, ДПХ краще ДКП опрацює зображення, одержані у позитрон-емісійних томографах та інших видах цифрової радіографії [197]. Перспективними застосуваннями ШПХ є обчислення згорток [198], [199], визначення спектральної густини [200], [201] та певні види цифрового опрацювання даних [202]-[205].

Подальшим розвитком досліджень перетворень Хартлі є визначення загального дискретного перетворення Хартлі [206]. Це перетворення обсягу N для вхідних значень $x(n)$ ($n=0,1,\dots,N-1$) та $X(k)$ вихідних ($k=0,1,\dots,N-1$) визначається за формулою

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos[(n+n_0)(k+k_0) \frac{2\pi}{N}], \quad k = 0,1,\dots, N-1. \quad (5.3)$$

Зворотне загальне дискретне перетворення Хартлі визначається за формулою

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos[(n+n_0)(k+k_0) \frac{2\pi}{N}], \quad n = 0,1,\dots, N-1, \quad (5.4)$$

де n_0, k_0 – відповідні зміщення.

На відміну від ДПФ обчислення прямого і зворотного ДПХ здійснюється за формулами (5.3, 5.4), вигляд яких збігається з точністю до множника $1/N$.

Відповідно до формування періодичності за теорією перетворення Фур'є, для основних чотирьох видів ДПХ у загальному виразі (5.3, 5.4) зміщення можуть набувати значення $0, \frac{1}{2}$. (табл. 5.1).

Таблиця 5.1 – Залежність видів ДПХ від зміщення k_0, n_0

| $k_0, n_0,$ | 0, 0 | 0, $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}, 0$ | $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ |
|-------------|-------|------------------|------------------|----------------------------|
| Вид ДПХ | ДПХ-I | ДПХ-II | ДПХ-III | ДПХ-IV |

Взаємозв'язок видів базисних матриць ДПХ I-IV задається відповідними взаємопов'язаними співвідношеннями [207]

$$\begin{aligned} H_{N}^{II} &= T'_{N} H_{N}^{I} = H_{N}^{IV} T_{N}; & H_{N}^{III} &= H_{N}^{I} T'_{N} = T_{N} H_{N}^{IV}; \\ H_{N}^{IV} &= T'_{N} H_{N}^{I} T_{N} = T_{N} H_{N}^{I} T'_{N} = H_{N}^{II} T_{N} = T_{N} H_{N}^{III}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

де T_N, T'_N – симетричні ортогональні матриці

$$\begin{aligned} T'_{N} &= \text{diag} \sum_{j=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) + [\text{diag} \sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)] J'_{N} \quad ; \\ T_{N} &= \text{diag} \sum_{j=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi(2j+1)}{2N}\right) + [\text{diag} \sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi(2j+1)}{2N}\right)] J_{N} \quad , \end{aligned} \quad (5.6)$$

де J_N, J'_N – матриці з одиничними елементами.

У роботах [208], [209] розглянуто аналітичні властивості перетворення Хартлі, у роботі [210] переваги та недоліки ДПХ порівняно з ДПФ.

Визначення перетворенням Фур'є, коли відомо перетворення Хартлі, задається виразом

$$\text{Re } F_k = \frac{1}{2} [(H'_{N-k} + H^I_k)]; \quad \text{Im } F_k = \frac{1}{2} (N^I_{N-k} - H^I_k)]. \quad (5.7)$$

Багато алгоритмів швидкого перетворення Хартлі базувались на уже відомих ШПФ, які паралельно розвивались та доповнювали одне одного [211]-[214]. Більшість швидких обчислень ДПХ розрізняють за використанням алгоритмів з основою два, розщепленою основою, змішаною основою, непарного обсягу, складеного обсягу і простих множників [215]-[218].

Для синтезу ефективних алгоритмів ДПХ використовують підходи:

- 1) прямої факторизації матриці ДПХ [219];
- 2) непряме обчислення ДПХ з використанням швидких перетворень Фур'є або ДТП [220];
- 3) алгоритми, що базуються на теорії складності [221];
- 4) алгоритми, що базуються на теорії поліноміальних перетворень [222].

Актуальним є і обчислення дискретного перетворення Хартлі на основі циклічних згорток. У роботах [223]-[225] розглянуто формулювання обчислення ДПХ простого значення обсягу $N=p$ на основі обчислення двох циклічних

кореляцій обсягом $(N-1)/2$. У формулюванні використано примітивні корені над полем Галуа, де вихідні дані перетворення визначаються об'єднанням результатів згорток, причому одна з послідовностей згорток з вхідними даними перемножена на відповідні значення функцій синуса та косинуса.

Особлива увага пов'язана у застосуванні обчислення ДПХ на основі циклічних згорток при створенні НВІС, де у мікросхемах на основі даної стратегії здійснювалась значна економія площі кристалу [224], [225].

Аналогічно підходу Рейдера для ДПФ простих обсягів у роботі [226] розглянуто приведення ДПХ простого обсягу до циклічних згорток з використанням для перестановки примітивного кореня g :

$$X_k = X(\langle g^{k-1} \rangle_p) = R_k + x(0) = \sum_{n=0}^{p-2} x_n A_{(k-n)} + x(0); \quad (5.8)$$

$$x_n = x(\langle g^{-(n+1)} \rangle_p); \quad A_{(k-n)} = \text{cas}(2\pi \langle g^{n-2} \rangle_p / P); \quad k, n = 0, 1, \dots, P-2.$$

Розглянемо на основі узагальненої методології синтез алгоритму та виконання обчислення ДПХ I-IV на основі циклічних згорток, що дозволять пришвидшити роботу програмного та апаратного забезпечення у багатьох застосуваннях [227]-[229].

5.2 Синтез алгоритму обчислення ДПХ-I на основі циклічних згорток

5.2.1 Аналіз базисної матриці виду ДПХ-I

Використання узагальненої методології для ефективного обчислення ДПХ на основі циклічних згорток розглянуто у роботах [230]-[232].

ДПХ-I відповідає перетворенню, описаному у роботах Р. Брейсуелла [206]. Пряме та зворотне одновимірні ДПХ-I визначається співвідношеннями:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \text{cas}[(nk)2\pi/N], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.9)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \text{cas} [nk 2\pi/N], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.10)$$

де послідовність вихідних $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$, базисна функція $\text{cas}(\varphi) = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)$.

У матричній формі дискретне перетворення Хартлі першого виду задається виразом:

$$X = H_N^I x, \quad (5.11)$$

де квадратна базисна матриця H_N^I розміром $(N) \times (N)$ з індексами для рядків $k=0, 1, \dots, N-1$ та індексами для стовпців $n=0, 1, \dots, N-1$; матриці стовпці вихідних $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$; N – ціле значення обсягу ДПХ-I.

Проаналізуємо аргументи n, k пов'язані з функцією $\text{cas}((kn)\varphi)$ з $\varphi=2\pi/N$, що є елементами матриці базису ДПХ-I. Функція $\text{cas}(2\pi kn/N)$ – періодична відносно N , тому можна записати базисну матрицю аргументів H_a^I порядку $(N-1) \times (N-1)$ у вигляді:

$$H_a^I = [h(k, n) \bmod N], \quad (5.12)$$

де $h(k, n) = k n$ – значення елементів матриці для $k=1(1)N-1$ рядка та $n=1(1)N-1$ стовпця.

Відповідно до узагальненої методології сформуємо матрицю аргументів базису ДПХ-I допомогою твірного масиву $P(n)$. Масив $P(n)$ можна одержати з використанням підстановки за першим та відповідним рядками (залежно від обсягу перетворення) матриці аргументів H_a^I (5.12). Елементами твірного масиву $P(n)$ є цілі значення у межах від 1 до $N-1$.

Розглянемо структуру та властивості сформованих за твірним масивом $P(n)$ матриць H_{ap}^I аргументів базису ДПХ-I, у найпростішому випадку – для обсягу, що дорівнює простому числу. За твірним масивом $P(n)$ циклічним зсувом вліво формуються рядки квадратної матриці аргументів. Одержана квадратна матриця H_{ap}^I на основі $P(n)$ містить елементи, рівні між собою, що розміщені паралельно до бічної діагоналі $h[i, j] = h[k, l]$, при $i+j=k+l$, де $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $h[i, j] \in P(n)$,

або рівні між собою всі елементи симетрично розміщені відносно головної діагоналі. Тобто, така квадратна матриця називається Ганкелевою (Hankel), що повністю визначається своїм першим рядком або останнім стовпчиком. Окрім того, у такій Ганкелевій матриці кожен наступний рядок одержаний з попереднього циклічним зсувом вліво. Тобто, матриця, сформована на основі твірного масиву $P(n)$, називається ліво-циркулянтною, або циклічною зліва. Наприклад, для обсягу $N=7$ з H_a^l базисної матриці аргументів ДПХ-I сформуємо з H_a^l циклічну зліва матрицю H_{ap}^l за твірним масивом $P(6) = (1, 3, 2, 6, 4, 5)$ вигляду:

$$\begin{array}{r}
 H_a^l = \\
 1: 2: 3: 4: 5: 6: \\
 1: 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\
 2: 2\ 4\ 6\ 1\ 3\ 5 \\
 3: 3\ 6\ 2\ 5\ 1\ 4 \\
 4: 4\ 1\ 5\ 2\ 6\ 3 \\
 5: 5\ 3\ 1\ 6\ 4\ 2 \\
 6: 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1
 \end{array}
 ,
 \quad
 \begin{array}{r}
 H_{ap}^l = \\
 1: 3: 2: 6: 4: 5: \\
 1: 1\ 3\ 2\ 6\ 4\ 5 \\
 3: 3\ 2\ 6\ 4\ 5\ 1 \\
 2: 2\ 6\ 4\ 5\ 1\ 3 \\
 6: 6\ 4\ 5\ 1\ 3\ 2 \\
 4: 4\ 5\ 1\ 3\ 2\ 6 \\
 5: 5\ 1\ 3\ 2\ 6\ 4
 \end{array}
 .$$

Для формування матриці на основі твірного масиву $P(n)$ можна використовувати декілька видів твірних масивів. Наприклад, базисна матриця аргументів ДПХ-I для обсягу $N=14$ може задаватись такими твірними масивами:

$$P'(13) = (1,13)(3,11)(5,9)(2,12)(4,10)(6,8)(7) ;$$

$$P''(13) = (1,11,9)(5,13,3)(2,8,4)(6,10,12)(7) ;$$

$$P'''(13) = (1,3,9,13,11,5) (2,6,4,12,8,10)(7),$$

що визначають матриці H_{ap}^l різних структур.

Проаналізуємо структуру та особливості сформованих за твірним масивом $P(n)$ матриць H_{ap}^l аргументів базису ДПХ-I для послідовностей довільних обсягів. Елементами твірного масиву $P(n)$ є цілі значення у межах від 1 до $N-1$.

Для непарних значень обсягу перетворення $N=p$, ($p=3,5,7,9,11,13,15,17,\dots$) структура матриць H_{ap}^l визначається значеннями твірного масиву $P(n)$. У більшості випадків твірний масив $P(n)$ матиме вигляд:

$$P(n) = (n_1, n_2, n_3, \dots, n_n), \quad (5.13)$$

де $n = N-1$ розмірність твірного масиву; n_i – елемент масиву ($n_i < N$); i – кількість

елементів у масиві $P(n)$.

За твірним масивом $P(n)$ шляхом циклічного зсуву вліво формуються рядки квадратної матриці H_{ap}^I елементів аргументів базису ДПХ-І. Наприклад, для обсягу $N=13$ твірний масив дорівнює

$$P(12)=(1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7),$$

а сформована матриця H_{13p}^I за твірним масивом $P(12)$ матиме значення:

$$H_{ap}^I =$$

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 6 | 12 | 11 | 9 | 5 | 10 | 7 |
| 2 | 4 | 8 | 3 | 6 | 12 | 11 | 9 | 5 | 10 | 7 | 1 |
| 4 | 8 | 3 | 6 | 12 | 11 | 9 | 5 | 10 | 7 | 1 | 2 |
| 8 | 3 | 6 | 12 | 11 | 9 | 5 | 10 | 7 | 1 | 2 | 4 |
| 3 | 6 | 12 | 11 | 9 | 5 | 10 | 7 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| 6 | 12 | 11 | 9 | 5 | 10 | 7 | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 |
| 12 | 11 | 9 | 5 | 10 | 7 | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 6 |
| 11 | 9 | 5 | 10 | 7 | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 6 | 12 |
| 9 | 5 | 10 | 7 | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 6 | 12 | 11 |
| 5 | 10 | 7 | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 6 | 12 | 11 | 9 |
| 10 | 7 | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 6 | 12 | 11 | 9 | 5 |
| 7 | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 6 | 12 | 11 | 9 | 5 | 10 |

Для складених непарних значень та простих значень обсягів твірний масив $P(n)$ складається з твірних підмасивів

$$P(n)=P_1(n_1)P_2(n_2) \dots P_k(n_k), \quad (5.14)$$

де $n = N-1$, n_i – розмірність твірного підмасиву; k – кількість твірних підмасивів. Структура базисної матриці H_{ap}^I визначається на основі твірних масивів і містить підматриці. За твірним підмасивом $P(n_i)$ формуються циклічні зліва підматриці. Наприклад, для простого обсягу $N=17$ твірний масив дорівнює

$$P(16) = P_1(8)P_2(8) = (1, 2, 4, 8, 16, 15, 13, 9) (3, 6, 12, 7, 14, 11, 5, 10),$$

матриця H_{ap}^I містить чотири підматриці.

Для обсягу $N=15=3 \cdot 5$ твірний масив дорівнює

$$P(14)= P_1(4)P_2(4)P_3(2)P_4(4) = (1, 2, 4, 8) (3, 6, 12, 9) (5, 10) (7, 14, 13, 11),$$

матриця H_{ap}^I містить 16 підматриць.

За твірним підмасивом $P(n_i)$ шляхом циклічного зсуву вліво формуються рядки квадратної підматриці у матриці H_{ap}^I елементів аргументів базису ДПХ-І. Кількість та обсяг твірних підмасивів визначають структуру базисної матриці H_{ap}^I елементів аргументу.

Для парних значень обсягу перетворення $N=2 \cdot p$, (6, 10, 14, 18, 22, ...) загальна структура базисної матриці H_{ap}^I для парних обсягів має вигляд

$$H_{ap}^I = \begin{pmatrix} Ho & He \\ He & He \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

де Ho – підматриця, що містить початкові непарні елементи, He – підматриця, що містить початкові парні елементи. Наприклад, загальна структура (5.15) відповідає обсягу $N=14=2 \cdot 7$ з твірним масивом, що дорівнює

$$P(13) = P_1(6) P_2(1) P_3(6) = (1, 3, 9, 13, 11, 5) (7) (8, 10, 2, 6, 4, 12),$$

а матриця H_{ap}^I , сформована на його основі, має значення:

| | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 3 | 9 | 13 | 11 | 5 | 7 | 8 | 10 | 2 | 6 | 4 | 12 |
| 3 | 9 | 13 | 11 | 5 | 1 | 7 | 10 | 2 | 6 | 4 | 12 | 8 |
| 9 | 13 | 11 | 5 | 1 | 3 | 7 | 2 | 6 | 4 | 12 | 8 | 10 |
| 13 | 11 | 5 | 1 | 3 | 9 | 7 | 6 | 4 | 12 | 8 | 10 | 2 |
| 11 | 5 | 1 | 3 | 9 | 13 | 7 | 4 | 12 | 8 | 10 | 2 | 6 |
| 5 | 1 | 3 | 9 | 13 | 11 | 7 | 12 | 8 | 10 | 2 | 6 | 4 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 10 | 2 | 6 | 4 | 12 | 0 | 8 | 10 | 2 | 6 | 4 | 12 |
| 10 | 2 | 6 | 4 | 2 | 8 | 0 | 10 | 2 | 6 | 4 | 12 | 8 |
| 2 | 6 | 4 | 12 | 8 | 10 | 0 | 2 | 6 | 4 | 12 | 8 | 10 |
| 6 | 4 | 12 | 8 | 10 | 2 | 0 | 6 | 4 | 12 | 8 | 10 | 2 |
| 4 | 12 | 8 | 10 | 2 | 6 | 0 | 4 | 12 | 8 | 10 | 2 | 6 |
| 12 | 8 | 10 | 2 | 6 | 4 | 0 | 12 | 8 | 10 | 2 | 6 | 4 |

Можлива у структурі наявність підматриць He' , які містять початкові зміщені парні елементи відносно до He . Наприклад, для обсягу $N=18=2 \cdot 3 \cdot 3$ з твірним масивом, що дорівнює

$$P(13) = (1, 5, 7, 17, 13, 11) (2, 10, 14, 16, 8, 4) (3, 15) (6, 12) (9),$$

базисна матриця H_{ap}^I сформована на його основі, має вигляд (рис. 5.1), причому підматриці містять менші під матриці, сформовані за твірними підмасивами (1, 5, 7, 17, 13, 11) (3, 15) для Ho та (2, 10, 14, 16, 8, 4) (3, 15) (6, 12) для He .

Підматриці у загальній структурі базисної матриці (рис. 5.1) мають значення:

| Ho | He | He' |
|----------------|----------------|----------------|
| 1 5 7 17 13 11 | 2 10 14 16 8 4 | 4 2 10 14 16 8 |
| 5 7 17 13 11 1 | 10 14 16 8 4 2 | 2 10 14 16 8 4 |
| 7 17 13 11 1 5 | 14 16 8 4 2 10 | 10 14 16 8 4 2 |
| 17 13 11 1 5 7 | 16 8 4 2 10 14 | 14 16 8 4 2 10 |
| 13 11 1 5 7 17 | 8 4 2 10 14 16 | 16 8 4 2 10 14 |
| 11 1 5 7 17 13 | 4 2 10 14 16 8 | 8 4 2 10 14 16 |

$$\begin{array}{cc}
 H2 = & H3 = \\
 \begin{array}{cc} 3 & 15 \\ 15 & 3 \end{array} & \begin{array}{cc} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{array} \\
 H5 = & H'5 = \\
 \begin{array}{cc} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{array} & \begin{array}{cc} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{array} \\
 H6 = & \\
 \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} &
 \end{array}$$

| | | | | | | | |
|------------|-----------|-----------|-----------|-------------|------------|------------|------------|
| <i>H1</i> | | | <i>H2</i> | <i>He4</i> | | | <i>H5</i> |
| | | | <i>H2</i> | | | | <i>H5</i> |
| | | | <i>H2</i> | | | | <i>H5</i> |
| <i>H2</i> | <i>H2</i> | <i>H2</i> | <i>H3</i> | <i>H5</i> | <i>H5</i> | <i>H5</i> | <i>H6</i> |
| <i>He4</i> | | | <i>H5</i> | <i>He'4</i> | | | <i>H'5</i> |
| | | | <i>H5</i> | | | | <i>H'5</i> |
| | | | <i>H5</i> | | | | <i>H'5</i> |
| <i>H5</i> | <i>H5</i> | <i>H5</i> | <i>H5</i> | <i>H'5</i> | <i>H'5</i> | <i>H'5</i> | <i>H6</i> |

Рисунок 5.1 – Структура базисної матриці ДПХ-I обсягу N=18

Отже, загальна структура базисної матриці аргументів ДПХ залежить від значення обсягу перетворення і може містити від однієї матриці до декількох підматриць, що повторюються як горизонтально, так і вертикально.

Залежно від значення обсягу перетворення, враховуючи симетричність функції $\cos(2\pi kn/N)$ (рис. 2.1) відносно – осі $\pi/4$ на проміжку $(0, \pi/2)$; осі π на проміжку $(0, 2\pi)$; осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$; осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$, у матриці елементів аргументів H_a^l (4) можна визначити елементи $h(k,n)$, що можуть набувати значення від $[1, \dots, \{N/8\}]$ та $[\{N/4\}, \dots, \{N/2\}]$ з набору $0(1)N$, доповнюючи значеннями $+1, -1$, матриці знаків S_k функції касинус.

Вісь симетрії, що може набувати значень $\Omega[\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4]$ для функції касинус, визначається за формулою

$$\Omega = kn\varphi, \quad (5.16)$$

де $\varphi = 2\pi/N$; kn – цілочисельне значення $1, 2, 3, \dots, N-1$.

Для непарних значень обсягу перетворення $N = p$, (3,5,7,9,11,13,15,17,...) жодне значення аргументів не належить до перелічених осей симетрії.

Для парних значень обсягу перетворення існує одне зі значень елементів, що дорівнює $N/2$, що відповідає аргументу π . Це визначає відповідну рівність абсолютних значень функції касинус на проміжках $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$. Тому відповідні значення елементів матриці H_a^l, p можуть дорівнювати одному із значень $1, \dots, N/2-1$, тобто замінені за формулою

$$i=N/2+i, \text{ для } i=1, \dots, N/2-1 \quad (5.17)$$

та доповнені відповідною матрицею знаків Sk (антисиметричне об'єднання).

Матрицю знаків Sk одержують на основі аргументів функції касинус за умовою ($nk \cdot 2\pi/N = 3\pi/4, 7\pi/4$)

$$Sk[k, n] = \begin{cases} +1, & 7N/8 < h(k, n) < 3N/8, \\ -1, & 3N/8 < h(k, n) < 7N/8, \\ 0, & h(k, n) = 3N/8, 7N/8. \end{cases} \quad (5.18)$$

Для зручності позначення використовуватимемо “+” замість +1, “-” замість -1.

Для парних кратних чотирьом значенням обсягу перетворення $N=4 \cdot p$, (12,20,28,36,44,52, 60,...) існує значення матриці базису ДПХ-I, що дорівнює $N/2$ та відповідає аргументу π . Це визначає відповідність абсолютних значень функції касинус на проміжках $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$. Тому завдяки симетричному відображенню відповідні значення елементів матриці H_a^l, p спрощуються. Відповідно, спрощений твірний масив міститиме елементи, які знаходяться на проміжках симетрії. Наприклад, для обсягу $N = 20$ твірний масив дорівнює

$$P(19) = (1, 3, 9, 7) (11, 13, 19, 17) (2, 6, 18, 14) (4, 12, 16, 8) (5, 15) (10),$$

спрощений твірний масив

$$P'(19) = (1, 2, 6, 7) (1, 2, 6, 7) (1, 2, 6, 7) (2, 6, 7, 1) (5, 5) (5),$$

доповнення масивом знаків

$$Sk(n) = (+, +, -, +) (+, -, -, -) (-, -, +, -) (+, +, +, -) (+1, -1)(-1).$$

Вісь π відповідатиме цілочисельному значенню аргументу $k \cdot n = N/2 = 20/2 = 10$. Для даних обсягів існують значення аргументів, що дорівнюють $\pi/2$,

$3\pi/2$ та відповідають цілочисельним значенням $k \cdot n = N/4 = 20/4 = 5$, $k \cdot n = 3N/4 = 3 \cdot 20/4 = 15$, однак ці значення відповідно функції $\cos(kn\varphi)$ набувають значення $+1, -1$, але не є осями симетрії.

Для парних кратних вісьми значенням обсягу перетворення $N = 8 \cdot p$, $(24, 40, 48, 56, 72, 80, 88, 96, 104, \dots)$ та $N = 2^n$ $(4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots)$ обсягів існують значення матриці базису ДПХ-I рівні $N/4$, та $3N/4$, що відповідно відповідають симетрії осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$ та осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$ функції касинуса. Для даних обсягів для значень елементів, що дорівнюють $N/4$, $N/2$, $3N/4$, що відповідають у матриці базису ДПХ-I відповідним аргументам $\pi/2$, π , $3\pi/2$ та значенням $+1, -1, -1$, додатково матимемо значення елементів $N/8, 3N/8, 5N/8, 7N/8$ що відповідають відповідно аргументам $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ та значенням $\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, 0$.

Тому спрощена матриця H_a^T містить значення елементів, що відповідають аргументам, розміщеним на проміжках $(0, \pi/4), (\pi/2, 3\pi/4)$ із доповненням відповідними значеннями матриці знаків Sk . Тобто, завдяки симетричному відображенню, спрощений твірний масив міститиме елементи на проміжку $(0, \pi/4)$, де присвоюються відповідні значення елементів проміжків $(\pi/2, \pi/4), (\pi, 5\pi/4), (3\pi/2, 5\pi/4)$; елементам на проміжку $(\pi/2, 3\pi/4)$ – присвоюються з проміжків $(\pi, 3\pi/4), (3\pi/2, 7\pi/4), (2\pi, 7\pi/4)$. Наприклад, для обсягу $N = 24$ твірний масив $P(23)$ та спрощений твірний масив $P'(23)$ дорівнюють

$$P(23) = (1,5)(2,10)(3,15)(4,20)(6)(7,11)(8,16)(9,21)(12)(13,17)(14,22)(18)(19,23),$$

$$P'(23) = (1, 1)(2, 8)(3, 3)(2, 8)(6)(7, 7)(8, 2)(9, 9)(12)(1, 1)(2, 8)(6)(7, 7),$$

$$Sk(23) = (+, +)(+, -)(+, -)(+, -)(+1)(+, -)(+, -)(0, 0)(-1)(-, -)(-, +)(-1)(-, +),$$

доповнення спрощеного твірного масиву масивом знаків.

Для даного обсягу перетворення вісь π відповідатиме цілочисельному значенню аргументу $k \cdot n = N/2 = 24/2 = 12$; вісь $\pi/4 = kn\varphi = kn \cdot 2\pi/N$ відповідатиме цілочисельному значенню аргументу $k \cdot n = N/8 = 24/8 = 3$; вісь $3\pi/4 = kn\varphi = kn \cdot 2\pi/N$ відповідатиме цілочисельному значенню аргументу $k \cdot n = 3N/8 = 3 \cdot 24/8 = 9$.

Для обсягу $N=32$ твірний масив рівний $P(31)$ та спрощений твірний масив $P'(31)$ дорівнюють

$$P(31) = (1,3,9,27,17,19,25,11)(5,15,13,7,21,31,29,23)(2,6,18,22)(10,30,26,14)(4,12)(8,24)(20,28)(16);$$

$$P'(31) = (1,3,9,11,1,3,9,11)(3,9,11,1,3,9,11,1)(2,2,2,2)(10,10,10,10)(4,12)(8,4)(4,12)(8)$$

$$Sk(31) = (+, +, +, -, -, -, -, +)(+, -, -, +, -, +, +, -)(+, +, -, -)(+, +, -, -)(+, 0)(1, -1)(-, 0)(-1).$$

У результаті одне менше цілочисельне значення твірного масиву присвоюється для відповідних більших значень на проміжку симетрії, тобто виконується заміна за формулою

- 1) $i=N/2+i$, на проміжку аргумента $(0, 2\pi)$ з віссю $N/2$ для $i=1, \dots, N/2$;
- 2) $i=N/4-i=N/2+i=3N/4-i$ на проміжку аргументу $(0, \pi/4)$ з віссю $N/8$ для $i=1, \dots, N/8$;
- 3) $N/4+i=N/2-i=3N/4+i=N-i$ на проміжку аргументу $(\pi/2, 3\pi/4)$ з віссю $3\pi/4$ для $i=1, \dots, N/8$.

Отже, спрощена матриця $H_{a,p}'$ містить значення елементів, що відповідають аргументам, розміщеним на проміжках $(0, \pi/4)$, $(\pi/2, 3\pi/4)$ із доповненням відповідними значеннями матриці знаків Sk .

Отже, базисну матрицю аргументів ДПХ-I можна сформулювати за допомогою елементів декомпозиції спрощеного твірного масиву індексів $P'(n)$ та масиву знаків $Sk(n)$:

$$P'(n) = P'(n_1)P'(n_2) \dots P'(n_k), \quad (5.19)$$

$$Sk(n) = Sk(n_1)Sk(n_2) \dots Sk(n_k), \quad (5.20)$$

де $n = (N-1)$ – розмірність масиву; k – кількість підмасивів, елементи твірного масиву; n_k – цілі значення твірних масивів індексів $P(n)$ у межах від 1 до $N-1$ та знаків $Sk(n)$ зі значеннями $+1, -1, 0$.

Сформовані твірні масиви $P'(n)$, $Sk(n)$ визначають структури спрощених матриць аргументів $H_{a,p}'$ базису ДПХ-I із доповненням відповідними еквівалентними матрицями знаків Sk функції касинус, що у сукупності становлять цілісність базису ДПХ-I для довільного обсягу перетворення. Взаємозв'язок елементів декомпозиції базису ДПХ-I потребує переставлення

рядків і стовпців, відповідно до твірною масиву $P(n)$, для формування циклічних блоків.

5.2.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-I на основі циклічних згорток

Відповідно до узагальненої методології структура спрощених матриць H_a^l , доповнених матрицею знаків Sk , визначається за твірною масивом $P(n)$, що є основою для синтезу алгоритму обчислення ДПХ-I на основі циклічних згорток. Адже матриці H_a^l та Sk або відповідні підматриці у матриці є циклічними зліва. Застосування швидких алгоритмів циклічних згорток приводить до ефективного обчислення даного перетворення.

На підготовчому етапі переставляють вхідні дані $x(i)$, $i=1(1)N-1$, що визначається за твірною масивом $P(n)$. Одночасно можуть визначатись коефіцієнти косинусних складових базису ДПХ-I, що беруть участь у операціях згортки. Для косинусної частини також групують коефіцієнти за $P(n)$.

Наступним етапом синтезу в алгоритмі обчислення ДПХ-I є визначення ідентичних циклічних підматриць відповідно до пункту 2.3.2 на основі значень параметрів твірною масиву $P(n)$ і спрощеного твірною масиву $P'(n)$ та масиву знаків $Sk(n)$. Елементи у $P'(n)$ можуть набувати повторюваних значень, менших за n , але при цьому необхідно враховувати ще значення відповідних знаків $Sk(n)$.

Аналіз структури у процесі синтезу алгоритму на основі спрощених матриць H_a^l визначає порядок об'єднаних вхідних даних $x(i)$. Цей аналіз передбачає визначення відповідних параметрів твірною масиву $P(n)=P(n_1)P(n_2)\dots P(n_k)$ для цього обсягу перетворення. До таких взаємопов'язаних параметрів належить :

- N обсяг перетворення: а) $N=p$ (просте або непарне); б) $N=2p$; (парні або кратні $N=4p$; $N=2^p$);
- k – кількість підмасивів у твірному масиві $P(n)=P_1(n_1) P_2(n_2) \dots P_k(n_k)$;

- кількість елементів кожного твірного підмасиву $(L_1), (L_2), \dots, (L_k)$;
- кількість підматриць $m \geq k^2$ базової матричної структури;
- координати $(v_{i,j})$ і відповідні значення $(p_{11}), (p_{21}), \dots, (p_{m1})$ перших елементів підматриць у матричній структурі;
- кількість повторень однакових підматриць $r < m$ визначається за однаковими значеннями перших елементів у матричній структурі та приналежності до відповідного твірного підмасиву;
- кількість підматриць, що починаються з (n_{ij}) проміжного елемента твірного підмасиву $P(n_i)$.

Розглянемо приклад узагальненої схеми визначення ідентичних циклічних підматриць, необхідних для обчислення ДПХ-I обсягу $N=20$, де $N=4r$ розкладається $20=4 \cdot 5$; елементами твірного масиву можуть бути значення $n_{ij} = (1, \dots, 19)$. Сформоване значення твірного масиву за циклічним розкладом підстановки ϵ :

$$P(19) = (1, 3, 9, 7) (11, 13, 19, 17) (4, 12, 16, 8) (14, 2, 6, 18) (5, 15) (10),$$

$$P'(19) = (1, 2, 6, 7) (1, 2, 6, 7) (1, 2, 6, 7) (1, 2, 6, 7) (5, 5) (5),$$

$$Sk(n) = (+, +, -, +) (-, -, +, -)(+, -, -, -) (-, +, +, +)(+1, -1)(-1).$$

Вхідні значення перетворення переставляються у порядку відповідно до значень твірного масиву за стовпцями:

$$[x(1), x(3), x(9), x(7), x(11), x(13), x(19), x(17), x(4), x(12), x(16), x(8), x(14), x(2), x(6), x(18), x(5), x(15), x(10)].$$

Визначаються та групуються коефіцієнти функції $cas(n_i \varphi)$ для касинусних складових базису ДПХ-I з $\varphi=2\pi/20$, що беруть участь в операціях згортки для аргументів: $(1\varphi, 2\varphi, 6\varphi, 7\varphi) (5\varphi=\pi/2)$.

Твірний масив складається з шести підмасивів $P(19) = P_1(4)P_2(4)P_3(4)P_4(4)P_5(2)P_6(1)$ з визначеними параметрами: $k = 6$ – кількість підмасивів у твірному масиві; $L_1=4, L_2=4, L_3=4, L_4=4, L_5=2, L_6=1$ – кількість елементів у підмасивах $P(n_i)$ задають обсяг циклічних згорток; $m \geq k^2$ загальна кількість підматриць: $m \geq 16$ (без врахування дво та одноелементних).

Відповідність табличних координат горизонталі та вертикалі (i, j) елементам твірного масиву $P(n_i)$ та $P'(n_i)$:

(i, j) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
 (1, 3, 9, 7) (11, 13, 19, 17) (4, 12, 16, 8) (14, 2, 6, 18) (5, 15) (10),
 (1, 2, 6, 7) (1, 2, 6, 7) (1, 2, 6, 7) (1, 2, 6, 7) (5, 5) (5),
 (+, +, -, +) (-, -, +, -) (+, -, -, -) (-, +, +, +) (+1, -1) (-1).

Для визначення ідентичних циклічних підматриць у таблиці координати перших елементів підматриць визначаються за $(i+L_i, j+L_i)$, де L_i – вибирається за приналежності до твірного підмасиву значень перших елементів підматриць у матричній структурі, які обчислюються за відповідністю координат (i, j) елементам $P(n)$ твірного масиву $(n_i \times n_j) \bmod N$. Далі отримане значення першого елемента підматриць спрощується за властивістю симетрії відносно до осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$ та осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$ функції косинуса. У табл. 5.2 узагальнено базисну матрицю аргументів розмірністю (18×18) без врахування $X[0]$, $X[10]$.

Таблиця 5.2 – Структура базисної матриці ДПХ-I обсягу $N=20$

| $(i+L_i, j+L_i) - n_{ij}$ (координати рядок, стовпець) – знак і значення першого елемента підматриць | | | | |
|--|---------------------|--------------------|----------------------|-----------------|
| $(1,1) - +1; (1)$ | $(1,5) - -1; (11)$ | $(1,9) - +1; (4)$ | $(1,13) - -1; (14)$ | $(1, 17) - +0;$ |
| $(5,1) - -1; (11)$ | $(5,5) - +1; (1)$ | $(5,9) - +1; (4)$ | $(5, 13) - -1; (14)$ | |
| $(9,1) - +1; (4)$ | $(9,5) - +1; (4)$ | $(9,9) - -6; (4)$ | $(9, 13) - -6; (4)$ | |
| $(13,1) - -1; (14)$ | $(13,5) - -1; (14)$ | $(13,9) - -6; (4)$ | $(13,13) - -6; (4)$ | |
| $(17,1) - +0;$ | $(17,5) - -0;$ | $(17,9) - 0;$ | $(17,13) - 0;$ | $(17,17) - +0;$ |

Відповідність табл. 5.2 подано у розширеному вигляді матриць (табл. 5.3). Матриця з табл. 5.3 не обчислюється, за винятком перших елементів підматриць, що значно ефективніше.

Таблиця 5.3 – Матриця спрощених аргументів H'_{a_p} та знаків Sk

| | 1: | 3: | 9: | 7: | 11: | 13: | 19: | 17: | 4: | 12: | 16: | 8: | 14: | 2: | 6: | 18: | 5: | 15: | 10: |
|-----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|----|----|-----|----|-----|-----|
| 1: | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| 3: | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 9: | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 7: | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| 11: | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| 13: | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 19: | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 17: | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| 4: | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 12: | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| 16: | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| 8: | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 14: | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 2: | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| 6: | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| 18: | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 2 | 6 | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5: | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15: | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 3 | 9 | 7 | 11 | 13 | 19 | 17 | 4 | 12 | 16 | 8 | 14 | 2 | 6 | 18 | 5 | 15 | 10 |
| 1: | + | + | - | + | - | - | + | - | + | - | - | - | - | + | + | + | + | - | - |
| 3: | + | - | + | + | - | + | - | - | - | - | - | + | + | + | + | - | - | + | - |
| 9: | - | + | + | + | + | - | - | - | - | - | + | - | + | + | - | + | + | - | - |
| 7: | + | + | + | - | - | - | - | + | - | + | - | - | + | - | + | + | - | + | - |
| 11: | - | - | + | - | + | + | - | + | + | - | - | - | - | + | + | + | - | + | - |
| 13: | - | + | - | - | + | - | + | + | - | - | - | + | + | + | + | - | + | - | - |
| 19: | + | - | - | - | - | + | + | + | - | - | + | - | + | + | - | + | - | + | - |
| 17: | - | - | - | + | + | + | + | - | - | + | - | - | + | - | + | + | + | - | - |
| 4: | + | - | - | - | + | - | - | - | - | - | + | - | - | - | + | - | + | + | + |
| 12: | - | - | - | + | - | - | - | + | - | + | - | - | - | + | - | - | + | + | + |
| 16: | - | - | + | - | - | - | + | - | + | - | - | - | + | - | - | - | + | + | + |
| 8: | - | + | - | - | - | + | - | - | - | - | - | + | - | - | - | + | + | + | + |
| 14: | - | + | + | + | - | + | + | + | - | - | + | - | - | - | + | - | - | - | + |
| 2: | + | + | + | - | + | + | + | - | - | + | - | - | - | + | - | - | - | - | + |
| 6: | + | + | - | + | + | + | - | + | + | - | - | - | + | - | - | - | - | - | + |
| 18: | + | - | + | + | + | - | + | + | - | - | - | + | - | - | - | + | - | - | + |
| 5: | + | - | + | - | - | + | - | + | + | + | + | + | - | - | - | - | + | - | - |
| 15: | - | + | - | + | + | - | + | - | + | + | + | + | - | - | - | - | - | + | - |
| 10: | - | - | - | - | - | - | - | - | + | + | + | + | + | + | + | + | - | - | + |

Визначення ідентичних циклічних підматриць виконується відбором за координатами перших елементів однакових підматриць горизонтально у матричній структурі. У випадку для 4-точкових згорток

$(1,1) - +1; (1,5) - -1; (1,9) - +1; (1,13) - -1$; для $P'_1(4)=P'_2(4)=P'_3(4)=P'_4(4) = (1,2,6,7)$,

$[x(1),x(3),-x(9),x(7)]+[-x(11),-x(13),x(19),-x(17)]+[x(4),-x(12),-x(16),-x(8)]+[-x(14),x(2),x(6),x(18)]$ – об'єднання вхідних даних для першої горизонталі підматриць;

$(5,1) - -1; (5,5) - +1; (5,9) - +1; (5,13) - -1$; для $P'_2(4)=P'_1(4)=P'_3(4)=P'_4(4) = (1,2,6,7)$,

$[-x(1),-x(3),x(9),-x(7)]+[x(11),x(13),-x(19),x(17)]+[x(4),-x(12),-x(16),-x(8)]+[-(14),x(2),x(6),x(18)]$ – об'єднання векторів вхідних даних для другої горизонталі підматриць.

Виконання поелементних додавань вхідних значень будуть використовуватись для обчислення циклічних згорток.

Визначення ідентичних циклічних підматриць при аналізі вертикально виконується за стовпцями. У випадку для останнього стовпця: $(1,17) - 0$ для $P'_5(4) = (5,5)=(0,0)$ об'єднуємо вхідні дані $[x(5)-x(15)]$.

До структурної схеми (рис. 5.2) обчислення ДПХ-I входять вузли: BRC – буферний регістр коефіцієнтів; BRD – буферний регістр вхідних даних; U_i – вузли об'єднання вхідних даних; CCU – циклічний конвольвер; I – інвертор знаків значень згортки; Σ – вузол об'єднання результатів згортки відповідно до структури базису цього обсягу перетворення.

Виконання швидких циклічних згорток та організація об'єднання результатів згорток виконуються на основі відповідних координат перших елементів підматриць. ДПХ-I для $N=20$ зводиться до обчислення: чотирьох 4-точкових циклічних згорток з об'єднанням повторень. Отримані вихідні значення перетворення обчислюються без $X(0)$ і відповідають порядку відповідному значенням твірного масиву $P(19)$ з додаванням до кожного $x(0)$.

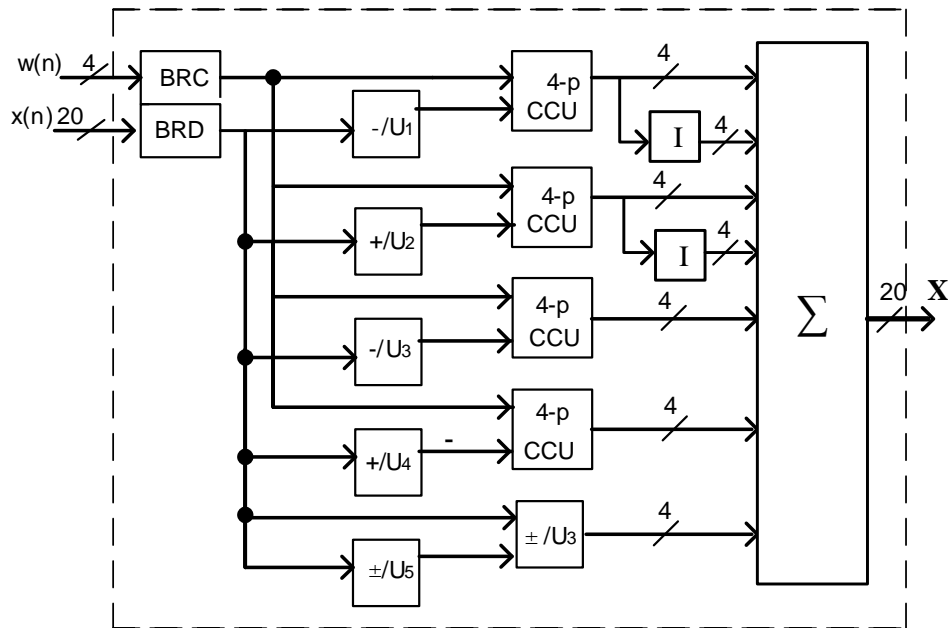


Рисунок 5.2 – Структурна схема модуля обчислення ДПХ-I обсягу $N=20$

Виконання перетворення ДПХ-I для послідовностей обсягів цілого степеня два має закономірно зростаючу кількість циклічних згорток. Для даних обсягів $N=2^i$ можна узагальнити одержану структуру базисної матриці та подати у вигляді табл. 5.4, де k – кількість підмасивів у відповідних твірних масивах, d – обсяг циклічних згорток, s – їхня кількість.

Таблиця 5.4 – Циклічні симетричні згортки у структурі базису ДПХ-I для обсягів цілого степеня два

| | | | | | |
|---|-----|-----|------|------|-----|
| N | 16 | 32 | 64 | 128 | ... |
| k | 6 | 8 | 10 | 12 | |
| d | 4/4 | 8/4 | 16/4 | 32/4 | |
| / | 2/2 | 4/4 | 8/4 | 16/4 | |
| s | 1 | 2/2 | 4/4 | 8/4 | ... |
| | | 1 | 2/2 | ... | |
| | | | 1 | 1 | |

Отже, для підматриць, що містять як горизонтально, так і вертикально однакові значення аргументів, проводяться об'єднання вхідних даних. Це зменшує кількість циклічних згорток, що необхідно буде виконати. Тобто, для виконання меншої кількості циклічних згорток над об'єднаними вхідними даними та згрупованими значеннями косинусної функції використовуються алгоритми швидких згорток. На завершальному етапі на основі одержаної

матричної структури об'єднуємо одержані значення циклічних згорток i , компонуємо відповідні одержані значення, проводимо обчислення вихідних значень дійсних дискретних коефіцієнтів ДПХ-I.

Серед *особливостей* синтезу та обчислення ДПХ-I можна виділити:

- розмірність матриці ($N \times N$), що складається зі значень k, n аргументів за рядками і стовпцями;
- послідовність вхідних значень $[x]$, без врахування $x(0)$ - $x(N/2)$;
- обчислені вихідні значення без $X(0)$, $X[N/2]$;
- для обсягів 2^n виконуються циклічні згортки з повторенням груп елементів;
- для непарних обсягів немає осей, для парних $2r, 4r$ значень обсягу перетворення π одна вісь симетрії, для парних $8r$ маємо осі симетрії $\Omega[\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4]$, (значення аргументів базису у межах $(0, 2\pi)$ ДПХ-I, що належить до перелічених осей симетрії);
- можлива кількість варіантів твірних масивів – більше одного для конкретного обсягу.

5.3 Синтез алгоритму обчислення ДПХ-II на основі циклічних згорток

Розроблену узагальнену методологію для синтезу алгоритму для ефективного обчислення загального ДПХ, що базуються на декомпозиції базисної гармонічної функції, розглянуто у [153], [232].

5.3.1 Аналіз базисної матриці виду ДПХ-II

Загальна формула ДПХ (5.3) для відповідного зміщення $k_0 = 0$, $n_0 = 1/2$ визначення дійсного ДПХ-II набуває вигляду

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos [(2n+1)k\pi/N], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.21)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \text{cas} [(2n+1)k \pi/N], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.22)$$

Подання ДПХ -II у матричній формі відповідно (5.21) буде

$$X = H_N^{II} x, \quad (5.23)$$

де матриці H_N^{II} мають розмірність $(N) \times (N)$ з індексами для рядків $k = 0, \dots, N-1$ та індексами для стовпців $n=0, \dots, N-1$; матриці-стовпці вихідних $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$.

Відповідно $h'_{k,n}$ k -та компонента ДПХ-II для кожного n -го базисного вектора матиме вигляд

$$h'_{k,n} = \text{cas} ((2n+1)k \pi/N) = \text{cas} (h_{k,n} \pi/N), \quad (5.24)$$

де $h_{k,n} = (2n+1)k$ елемент у k -му рядку n -го стовпця відповідного немасштабованого перетворення.

Проаналізуємо структуру матриці базису ДПХ-II за аргументами компонентів $h_{k,n}$ ($k, n=0, 1, \dots, N$) базисного перетворення

$$(2n+1)k \pi/N = h_{k,n} \Delta\phi, \quad (5.25)$$

де $\Delta\phi = \pi/N$; N – ціле значення обсягу ДПХ-II.

Детально проаналізуємо аргументи $h_{k,n} = k(2n+1)$ базису ДПХ-II ($k, n=0, 1, \dots, N-1$). Функція $\text{cas}[k(2n+1)\pi/(N)]$ – періодична відносно $2N$, тому можна записати на основі базису матрицю аргументів касинусу порядку $(N \times N)$ у вигляді:

$$H_a^{II}(k, n) = [(k(2n+1) \bmod (2N))]. \quad (5.26)$$

З елементів $h_a(k, n)$ одержаної (5.26) матриці H_a^{II} виділяємо і спрощуємо відповідні значення, враховуючи властивість симетрії базису, та доповнюємо матрицею знаків $Sk(n)$ касинуса. Матрицю знаків Sk одержують за умовою зміни аргументів функції касинус відносно $3\pi/4$, $7\pi/4$, визначаючи нерівності

$$Sk[k, n] = \begin{cases} +1, & 7N/4 < h_a(k, n) < 3N/4, \\ -1, & 3N/4 < h_a(k, n) < 7N/4, \\ 0, & h_a(k, n) = 3N/4, 7N/4. \end{cases} \quad (5.27)$$

У матриці елементів аргументів H_a^{II} можна визначити спрощені елементи $\underline{h}_{k,n}$, що можуть набувати значень від $\{1, \dots, N/4\}$ та $\{N/2, \dots, 3N/4\}$ з набору $0(1)2N$ на основі властивості симетричностей функції касинус:

- а) відносно осі $\pi/4$ на проміжку $(0, \pi/2)$;
- б) відносно осі π на проміжку $(0, 2\pi)$;
- в) відносно осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$;
- г) відносно осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$.

Отже, спрощені значення $\underline{h}_{k,n}$ елементів матриці \underline{H}_a^{II} визначають послідовним виконанням обчислень:

$$1) \quad h_{k,n} = (k(2n+1)) \bmod 2N; \quad (5.28)$$

$$2) \quad h_{k,n} = [(h_{k,n}) \bmod 2N] - N, \text{ якщо } [(h_{k,n}) \bmod 2N] > N; \quad (5.29)$$

3) відображення на основі часткової симетрії:

$$\underline{h}_{k,n} = \begin{cases} 3N/4 - \{[(h_{k,n}) \bmod 2N] - N\} - 3N/4, & [(h_{k,n}) \bmod 2N] - N > 3N/4, \\ N/4 - \{[(h_{k,n}) \bmod 2N] - N\} - N/4, & [N/4 < (h_{k,n}) \bmod 2N - N < N/2], \\ h_{k,n} . \end{cases} \quad (5.30)$$

Осі симетрії лежать на проміжку: $(0, 2\pi)$ вісь π ; на проміжку $(\pi/2, \pi)$ вісь $3\pi/4$; на проміжку $(0, \pi/2)$ вісь $\pi/4$. Наприклад, матриці аргументів \underline{H}_a^{II} та знаків S_k для ДПХ–II обсягом $N=8$ мають значення

$$\underline{H}_a^{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_k^{II} = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & - & - & - & - & + \\ + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 \\ + & - & + & + & - & + & - & - \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & + & - & - & + & - \\ 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ - & + & + & + & + & - & - & - \end{bmatrix} .$$

Отже, використовуючи поетапне спрощення базисної матриці аргументів на основі використання властивості періодичності і симетричності базисної функції ДПХ–II, проведемо виконання обчислення перетворення із застосуванням спрощеної матриці аргументів \underline{H}_a^{II} та доповнюючої матриці знаків S_k .

5.3.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-II на основі циклічних згорток

У процесі синтезу алгоритму обчислення на основі циклічних згорток структуру базисної матриці можна задати твірним масивом

$$P(n) = P_1(L_1)P_2(L_2) \dots P_k(L_k) = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L_1})(n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L_2}) \dots (n_{kL_1}, n_{kL_2}, \dots, n_{kL_k}), \quad (5.31)$$

де k – кількість підмасивів; загальний n – обсяг масиву, що рівний

$$n = (L_1 + L_2 + \dots + L_k) = N - 1, \quad (5.32)$$

де $n = (N - 1)$ набір значень аргументів базисної частини ДПХ-II без першого значення; n_{ij} – елемент підмасиву; L_i – кількість елементів у підмасиві $P_i(n_i)$, що i задає обсяг циклічних структур.

Залежно від значення обсягу перетворення, враховуючи симетричність функції *cas* (рис. 2.1), відносно

- осі $\pi/4$ на проміжку $(0, \pi/2)$; осі π на проміжку $(0, 2\pi)$;
- осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$;
- осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$,

у матриці елементів аргументів H_a^H можна визначити елементи $h(k, n)$, що можуть набувати значень від $\{1, \dots, N/4\}$ та $\{N/2, \dots, N\}$ з набору $0(1)N$, доповнюючи значеннями $+1, -1$, матриці знаків S_k касинуса.

Вісь симетрії базисної функції, що може набувати значень $\Omega[\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4]$ визначається за формулою

$$\Omega = k(2n + 1)\varphi, \quad (5.33)$$

де $\varphi = \pi/N$; $k \cdot (2n + 1)$ цілочисельне значення, менше або рівне $(N - 1)$.

Для *непарних* значень обсягу перетворення $N = p, (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots)$ твірний масив формується на проміжку $2N$, що відповідає базису ДПХ-II. Тобто, існує одне зі значень елементів у твірному масиві, що дорівнює N , що відповідає

аргументу π , яке є однією з перелічених осей симетрії. Це визначає відповідну рівність абсолютних значень функції касинуса на проміжках $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$, а саме для аргументів

$$i=N + i, \text{ для } i=0,1,\dots, N-1. \quad (5.34)$$

Тому структура матриць H''_N , сформованих за спрощеним твірним масивом $P'(n)$, міститиме спрощені елементи аргументів $h_{k,n}$ з діапазону $(0, \dots, N-1)$, що доповнений відповідною матрицею знаків Sk (для зручності позначення знаків використовуватимемо “+” замість +1, “-” замість -1).

Приклади твірних масивів для непарних значень ДПХ-II обсягу перетворення:

$$N=7$$

$$P(13)=(1, 3, 9, 13, 11, 5) (2, 6, 4, 12, 8, 10)(7);$$

$$P'(13)=(1, 3, 2, 6, 4, 5) (2, 6, 4, 5, 1, 3)(0),$$

$$Sk(13)=(+, +, -, +, -, +) (+, -, +, -, -, -)(-);$$

$$N=9$$

$$P(17)=(1, 5, 7, 17, 13, 11)(2, 10, 14, 16, 8, 4)(3, 15)(6, 12)(9);$$

$$P'(17)=(1, 5, 7, 8, 4, 2)(2, 1, 5, 7, 8, 4)(3, 6)(6, 3)(0),$$

$$Sk(17)=(+, +, -, +, -, -)(+, -, -, +, -, +)(+, -)(+, -)(-);$$

$$P(17)=(1, 7, 13)(2, 14, 8)(3)(4, 10, 16)(5, 17, 11)(6)(9)(12)(15);$$

$$P(17)=(1, 7, 4)(2, 5, 8)(3)(4, 1, 7)(5, 8, 2)(6)(0)(3)(6),$$

$$Sk(17)=(+, -, -)(+, -, -)(+)(+, -, +)(+, +, -)(+)(-)(-)(-);$$

$$N=11$$

$$P(21)=(1, 3, 9, 5, 15)(2, 6, 18, 10, 8)(4, 12, 14, 20, 16)(7, 21, 19, 13, 17)(11);$$

$$P'(21)=(1, 3, 9, 5, 4)(2, 6, 7, 10, 8)(4, 1, 3, 9, 5)(7, 10, 8, 2, 6)(0),$$

$$Sk(21)=(+, +, -, +, -)(+, +, -, -, +)(+, -, -, +, -)(+, +, -, -, -)(-);$$

$$P(21)=(1, 7, 5, 13, 3, 21, 15, 17, 9, 19)(2, 14, 10, 4, 6, 20, 8, 12, 18, 16)(11);$$

$$P'(21)=(1, 7, 5, 2, 3, 10, 4, 6, 9, 8)(2, 3, 10, 4, 6, 9, 8, 1, 7, 5)(0),$$

$$Sk(21)=(+, +, +, -, +, +, -, -, -, -)(+, -, -, +, +, +, +, -, -, -)(-);$$

Для парних значень обсягу перетворення $N=2p$, ($N=6,10,14,18,\dots$) існує одне зі значень елементів матриці базису ДПХ-II рівне N , що відповідає аргументу π . Тобто, $k(2n+1)\pi/N=\pi$, де відповідно $k(2n+1)=N$. Це визначає відповідну рівність абсолютних значень функції касинуса на проміжках $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$. Крім того, на проміжку $(0, \pi)$ маємо локальні осі симетрії $\pi/4, 3\pi/4$.

Тому відповідні значення елементів матриці $H''_{a,p}$ можуть дорівнювати одному зі значень $(1, \dots, N-1)$, що замінені за формулою (5.29) та доповнені

відповідною (5.30) матрицею знаків Sk (асиметричне об'єднання). У результаті одне менше цілочисельне значення у $P'(n)$ з твірного масиву $P(n)$ присвоюється на зміну відповідним більшим значенням з проміжків симетрії $(0, \pi/4)$ та $(\pi/2, 3\pi/4)$.

Приклади твірних масивів для парних $N=2p$ значень ДПХ-II обсягу перетворення:

$$N=10$$

$$P(19)=(1, 3, 9, 7)(2, 6, 18, 14)(4, 12, 16, 8)(5, 15)(10)(11, 13, 19, 17);$$

$$P'(19)=(1, 2, 6, 7)(2, 6, 7, 1)(1, 2, 6, 7)(0, 0)(0)(1, 2, 6, 7),$$

$$Sk(19)=(+, +, -, +)(+, +, +, -)(+, -, +, -)(+, -)(-)(-, -, +, +);$$

$$N=14$$

$$P(27)=(1, 3, 9, 27, 25, 19)(2, 6, 18, 26, 22, 10)(4, 12, 8, 24, 16, 20)(5, 15, 17, 23, 13, 11)(7, 21)(14)$$

$$P(27)'=(1, 3, 9, 8, 10, 2)(2, 1, 3, 9, 8, 10)(3, 9, 8, 10, 2, 1)(2, 1, 3, 9, 8, 10)(0, 0)(0),$$

$$Sk(27)=(+, +, -, +, +, -)(+, +, -, -, +, -)(+, -, -, +, -, -)(+, -, -, +, -, -)(+, -)(-);$$

$$P(27)=(1, 5, 25, 13, 9, 17)(2, 10, 22, 26, 18, 6)(3, 15, 19, 11, 27, 23)(4, 20, 16, 24, 8, 12)(7)(14)(21);$$

$$P(27)'=(1, 2, 10, 8, 9, 3)(2, 10, 8, 9, 3, 1)(3, 1, 2, 10, 8, 9)(3, 1, 2, 10, 8, 9)(0)(0)(0),$$

$$Sk(27)=(+, +, +, -, -, -)(+, -, +, +, -, +)(+, -, -, -, +, +)(+, -, -, +, -, -)(+)(-)(-);$$

$$N=18$$

$$P(35)=(1, 5, 25, 17, 13, 29)(2, 10, 14, 34, 26, 22)(3, 15)(4, 20, 28, 32, 16, 8)(6, 30)(7, 35, 31, 11, 19, 23)(9)(12, 24)(18)(21, 33)(27);$$

$$P(35)=(1, 4, 2, 10, 13, 11)(2, 10, 13, 11, 1, 4)(3, 12)(4, 2, 10, 13, 11, 1)(3, 12)(2, 10, 13, 11, 1, 4)(0)(12, 3)(0)(3, 12)(0);$$

$$Sk(35)=(+, +, -, -, +, -)(+, +, -, +, -, -)(+, -)(+, -, -, +, -, +)(+, -)(+, +, -, +, -, -)(1)(+, -)(-1)(-, +)(-1);$$

$$P(35)=(1, 7, 13, 19, 25, 31)(2, 14, 26)(3, 21)(4, 28, 16)(5, 35, 29, 23, 17, 11)(6, 8, 20, 32)(9, 27)(10, 34, 22)(12)(15, 33)(18)(24)(30);$$

$$P(35)=(1, 2, 13, 1, 2, 13)(2, 13, 8)(3, 3)(4, 10, 11)(4, 10, 11, 5, 10, 11)(3, 1, 2, 13)(0, 0)(10, 11, 4)(12)(12, 12)(0)(3)(13),$$

$$Sk(35)=(+, +, +, -, -, -)(+, -, -)(+, -)(+, -, -)(+, +, -, -, +)(+, +, -, +)(1, -1)(+, +, -)(+)(-, +)(-1)(-)(-).$$

Для парних значень обсягу перетворення: $N=4p$, ($N=12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, \dots$), $N=8^*p$, ($N=24, 40, 48, 56, 72, 80, 88, 96, 104, \dots$) та $N=2^n$ ($N=4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots$) існує значення матриці базису ДПХ-II, що відповідає аргументу π , тобто рівне N . Це визначає симетричну відповідність абсолютних значень функції косинуса на проміжках $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$. Вісь π відповідатиме цілочисельному значенню аргументу, що дорівнює $k^*(2n+1)=N$. Для даних обсягів існують значення аргументів, що дорівнюють $\pi/2, 3\pi/2$, та відповідають

цілочисельним значенням $k*(2n+1)=N/2$, $k*(2n+1)=3N/2$, однак ці значення відповідно функції $\cos(kn\varphi)$ набувають значення $+1, -1$, але не є осями симетрії.

Також для цих значень обсягу перетворення існують значення матриці базису ДПХ-II, що дорівнюють $N/4, N/2, 3N/4$, та відповідають відповідним касинусним аргументам $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ та значенням функції $+1, -1, -1$. Крім цього, додатково матимемо значення елементів $N/4, 3N/4, 5N/4, 7N/4$, що відповідають аргументам $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ та значенням $\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, 0$, відповідно.

Тому для цих обсягів маємо осі симетрії $\Omega[\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4]$, що відповідають цілочисельним значенням аргументів $[N/4, 3N/4, N, 5N/4, 7N/4]$. Завдяки симетричному відображенню відповідні значення елементів матриці H_a^H спрощуються. Матриця H_a^H містить значення елементів, що відповідають аргументам, розміщеним на проміжках $(0, \pi/4), (\pi/2, 3\pi/4)$ із доповненням відповідними значеннями матриці знаків Sk . У результаті одне менше цілочисельне значення у $P'(n)$ з твірного масиву $P(n)$ присвоюється на зміну відповідним більшим значенням з проміжків симетрії $(0, \pi/4)$ та $(\pi/2, 3\pi/4)$.

Приклади твірних масивів ДПХ-II для $N=4r$ обсягів перетворення:

$N=8,$

$P(15)= (1,3,9,11)(2,6)(4,12)(5,15,13,7)(8)(10,14);$

$P'(15)= (1,1,1,1)(2,6)(0,0)(5,5,5,5)(0)(2,6),$

$Sk(15)= (+,+,-,-)(+,0)(+,+)(+,+,-,-)(-)(-,0);$

$N=16,$

$P(31)=(1,3,9,27,17,19,25,11)(2,6,18,22)(4,12)(5,15,13,7,21,31,29,23)(8,24)(10,30,26,14)(16)(20,28);$

$P'(31)=(1,3,9,11,1,3,9,11)(2,6,2,6)(4,12)(5,9,11,7,5,15,13,7)(0,0)(10,10,10,10)(0)(4,12),$

$Sk(31)= (+,+,+,-,-,-,+)(+,+,-,-)(+,0)(+,-,-,+,-,-,+)(+1,-1)(+,+,-,-)(-1)(-,0);$

$N=20,$

$P(39)=(1,3,9,27)(2,6,18,14)(4,12,36,28)(5,15)(7,21,23,29)(8,24,32,16)(10,30)(11,33,19,17,13,39,37,31)(20)(22,26,38,34)(25,35);$

$P'(39)=(1,3,1,3)(2,4,12,14)(4,12,14,2)(5,15)(3,1,3,1)(2,4,12,14)(0,0)(11,13,11,13,13,11,13,11)(0)(2,4,12,14)(5,15),$

$$Sk(39)=(+,+,+,-)(+,+,-,+)(+,+,+,-)(+,+)(+,-,-,-)(+,-,-,-)(+,-)(+,-,-,-,+,+,+,-)(-)(-,-,+,+,-)(-,+).$$

На основі сформованих твірних масивів подальшим кроком у синтезі алгоритму є аналіз структури базисної матриці, тобто визначення ідентичних циклічних підматриць.

Розглянемо конкретний приклад узагальненої схеми визначення ідентичних циклічних підматриць необхідних для обчислення ДПХ-II обсягу $N=18$. Один з твірних масивів ДПХ-II, $N=18$ має вигляд:

$$P(18)=(1,5,25,17,13,29)(19,23,7,35,31,11)(3,15)(21,33)(9)(27)(2,10,14,34,26,22)(4,20,28,32,16,8)(6,12).$$

Враховуючи особливість аргументів n, k базисної функції $cas((2n+1)k \pi/N)$, твірний масив $Pc(n)$ за стовпцями вдвічі менший за твірний масив за рядками, бо складається із непарних значень $(2n+1)$ аргументів на інтервалі одного періоду

$$Pc(18)=(1,5,25,17,13,29)(19,23,7,35,31,11)(3,15)(21,33)(9)(27),$$

$$Pc'(18)=(1,5,7,17,13,11)(1,5,7,17,13,11)(3,15)(3,15)(9)(9),$$

$$Sk(18)=(+,+,-,-,+,-)(-,-,+,+,-,+)(+,-)(-,+)(+)(-).$$

Твірний масив $P(n)$ за рядками містить непарні і парні значення $k=1(1)2N-1$ аргументів на інтервалі одного періоду за винятком $k=0$, тобто без обчислення $X[0]$,

$$Pr(18)=(1,5,25,17,13,29)(19,23,7,35,31,11)(3,15)(21,33)(9)(27)(2,10,14,34,26,22)(4,20,28,32,16,8)(6,12).$$

Враховуючи асиметричність вихідних значень (однакові, але з протилежним знаком): $X(25) - X(7)$, $X(29) - X(11)$, $X(22) - X(4)$, $X(26) - X(8)$, $X(34) - X(16)$, для організації обчислень на основі циклічних згорток використовують твірний масив $Pr(n)$ за рядками:

$$Pr(18)=(1,5,25,17,13,29)(3,15)(9)(2,10,14,34,26,22)(6,12).$$

Твірний масив за стовпцями складається з підмасивів:

$$Pc(18)=(1,5,25,17,13,29)(19,23,7,35,31,11)(3,15)(21,33)(9)(27).$$

Визначення основних параметрів твірного масиву:

$k = 6$ – кількість підмасивів у твірному масиві;

$L_1=6, L_2=6, L_3=2, L_4=2, L_5=1, L_6=1$ – кількість елементів у підмасивах $P(n_i)$ задають обсяг циклічних згорток.

Вхідні значення перетворення переставляються відповідно до значень твірного масиву $P_c(18)$ за стовпцями:

$[x(0), x(2), x(12), x(8), x(6), x(14), x(9), x(11), x(3), x(17), x(15), x(5), x(1), x(7), x(4), x(13)]$.

Визначаються та групуються коефіцієнти функції $cas(n_i\varphi)$ для касинусних складових базису ДПХ-II з $\varphi=\pi/18$, що беруть участь у операціях згортки для аргументів: $(1\varphi, 5\varphi, 7\varphi, 17\varphi, 13\varphi, 11\varphi), (3\varphi, 15\varphi) (9\varphi=\pi/2)$.

Для визначення ідентичних циклічних підматриць у структурі базису використовуємо табличні координати перших елементів підматриць, які визначаються за $(i+L_i, j+L_i)$, де L_i вибирається за приналежністю до твірного підмасиву значень перших елементів підматриць у матричній структурі. Відповідність координат (i, j) елементам твірного масиву $P_c(n_i)$ та $P_k(n_j)$ за стовпцями:

(i, j) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
(1,5,25,17,13,29) (19,23,7,35,31,11) (3,15) (21,33)(9)(27),
(1,5,25,17,13,29) (3,15) (9) (2,10,14,34,26,22) (6,12) .

Далі отримане значення перших елементів підматриць спрощується за властивістю симетрії, що відповідають симетрії на проміжку $(0, 2\pi)$ функції. У табл. 5.5 узагальнено базисну матрицю аргументів розмірністю (18×17) .

Таблиця 5.5 – Узагальнена структура базисної матриці ДПХ-II обсягу $N=18$

| $(i+L_i, j+L_i) - n_{ij}$ (координати рядок/стовпець) – знак і значення першого елемента підматриць | | | | |
|---|--------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| $(1,1) - +1; (1)$ | $(1,7) - -1; (19)$ | $(1,13) - +3; (3)$ | $(1,15) - -3; (21)$ | $(1, 17) - +9; (9)$ |
| $(7,1) - +3; (3)$ | $(7,7) - -3; (21)$ | $(7,13) - +3; (9)$ | $(7,15) - -9; (27)$ | $(7,17) - -9; (27)$ |
| $(9,1) - +9; (9)$ | | $(9,13) - -9; (27)$ | | $(9,17) - +9; (9)$ |
| $(10,1) - +2; (4)$ | $(10,7) - +2; (4)$ | $(10,13) - +6; (6)$ | $(10,15) - +6; (6)$ | $(10, 17) - -0; (18)$ |
| $(16,1) - +6; (6)$ | | | | $(16,17) - -0; (18)$ |
| | | | | $(17,17) - +0; (0)$ |

Спрощена матриця аргументів $H''_{a p}$, яка стисло подається твірним масивом і відповідає табл. 5.5 матиме розширений вигляд за табл.5.6.

Таблиця 5.6 – Матриця спрощених аргументів $H''_{a p}$ для ДПХ-II обсягу N=18

| | 1: | 5: | 25: | 17: | 13: | 29: | 19: | 23: | 7: | 35: | 31: | 11: | 3: | 15: | 21: | 33: | 9: | 27 |
|------------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|----------|
| 1: | 1 | 5 | 7 | 17 | 13 | 11 | 1 | 5 | 7 | 17 | 13 | 11 | 3 | 15 | 3 | 15 | 9 | 9 |
| 5: | 5 | 7 | 17 | 13 | 11 | 1 | 5 | 7 | 17 | 13 | 11 | 1 | 15 | 3 | 15 | 3 | 9 | 9 |
| 25: | 7 | 17 | 13 | 11 | 1 | 5 | 7 | 17 | 13 | 11 | 1 | 5 | 3 | 15 | 3 | 15 | 9 | 9 |
| 17: | 17 | 13 | 11 | 1 | 5 | 7 | 17 | 13 | 11 | 1 | 5 | 7 | 15 | 3 | 15 | 3 | 9 | 9 |
| 13: | 13 | 11 | 1 | 5 | 7 | 17 | 15 | 13 | 1 | 5 | 7 | 17 | 3 | 15 | 3 | 15 | 9 | 9 |
| 29: | 11 | 1 | 5 | 7 | 17 | 1 | 13 | 1 | 5 | 7 | 17 | 15 | 15 | 3 | 15 | 3 | 9 | 9 |
| 3: | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 15: | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 9: | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 2: | 2 | 10 | 14 | 16 | 8 | 4 | 2 | 10 | 14 | 16 | 8 | 4 | 6 | 12 | 6 | 12 | 18 | 18 |
| 10: | 10 | 14 | 16 | 8 | 4 | 2 | 10 | 14 | 16 | 8 | 4 | 2 | 12 | 6 | 12 | 6 | 18 | 18 |
| 14: | 14 | 16 | 8 | 4 | 2 | 10 | 14 | 16 | 8 | 4 | 2 | 10 | 6 | 12 | 6 | 12 | 18 | 18 |
| 34: | 16 | 8 | 4 | 2 | 10 | 14 | 16 | 8 | 4 | 2 | 10 | 14 | 12 | 6 | 12 | 6 | 18 | 18 |
| 26: | 8 | 4 | 2 | 10 | 14 | 16 | 8 | 4 | 2 | 10 | 14 | 16 | 6 | 12 | 6 | 12 | 18 | 18 |
| 22 | 4 | 2 | 10 | 14 | 16 | 8 | 4 | 2 | 10 | 14 | 16 | 8 | 12 | 6 | 12 | 6 | 18 | 18 |
| 6: | 6 | 12 | 6 | 12 | 6 | 12 | 6 | 12 | 6 | 12 | 6 | 12 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 12: | 12 | 6 | 12 | 8 | 12 | 6 | 14 | 14 | 12 | 6 | 12 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Усю матрицю не обчислюють, за винятком перших елементів підматриць для табл. 5.5, що дає змогу значно ефективніше аналізувати її структуру.

Для підматриць, що містять горизонтально однакові значення аргументів, проводяться об'єднання вхідних даних. Визначають ідентичні циклічні підматриці у процесі аналізу за табл. 5.5 значень за координатами перших елементів однакових підматриць горизонтально. Для першої горизонталі підматриць об'єднують вхідні дані для 6 та 2- точкових згорток, відповідно

$$(1,1) - +1; (1) \text{ та } (1,7) - -1;(19); (1,13) - +3;(3) \text{ та } (1,15) - -3;(21)$$

і далі для кожної наступної горизонталі підматриць. Виконання поелементних додавань вхідних значень будуть використовуватись для обчислення циклічних згорток.

У випадку визначення ідентичних циклічних підматриць під час аналізу вертикально для них виконується одне обчислення циклічних згорток, яке використовуватиметься для всіх підматриць. Це зменшує кількість циклічних згорток, які необхідно буде виконати. Об'єднують результати згорток горизонтально на основі відповідних табличних координат (табл. 5.5), прив'язуючись до перших елементів підматриць.

На завершальному етапі на основі одержаної матричної структури, об'єднуємо одержані значення циклічних згорток, визначаючи вихідні значення дійсних дискретних коефіцієнтів ДПХ-II. Обчислені вихідні значення перетворення без $X(0)$ відповідають порядку відповідно до значень твірного масиву за рядками:

$$X(1), X(5), -X(7), X(17), X(13), -X(11), X(3), X(15),$$

$$X(9), X(2), X(10), X(14), -X(16), -X(8), -X(4), X(6), X(12).$$

До *особливостей* синтезу та обчислення ДПХ-II належать:

- розмірність матриці ($N \times 2N$), яка складається з непарних значень $(2n+1)$ аргументів у стовпцях;
- послідовність вхідних значень $[x]$, яка формується у порядку відповідно до значень твірного масиву;
- для *непарних* значень обсягу перетворення π одна вісь симетрії, а для N парних $2p$ та кратних чотирьом маємо такі осі симетрії $\Omega[\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4]$;
- обчислені вихідні значення без $X(0)$;
- асиметричність значень деяких вихідних значень (однакові, але із протилежним знаком обчислення на основі циклічних згорток за алгоритмом);
- можлива кількість варіантів твірних масивів більше одного для конкретного обсягу.

5.4 Синтез алгоритму обчислення ДПХ-III на основі циклічних згорток

5.4.1 Аналіз базисної матриці виду ДПХ-III

Відповідно до узагальненого подання ДПХ (5.3) для зміщення $k_0=1/2$, $n_0=0$, пряме та зворотне одновимірне ДПХ-III визначається співвідношеннями:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \text{cas} [(2k+1)n\pi/N], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.35)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \text{cas} [(2k+1)n\pi/N], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.36)$$

Подання ДПХ-III у матричній формі відповідно буде

$$X = H_N^{\text{III}} x, \quad (5.37)$$

де матриці H_N^{III} мають розмір $(N) \times (N)$ з індексами для рядків $k = 0, \dots, N-1$ та індексами для стовпців $n=0, \dots, N-1$; матриці-стовпці вихідних $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$.

Відповідно $h'_{k,n}$ k -та компонента ДПХ-III для кожного n -го базисного вектора матиме вигляд

$$h'_{k,n} = \text{cas} ((2k+1)n\pi/N). \quad (5.38)$$

Проаналізуємо структуру матриці базису ДПХ-III за аргументами компонентів $h_{k,n}$ ($k, n=0, 1, \dots, N$) базисного перетворення

$$(2k+1)n\pi/N = h_{k,n} \Delta\varphi, \quad (5.39)$$

де $\Delta\varphi = \pi/N$; N – ціле значення обсягу ДПХ-III.

Детально проаналізуємо аргументи $h_{k,n}=n(2k+1)$ базису ДПХ-III ($k, n=0, 1, \dots, N-1$), що є елементами базисної матриці з (5.37). Функція $\text{cas}[n(2k+1)\pi/(N)]$ – періодична відносно $2N$, тому можна записати на основі базису матрицю аргументів касинусу порядку $(N \times N)$ у вигляді:

$$H_a^{\text{III}}(k, n) = [(n(2k+1) \bmod (2N))], \quad (5.40)$$

позначимо значення аргументів $h_a(k, n) = (n(2k+1) \bmod (2N))$ для $n, k=0, 1, 2, \dots, N-1$.

Враховуючи симетрію базису ДПХ-III з елементів $h_a(k, n)$ одержаної за (5.40) матриці H_a^{III} , вибираємо і спрощуємо відповідні значення. Одержану

спрощену матрицю \underline{H}_a^{III} доповнюємо матрицею знаків $Sk(k,n)$ функції касинуса. Матрицю знаків Sk одержують за нерівностями

$$Sk[k,n] = \begin{cases} +1, & 7N/4 < h_a(k,n) < 3N/4, \\ -1, & 3N/4 < h_a(k,n) < 7N/4, \\ 0, & h_a(k,n) = 3N/4, 7N/4. \end{cases} \quad (5.41)$$

У матриці елементів аргументів H_a^{III} (5.40) можна визначити елементи $h_a(k,n)$, що можуть набувати залежно від обсягу перетворення значення від $\{1, \dots, N/4\}$ та $\{N/2, \dots, 3N/4\}$ з набору $0(1)2N$ на основі властивості симетричностей функції касинус:

- а) відносно осі $\pi/4$ на проміжку $(0, \pi/2)$;
- б) відносно осі π на проміжку $(0, 2\pi)$;
- в) відносно осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$;
- г) відносно осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$.

Спрощені значення \underline{H}_a^{III} визначаються послідовним виконанням обчислень

$$1) \quad h_{k,n} = (n(2k+1)) \bmod 2N; \quad (5.42)$$

$$2) \quad h_{k,n} = [(h_{k,n}) \bmod 2N] - N, \text{ якщо } [(h_{k,n}) \bmod 2N] > N; \quad (5.43)$$

3) відображення на основі часткової симетрії:

$$\underline{h}_{k,n} = \begin{cases} 3N/4 - \{[(h_{k,n}) \bmod 2N] - N\} - 3N/4, & [(h_{k,n}) \bmod 2N] - N > 3N/4, \\ N/4 - \{[(h_{k,n}) \bmod 2N] - N\} - N/4, & [N/4 < (h_{k,n}) \bmod 2N - N < N/2], \\ h_{k,n}. \end{cases} \quad (5.44)$$

Осі симетрії лежать на проміжку: $(0, 2\pi)$ вісь π ; на проміжку $(\pi/2, \pi)$ вісь $3\pi/4$; на проміжку $(0, \pi/2)$ вісь $\pi/4$.

Наприклад, матриці \underline{H}_a^{III} , Sk для ДПХ–III для $N=8$ мають значення

$$\underline{H}_a^{III} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & 0 & 9 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 5 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 2 & 9 & 0 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & 9 & 6 & 1 & 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 6 & 5 & 0 & 9 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \quad S_k^{III} = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & 0 & - \\ + & + & 0 & - & - & + & + & + \\ + & + & - & + & + & - & 0 & + \\ + & - & 0 & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & 0 & + \\ + & - & 0 & + & - & - & + & - \\ + & - & - & - & + & + & 0 & - \\ + & + & 0 & - & - & - & - & - \end{bmatrix}.$$

Отже, аналіз та поетапне спрощення базисної матриці аргументів на основі використання властивості періодичності і симетричності базисної функції ДПХ-III приводить до того, що за допомогою спрощеної матриці H_a^{III} аргументів та доповнюючої матриці знаків Sk можна виконати обчислення перетворення.

5.4.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-III на основі циклічних згорток

У результаті узагальненої методології синтезу алгоритму на основі циклічних згорток базисну матрицю ДПХ-III задаємо твірним масивом

$$P(n) = P_1(L_1)P_2(L_2)\dots P_k(L_k) = \\ = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L_1}) (n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L_2}) \dots (n_{kL_1}, n_{kL_2}, \dots, n_{kL_k}), \quad (5.45)$$

де k – кількість підмасивів, n – загальний обсяг твірного масиву, що дорівнює

$$n = (L_1 + L_2 + \dots + L_k) = N - 1, \quad (5.46)$$

де $n=(N-1)$ набір значень аргументів базисної частини ДПХ-III без першого значення; n_{ij} – елемент підмасиву; L_i – кількість елементів у підмасиві $P_i(n_i)$, що і задає обсяг циклічних структур.

Залежно від значення обсягу перетворення, враховуючи симетричність функції касинус (рис. 2.1) відносно осі $\pi/4$ на проміжку $(0, \pi/2)$; осі π на проміжку $(0, 2\pi)$; осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$; осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$ у матриці елементів аргументів H_a^{III} (5.42) можна визначити елементи $h(k,n)$, що можуть набувати значень від $[1, \dots, \{N/4\}]$ та $[\{N/2\}, \dots, \{N\}]$ з набору $0(1)N$, доповнюючи значеннями $+1, -1$, матриці знаків Sk касинуса.

Аналогічно ДПХ-II, вісь симетрії, що може набувати значень $\Omega[\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4]$, для функції касинус ДПХ-III визначається за формулою

$$\Omega = n^*(2k+1) \varphi, \quad (5.47)$$

де $\varphi = \pi/N$; $n^*(2k+1)$ – цілочисельне значення менше або рівне $(N-1)$.

Для непарних значень обсягу перетворення $N=p$, (3,5,7,9,11,13,15,17,...) твірний масив формується на проміжку $2N$, що відповідає базису ДПХ-III. Тобто, існує одне зі значень елементів у твірному масиві рівне N , що відповідає аргументу π , яке є однією з перелічених осей симетрії. Це визначає відповідну рівність абсолютних значень функції косинуса на проміжках $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$, а саме

$$i=N+i, \text{ для } i=0,1,\dots, N-1. \quad (5.48)$$

Тому структура матриць H_N^{III} , сформованих за твірним масивом $P'(n)$, міститиме спрощені елементи аргументів з діапазону $(0,\dots,N-1)$ та доповнюється відповідною матрицею знаків Sk .

Приклад твірних масивів $P(n)$, $P'(n)$ для обсягу перетворення $N=11$,

$$P(21) = (1,7,5,13,3,21,15,17,9,19)(12,18,16,2,14,10,4,6,20,8)(11),$$

$$P'(21) = (1,7,5,2,3,10,4,6,9,8)(1,7,5,2,3,10,4,6,9,8)(0),$$

$$Sk(21) = (+,+,+,-,+,+,-,-,-) (-,-,-,+, -, -, +, +, +, +)(-1).$$

Для парних значень обсягу перетворення існує одне зі значень елементів матриці базису ДПХ-III рівне N , що відповідає аргументу π . Тобто, $n(2k+1)\pi/N=\pi$, де відповідно $n(2k+1)=N$. Це визначає відповідну рівність абсолютних значень функції косинуса на проміжках $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$. Вісь π відповідатиме цілочисельному значенню аргументу, що дорівнює $n(2k+1)=N$. Тому відповідні значення елементів матриці H_a^{III} можуть дорівнювати одному зі значень $[1,\dots,N/2-1]$, тобто замінені за формулою (5.43) та доповненими відповідною матрицею знаків Sk .

Для цих обсягів існують значення аргументів, що дорівнюють $\pi/2$, $3\pi/2$ та відповідають цілочисельним значенням $n(2k+1)=N/2$, $n(2k+1)=3N/2$. Дані значення відповідно функції \cos набувають значення $+1, -1$, але не є осями симетрії.

Наприклад, для обсягу перетворення $N=14$ твірний масив формується на проміжку $2N=28$, що відповідає базису ДПХ-III. Відповідно, матимемо цілочисельні значення елементів $N=14$, $N/2=7$, $3N/2=21$, що відповідають аргументам π , $\pi/2$, $3\pi/2$ та значенням $-1, +1, -1$, а саме

$$P(27)=(1,3,9,27,25,19)(2,6,18,26,22,10)(4,12,8,24,16,20)(5,15,17,23,13,11)(7,21)(14)$$

$$P'(27)=(1,3,9,8,10,2)(2,1,3,9,8,10)(3,9,8,10,2,1)(2,1,3,9,8,10)(0,0)(0),$$

$$Sk(27)=(+, +, -, +, +, -)(+, +, -, -, +, -)(+, -, -, +, -, -)(+, -, -, +, -, -)(+, -)(-)$$

інший твірний масив

$$P(27)=(1,5,25,13,9,17)(2,10,22,26,18,6)(3,15,19,11,27,23)$$

$$(4,20,16,24,8,12)(7)(14) (21);$$

$$P'(27)=(1,2,10,8,9,3)(2,10,8,9,3,1)(3,1,2,10,8,9)(3,1,2,10,8,9)(0)(0)(0),$$

$$Sk(27)=(+, +, +, -, -, -)(+, -, +, +, -, +)(+, -, -, -, +, +)(+, -, -, +, -, -)(+)(-)(-).$$

Важливо зауважити, що для цих двох видів твірних масивів маємо однакові спрощені підмасиви, але ці підмасиви мають різні знаки.

Для всієї решти парних значень обсягу перетворення N , кратного чотирьом ($N=8,12,16,20,24,28,32\dots$), існують значення матриці базису ДПХ-III рівні $N/4, 3N/4, N, 5N/4, 7N/4$, що відповідають аргументам $\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4$ та відповідно значенням $\sqrt{2}, 0, -1, -\sqrt{2}, 0$.

Для даних обсягів маємо осі симетрії $\Omega[\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4]$, що відповідають цілочисельним значенням аргументів $[N/4, 3N/4, N, 5N/4, 7N/4]$. Тому спрощена матриця \underline{H}^a містить значення елементів, що відповідають аргументам, розміщеним на проміжках $(0, \pi/4), (\pi/2, 3\pi/4)$, із доповненням відповідними значеннями матриці знаків Sk . Матрицю знаків Sk одержують на основі аргументів функції касинуса за нерівностями (5.41).

Для зручності позначення використовуватимемо “+” замість +1, “-” замість -1. Тобто, з твірного масиву $P(n)$ одне менше цілочисельне значення присвоюється у $P'(n)$, замінюючи відповідні більші значення аргументів з проміжків симетрії $(0, \pi/4)$ та $(\pi/2, 3\pi/4)$, використовуючи заміну за виразами:

1) $i=N+i$, на проміжку аргумента $(0, 2\pi)$ з віссю N для $i=1, \dots, N$;

2) $i=N/2-i=N+i=3N/2-i$, на проміжку аргументу $(0, \pi/4)$ з віссю $N/4$ для $i=1, \dots, N/4$;

3) $N/2+i=N-i=3N/2+i=2N-i$, на проміжку аргументу $(\pi/2, 3\pi/4)$ з віссю $3\pi/4$ для $i=1, \dots, N/4$.

Приклад одержаних твірних масивів для обсягу перетворення $N=8$:

$$P(8) = (1,3,9,11)(5,15,13,7)(2,6) (10,14) (4,12),$$

$$P'(8) = (1,1,1,1)(5,5,5,5)(2,6) (2,6) (0,0),$$

$$Sk(8) = (+,+,-,-) (+,+,-,-) (+,0) (-,0) (+1,-1).$$

Спрощений твірний масив для даного обсягу перетворення визначається за властивістю симетричності базисної функції, що містить:

- вісь π , що відповідає цілочисельному значенню аргументу $n(2k+1)=N=8$;
- вісь $\pi/4=n(2k+1)\pi/N$, що відповідає цілочисельному значенню аргументу $n(2k+1)=N/4=2$;
- вісь $3\pi/4=n(2k+1)\pi/N$, що відповідає цілочисельному значенню аргументу $n(2k+1)=3N/4=3*8/4=6$.

У результаті заміна відповідних більших значень з твірного масиву $P(n)$ меншими цілочисельними значеннями у $P'(n)$ спрощуватиме подальше обчислення.

На основі сформованих твірних масивів у процесі синтезу алгоритму аналізують структуру базисної матриці, тобто визначають ідентичні циклічні підматриці. Для цього розглянемо приклад узагальненої схеми визначення ідентичних циклічних підматриць, необхідних для обчислення ДПХ-III обсягу $N=11$ із твірним масивом $P(n)=P_1(5)P_2(5)P_3(5) P_4(5)$.

Враховуючи особливість базисної функції $\cos((2k+1)n \pi/N)$, твірний масив $P(n)$ за стовпцями вдвічі більший за твірний масив за рядками, бо складається із парних та непарних значень ($n=1(1)21$) аргументів на інтервалі одного періоду без врахування $x(0)$, $x(11)$. Твірний масив за стовпцями дорівнює

$$P_c(21) = (1,3,9,5,15) (13,17,7,21,19) (2,6,18,10,8) (12,14,20,16,4),$$

$$P_c'(21) = (1,3,9,5,4) (2,6,7,10,8) (2,6,7,10,8) (1,3,9,5,4),$$

$$Sk(21) = (+,+,-,+,-) (-,-,+,+,-) (+,+,-,-,+) (-,-,+,+,-)(-1).$$

Твірний масив $P(n) = P_1(5) P_2(5) P_3(5) P_4(5)$ за стовпцями містить непарні і парні значення $n=1(1)2N-1$ аргументів відповідно до періоду базису. Твірний масив за рядками складається з підмасивів $P(n)=P_1(5)P_2(5)$, що відповідають N вихідним значенням:

$$Pr(10) = (1,3,9,5,15) (13,17,7,21,19),$$

$$\begin{aligned} Pr'(10) &= (1,3,9,5,4) (2,6,7,10,8), \\ Sk(10) &= (+,+,-,+,-) (-,-,+,+,-). \end{aligned}$$

Основними параметрами $P(n)$ є $k=4$ – кількість підмасивів у твірному масиві та $L_1=5, L_2=5, L_3=5, L_4=5$ – кількість елементів у підмасивах $P(n_i)$, що задають обсяг циклічних згорток.

Вхідні значення перетворення відповідають порядку відповідно до значень твірного масиву за стовпцями без врахування $x(0), -x(0)$, що приведе до збільшення вдвічі $2X[i]$ вихідних значень за цим алгоритмом:

$$x(1), x(3), x(9), x(5), -x(4), -x(2), -x(6), x(7), -x(10), -x(8), x(2), x(6), -x(7), x(10), x(8), -x(1), -x(3), -x(9), -x(5), x(4).$$

Визначаються та грукуються коефіцієнти функції $cas(n_i\varphi)$ за спрощеним твірним масивом $P'(21)$ для касинусних складових базису ДПХ-III з $\varphi=\pi/11$, що беруть участь у операціях згортки для аргументів: $(1\varphi, 3\varphi, 9\varphi, 5\varphi, 4\varphi), (2\varphi, 6\varphi, 7\varphi, 10\varphi, 8\varphi)$.

Для визначення ідентичних циклічних підматриць у структурі базису використовуємо таблицю з координатами (i, j) . Табличні координати перших елементів підматриць визначаються за $(i+L_i), (j+L_i)$, де L_i – вибирається за приналежністю до твірного підмасиву значень перших елементів підматриць у матричній структурі, які обчислюються за відповідністю координат (i, j) елементам $P(n)$ твірного масиву $(n_i \times n_j) \bmod 2N$.

Відповідність координат (i, j) елементам твірного масиву $P(n_i)$ за стовпцями:

$$\begin{array}{l} (i, j) \quad 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \quad 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \\ \quad \quad (1,3,9,5,15) (13,17,7,21,19)(11) (2, 6, 18, 10, 8) (12,14,20,16,4) . \end{array}$$

Визначені значення перших елементів підматриць спрощуються за властивістю симетрії, що відповідають симетрії до осі π на проміжку $(0, 2\pi)$ функції касинуса (обсяг перетворення непарний). У табл. 5.7 узагальнено базисну матрицю аргументів розмірністю (20×11) без врахування рядків.

Таблиця 5.7 – Узагальнена структура базисної матриці аргументів ДПХ-III, N=11

| $(i+L_i, j+L_i) - n_{ij}$ (координати рядок/стовпець) – знак і значення першого елемента підматриць | | | |
|---|-----------------|-----------------|------------------|
| (1,1) – +1; (1) | (1,6) – -2;(13) | (1,11) – +2;(2) | (1,16) – -1;(12) |
| (6,1) – -11; (11) | | (6,11) – +0;(0) | |
| (7,1) – -2;(13) | (7,6) – -4;(15) | (7,11) – +4;(4) | (7,16) – +2;(2) |

Спрощена матриця аргументів $H''_{a,p}$, яка стисло подається твірним масивом і відповідає табл. 5.7, матиме значення, як у табл. 5.8.

Таблиця 5.8 – Спрощена матриця аргументів ДПХ-III обсягу N=11

| k^n | 1 | 3 | 9 | 5 | 15 | 13 | 17 | 7 | 21 | 19 | 2 | 6 | 18 | 10 | 8 | 12 | 14 | 20 | 16 | 4 |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | 2 | 6 | 7 | 10 | 8 | 2 | 6 | 7 | 10 | 8 | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 |
| 3 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 | 6 | 7 | 10 | 8 | 2 | 6 | 7 | 10 | 8 | 2 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 |
| 9 | 9 | 5 | 4 | 1 | 3 | 7 | 10 | 8 | 2 | 6 | 7 | 10 | 8 | 2 | 6 | 9 | 5 | 4 | 1 | 3 |
| 5 | 5 | 4 | 1 | 3 | 9 | 10 | 8 | 2 | 6 | 7 | 10 | 8 | 2 | 6 | 7 | 5 | 4 | 1 | 3 | 9 |
| 15 | 4 | 1 | 3 | 9 | 5 | 8 | 2 | 6 | 7 | 10 | 8 | 2 | 6 | 7 | 10 | 4 | 1 | 3 | 9 | 5 |
| 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 2 | 6 | 7 | 10 | 8 | 4 | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 | 3 | 9 | 5 | 2 | 6 | 7 | 10 | 8 |
| 17 | 6 | 7 | 10 | 8 | 2 | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | 6 | 7 | 10 | 8 | 2 |
| 7 | 7 | 10 | 8 | 2 | 6 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 | 7 | 10 | 8 | 2 | 6 |
| 21 | 10 | 8 | 2 | 6 | 7 | 9 | 5 | 4 | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 | 3 | 10 | 8 | 2 | 6 | 7 |
| 19 | 8 | 2 | 6 | 7 | 11 | 7 | 4 | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 | 8 | 9 | 8 | 4 | 6 | 7 | 10 |

Вся матриця не обчислюється, за винятком перших елементів підматриць для табл. 5.7, що значно ефективніше.

Визначають ідентичні циклічні підматриці за табл. 5.7 у процесі аналізу значень за координатами перших елементів однакових підматриць горизонтально. Для першої горизонталі підматриць виконується об'єднання вхідних даних для двох 5-точкових згорток

$$(1,1) - +1; (1) \text{ та } (1,16) - -1;(12); (1,6) - -2;(13) \text{ та } (1,11) - +2;(2),$$

і далі для наступної горизонталі підматриць.

$$(7,1) - -2; (13) \text{ та } (7,16) - +2;(2); (7,6) - -4;(15) \text{ та } (7,11) - +4;(4),$$

Виконання поелементно додавань вхідних значень будуть використовуватись для обчислення циклічних згорток.

У випадку визначення ідентичних циклічних підматриць, у разі аналізу вертикально, для них виконується одне обчислення циклічних згорток, яке використовуватиметься для всіх підматриць. Для підматриць, що містять горизонтально однакові значення аргументів, проводяться об'єднання вхідних даних. Це зменшує кількість циклічних згорток, що необхідно буде виконати. Для даного прикладу ДПХ-III, $N=11$ необхідно виконати дві 5-точкові циклічні згортки над об'єднаними вхідними даними та спрощеними значеннями касинусної функції на базі використання алгоритмів швидких згорток. Об'єднання результатів згорток виконується горизонтально на основі відповідних координат (табл. 5.7) перших елементів підматриць. Обчислені вдвічі більші без $2x(0)$ вихідні значення перетворення визначаються у порядку, відповідному до значень твірного масиву за рядками:

$$[X(0), X(1), X(4), X(2), X(7), X(5), X(6), X(8), X(3), X(10), X(9)].$$

Отже, виконання ДПХ-III відповідає основним загальним етапам синтезу та обчислення ДГП. ДПХ-III та ДПХ-II мають однакові значення аргументів, однак переставлені значення індексів для рядків та стовпців.

Тому серед особливостей синтезу та обчислення ДПХ-III можна виділити:

- розмірність матриці ($N \times 2N$), яка складається з непарних значень $(2k+1)$ аргументів у рядках;
- послідовність вхідних значень $[x] [-x]$ передбачає їх повторення з протилежним знаком;
- для непарних значень обсягу перетворення π одна вісь симетрії, для N і парних $2p$ та кратних чотирьом маємо осі симетрії $\Omega[\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4]$;
- обчислення вихідні значення є вдвічі більшими без врахування $2x(0)$;
- можлива кількість варіантів твірних масивів більше одного для конкретного значення обсягу.

5.5 Синтез алгоритму обчислення ДПХ-IV на основі циклічних згорток

5.5.1 Аналіз базисної матриці виду ДПХ-IV

Відповідно до узагальненого подання ДПХ (5.3) для зміщення $k_0=1/2$, $n_0=1/2$ пряме та зворотне одновимірне ДПХ-IV визначається співвідношеннями:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \text{cas} [(2k+1)(2n+1)\pi/2N], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.49)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \text{cas} [(2k+1)(2n+1)\pi/2N], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.50)$$

Подання ДПХ-IV у матричній формі відповідно до (5.49) буде

$$X = H^{\text{IV}}_N x, \quad (5.51)$$

де матриці H^{IV}_N мають розмір $(N \times N)$ з індексами для рядків $k = 0, \dots, N-1$ та індексами для стовпців $n=0, \dots, N-1$; матриці стовпці вихідних $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ та вхідних даних $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$.

Відповідно $h'_{k,n}$ k -та компонента ДПХ-IV для кожного n -го базисного вектора матиме вигляд

$$h'_{k,n} = \text{cas} (2k+1)(2n+1)\pi/2N. \quad (5.52)$$

Проаналізуємо структуру матриці базису ДПХ-IV за аргументами компонентів $h_{k,n}$ ($k, n=0, 1, \dots, N$) базисного перетворення

$$(2k+1)(2n+1)\pi/2N = h_{k,n} \Delta\phi, \quad (5.53)$$

де $\Delta\phi = \pi/(2N)$; N – ціле значення обсягу ДПХ-IV.

Детально проаналізуємо аргументи $h_{k,n} = (2k+1)(2n+1)$ базису ДПХ-IV ($k, n=0, 1, \dots, N-1$). Функція $\text{cas} [(2k+1)(2n+1)\pi/(2N)]$ – періодична відносно $8N$ вибірок, тому можна записати на основі базису матрицю аргументів касинусу порядку $(N \times N)$ у вигляді:

$$H^{\text{IV}}_a(k,n) = [(2k+1)*(2n+1) \bmod (4N)], \quad (5.54)$$

де $H^{\text{IV}}_a(k,n)$ матриця значень аргументів для $n, k=0, 1, 2, \dots, N-1$.

З елементів $h_a(k,n)$ одержаної (5.54) матриці H^{IV}_a виділяємо і спрощуємо відповідні значення, враховуючи симетрію базису відносно осей, доповнюючи

матрицею знаків Sk функції касинуса. Матрицю знаків Sk одержують на основі аргументів функції касинуса за нерівностями

$$Sk[k,n] = \begin{cases} +1, & 14N/4 < h_a(k,n) < 6N/4, \\ -1, & 6N/4 < h_a(k,n) < 14N/4, \\ 0, & h_a(k,n) = 6N/4, 14N/4, \end{cases} \quad k,n=0,1,\dots,N-1. \quad (5.55)$$

Спрощені значення елементів $\underline{h}_{k,n}$ для матриці \underline{H}_a^{IV} можна визначити за матрицею аргументів H_a^{IV} (5.54), що можуть набувати значення від $(1, \dots, N/4)$ та $(N/2, \dots, 3N/4)$ з набору $0(1)4N$ на основі властивості симетричностей функції касинус:

- а) відносно осі $\pi/4$ на проміжку $(0, \pi/2)$;
- б) відносно осі π на проміжку $(0, 2\pi)$;
- в) відносно осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$;
- г) відносно осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$.

Спрощені значення \underline{H}_a^{IV} визначаються послідовним виконанням обчислень:

$$1) \quad h_{k,n} = (h_{k,n}) \bmod 4N; \quad (5.56)$$

$$2) \quad \underline{h}_{k,n} = [(h_{k,n}) \bmod 4N] - 2N, \text{ якщо } [(h_{k,n}) \bmod 4N] > 2N; \quad (5.57)$$

3) та властивості часткової симетрії:

$$\underline{h}_{k,n} = \begin{cases} 3N/4 - \{[(h_{k,n}) \bmod 4N] - N\} - 3N/4, & [(h_{k,n}) \bmod 2N] - N > 3N/4, \\ N/4 - \{[(h_{k,n}) \bmod 4N] - N\} - N/4, & [N/4 < (h_{k,n}) \bmod 2N] - N < N/2, \\ h_{k,n} . \end{cases} \quad (5.58)$$

Осі симетрії відповідають проміжкам: $(0, 2\pi)$ – вісь π ; на проміжку $(\pi/2, \pi)$ – вісь $3\pi/4$; на проміжку $(0, \pi/2)$ – вісь $\pi/4$.

Отже, аналіз та поетапне спрощення базисної матриці аргументів на основі використання властивості періодичності і симетричності базисної функції ДПХ-IV привело до спрощеної матриці H_a^{IV} аргументів з доповнюючою матрицею знаків Sk , що використовуються для обчислення перетворення.

5.5.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ IV на основі циклічних згорток

У результаті узагальненої методології синтезу алгоритму на основі циклічних згорток базисну матрицю ДПХ-IV задаємо твірним масивом

$$P(n) = P_1(L_1)P_2(L_2)\dots P_k(L_k) = \\ = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L_1})(n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L_2}) \dots (n_{kL_1}, n_{kL_2}, \dots, n_{kL_k}), \quad (5.59)$$

де k – кількість підмасивів; n – загальний обсяг масиву, що дорівнює

$$n = (L_1 + L_2 + \dots + L_k) = 2N, \quad (5.60)$$

де $n=(N-1)$ кількість елементів аргументів базисної частини ДПХ-IV без першого значення; n_{ij} – елемент підмасиву; L_i – кількість елементів у підмасиві $P_i(n_i)$, що i задає обсяг циклічних структур.

Приклади твірних масивів для обсягу перетворення

$N=5, P(10)=(1,7,9,3)(5,15)(11,17,19,13),$
 $N=7, P(14)=(1,11,9,15,25,23)(3,5,27,17,19,13)(7,21),$
 $N=8, P(16)=(1,5,25,29,17,21,9,13)(3,15,11,23,19,31,27,7),$
 $N=9, P(18)=(1,7,13,19,25,31)(3,21)(5,35,29,23,17,11)(9,27)(15,33),$
 $N=10, P(20)=(1,7,9,23)(3,21,27,29)(5,35)(11,37,19,13)(15,25)(17,39,33,31),$
 $N=11, P(22)=(1,7,5,35,25,43,37,39,9,19)(3,21,15,17,31,41,23,29,27,13)(11,33),$
 $N=12, P(24)=(1,13,25,37)(3,39,27,15)(5,17,29,41)(7,43,31,19)(9,21,33,45)(11,47,35, 23),$
 $N=14, P(28)=(1,5,25,13,9,45)(3,15,19,39,27,23)(7,35)(11,55,51,31,43,47)(17,29,33, 53,41,37)(21,49).$

Залежно від значення обсягу перетворення, враховуючи симетричність функції $\cos((2k+1)(2n+1)\pi/2N)$ відносно осі $\pi/4$ на проміжку $(0, \pi/2)$; осі π на проміжку $(0, 2\pi)$; осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$; осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$, у матриці елементів аргументів H_a^l можна визначити спрощені елементи $h(k,n)$, що можуть набувати значень від $(1, \dots, N/2)$ та $(N, \dots, 2N)$, доповнюючи значеннями $+1, -1$, матриці знаків Sk касинуса.

Вісь симетрії, що може набувати значень $\Omega[\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4]$ для функції касинус, визначається за формулою

$$\Omega = (2k+1) * (2n+1) \varphi, \quad (5.61)$$

де $\varphi = \pi/2N$; $(2k+1)*(2n+1)$ – цілочисельне значення для $k, n=1(1)N-1$.

Для непарних значень обсягу перетворення $N = p$, ($N=3,5,7,9,11,13,15,17,\dots$) жодне значення аргументів базису ДПХ-IV не належить до перелічених осей симетрії. Тому структура матриць H_{N}^{IV} , сформованих за твірним масивом $P(n)$, не міститиме спрощених елементів.

Для непарних значень N обсягу перетворення, існує одне зі значень елементів матриці базису ДПХ-IV, що дорівнює $2N$, та відповідає аргументу π , тобто $(2k+1)(2n+1)\pi/2N=\pi$. Це визначає відповідну рівність абсолютних значень функції косинуса на проміжках $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$. Тому відповідні значення спрощених елементів матриці H_{a}^{IV} можуть дорівнювати одному зі значень $(1, \dots, N/2-1)$, тобто замінені за формулою

$$i=2N+i, \text{ для } i=1, \dots, 2N-1 \quad (5.62)$$

та бути доповненими відповідною матрицею знаків Sk (асиметричне об'єднання). Матрицю знаків Sk одержують за нерівністю (5.55).

Отже, структуру матриць H_{N}^{IV} можна задати твірним масивом $P(n)$ або спрощеним твірним масивом $P'(n)$ із матрицею знаків $Sk(n)$. Наприклад, для ДПХ-IV набір $P(n)$, $P'(n)$, $Sk(n)$ для непарних обсягів

$N=5$

$P(10) = (1,3,9,7) (5,15) (11,13,19,17);$

$P'(10) = (1,2,6,7) (0,0) (1,2,6,7),$

$Sk=(+,+,-,+) (+,-) (-,-,+,-);$

$N=7$

$P(10) = (1,3,9,27,25,19) (5,15,17,23,13,11) (7,21);$

$P(10) = (1,3,9,8,10,2) (2,1,3,9,8,10) (0,0),$

$Sk= (+,+,+,+,-)(+,-,-,-,-)(+,-);$

$P(10) = (1,9,25)(3,27,19) (5,17,13)(7)(11,15,23) (21);$

$P(10) = (1,9,10)(3,8,2) (2,3,8)(0)(10,1,9) (0),$

$Sk= (+,+,+)(+,+,-)(+,-,-)(+)(-,-,-) (-);$

$N=9$

$P(18) = (1,5,25,17,13,29)(3,15)(7,35,31,11,19,23)(9)(21,33)(27);$

$P'(18) = (1,4,2,10,13,11)(3,12)(2,10,13,11,1,4)(0)(3,12)(0),$

$Sk(18)= (+,+,-,-,+,-)(+,-)(+,+,-,+,-,-)(+)(-,-,-);$

3) $N+i=2N-i=3N+i=4N-i$, на проміжку аргументу $(\pi/2, 3\pi/4)$ з вісю $3\pi/4$ для $i=1, \dots, N-1$.

Наприклад, для ДПХ-IV набір $P(n)$, $P'(n)$, $Sk(n)$ для парних обсягів:

$N=8$

$P(16) = (1,3,9,27,17,19,25,11)(5,15,13,7,21,31,29,23);$

$P'(16) = (1,3,9,11,1,3,9,11)(3,9,11,1,3,9,11,1),$

$Sk(16) = (+,+,+,-,-,-,+)(+,-,-,+,-,+,+,-);$

$P(16) = (1,7,17,23)(3,21,19,5)(9,31,25,15)(11,13,27,29);$

$P'(16) = (1,1,1,1)(3,3,3,3)(9,9,9,9)(11,11,11,11),$

$Sk(18) = (+,+,+,-)(+,-,-,+)(+,-,-,+)(+,-,-,+);$

$N=10$

$P(20) = (1,3,9,27)(5,15)(7,21,23,29)(11,33,19,17)(13,39,37,31)(25,35);$

$P'(20) = (1,3,1,3)(5,15)(3,1,3,1)(11,13,11,13)(13,11,13,11)(5,15),$

$Sk(20) = (+,+,+,-)(+,0)(+,-,-,-)(+,-,-,-)(+,+,+,-)(-,+);$

$N=12$

$P(24) = (1,5,25,29)(3,15,27,39)(7,35,31,11)(9,45,33,21)(13,17,37,41)(19,47,43,23);$

$P'(24) = (1,5,1,5)(3,15,3,15)(5,1,5,1)(3,15,3,15)(13,17,13,17)(17,13,17,13),$

$Sk(24) = (+,+,+,-)(+,+,+,-)(+,+,-,+)(+,+,-,-)(+,+,-,-)(-,+,+,-);$

$P(24) = (1,11,25,35)(3,33,27,9)(5,7,29,31)(13,47,37,23)(15,21,39,45)(17,43,41,19);$

$P'(24) = (1,1,1,1)(3,3,3,3)(5,5,5,5)(13,13,13,13)(15,15,15,15)(17,17,17,17),$

$Sk(24) = (+,+,+,-)(+,-,-,+)(+,+,-,-)(+,+,-,-)(+,-,-,+)(+,+,-,-);$

$N=14$

$P(28)=(1,3,9,27,25,19)(5,15,45,23,13,39)(7,21)(11,33,43,17,51,41)(29,31,37,55,53,47)(35,49);$

$P'(28)=(1,3,5,15,17,19)(5,15,17,19,1,3)(7,21)(3,5,15,17,19,13)(1,3,5,15,17,19)(7,21),$

$Sk(28) = (+,+,+,-,-,+)(+,+,-,-,+,-)(+,0)(+,-,-,+,+,-)(-,-,-,+,+,-)(-,0);$

$P(28)=(1,9,25)(3,27,19)(5,45,13)(7)(11,43,51)(15,23,39)(17,41,33)(21)(29,37,53)(31,55,47)(35,49);$

$P'(28)=(1,5,17)(3,15,19)(5,17,1)(7)(3,15,19)(15,19,3)(17,1,5)(21)(1,5,17)(3,15,19)(7,21),$

$Sk(28) = (+,+,+,-)(+,-,+)(+,-,+)(+)(+,-,+)(+,-,-)(+,-,-)(0)(-,-,+)(-,-,+)(-,0).$

На основі сформованих твірних масивів у процесі синтезу алгоритму аналізують структуру базисної матриці, тобто визначають ідентичні циклічні підматриці. Для цього розглянемо приклад узагальненої схеми визначення

ідентичних циклічних підматриць, необхідних для обчислення ДПХ-IV обсягу $N=8$.

Сформоване значення твірного масиву за підстановкою ϵ :

$$P(16)=P(n_1)P(n_2) = (1, 3, 9, 27,17,19,25,11)(7,21,31,29,23, 5,15,13),$$

$$P'(16)=(1,3,9,11,1,3,9,11)(1,3,9,11,1,3,9,11),$$

$$Sk(n) = (+,+,+,-, -, -, -,+)(+,-,+,+,-,+,-,-).$$

Визначення параметрів : $k = 2$ – кількість підмасивів у твірному масиві; $L_1=8, L_2=8$, – кількість елементів у підмасивах $P(n_i)$ задають обсяг циклічних згортки; $m \geq k^2$ загальна кількість підматриць: $m=4$.

Вхідні 8 значень перетворення повторюються з протилежним знаком і переставляються у порядку відповідно до значень твірного масиву:

$$[x(0),x(1),x(4),-x(5),-x(0),-x(1),-x(4),x(5),x(3),-x(2),-x(7),-x(6),-x(3),x(2),x(7),x(6)],$$

що приведе до збільшення вдвічі $2X[i]$ вихідних значень за цим алгоритмом.

Визначаються та групуються коефіцієнти функції $\cos(n_i \varphi)$ для касинусних складових базису ДПХ-IV з $\varphi = \pi/2N = \pi/16$, що беруть участь в операціях згортки для аргументів: $(1\varphi, 3\varphi, 9\varphi, 11\varphi)$.

Для визначення ідентичних циклічних підматриць у структурі базису використовуємо таблиці. Табличні координати перших елементів підматриць визначаються за $(i+L_i), (j+L_i)$, де L_i вибирається за приналежності до твірного підмасиву значень перших елементів підматриць у матричній структурі, які обчислюються за відповідністю координат (i,j) елементам $P(n)$ твірного масиву $(n_i \times n_j) \bmod 4N$.

Відповідність координат (i, j) елементам твірного масиву $P(n_i)$ та $P'(n_i)$:

$$\begin{array}{l} (i, j) \quad 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \\ \quad \quad (1, 3, 9, 27,17,19,25,11) (7,21,31,29,23, 5,15,13) \\ \quad \quad (1, 3, 9, 11, 1, 3, 9, 11) (1, 3, 9, 11, 1, 3, 9, 11) \end{array} .$$

Координати перших елементів підматриць визначаються за $(i+L_i), (j+L_i)$, де L_i – вибирається за приналежністю до твірного підмасиву значень перших елементів підматриць у матричній структурі, які обчислюються за відповідністю координат (i,j) елементам $P(n)$ твірного масиву $(n_i \times n_j) \bmod 4N$. Подані у табл. 5.9

знак і спрощене значення першого елемента n_{ij} підматриці та у дужках (елемент аргументу з $P(n_i)$).

Таблиця 5.9 – Узагальнена структура базисної матриці ДПХ-IV обсягу $N=8$

| (координати рядок/стовпець) $(i+L_i, j+L_i) - s n_{ij}$ (s знак і спрощене значення першого елемента n_{ij} підматриць) | |
|---|---------------------|
| $(1,1) - +1; (1);$ | $(1,9) - +1; (7);$ |
| $(9,1) - +1; (7);$ | $(9,9) - -1; (17);$ |

Спрощена матриця аргументів $H_{a,p}^{IV}$ (табл. 5.10), яка стисло подається твірним масивом і відповідає табл. 5.9, матиме значення:

Таблиця 5.10 – Спрощена матриця аргументів $H_{a,p}^{IV}$ ДПХ-IV обсягу $N=8$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 3 | 9 | 27 | 17 | 19 | 25 | 11 | 7 | 21 | 31 | 29 | 23 | 5 | 15 | 13 |
| 1 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 |
| 3 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 |
| 9 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 |
| 27 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 |
| 17 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 |
| 19 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 |
| 23 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 |
| 11 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 |
| 21 | 3 | 9 | 9 | 1 | 3 | 9 | 11 | 3 | 9 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 |
| 31 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 |
| 29 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 |
| 23 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 |
| 5 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 |
| 15 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 |
| 13 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 | 11 | 1 | 3 | 9 |

Вся матриця не обчислюється, за винятком перших елементів підматриць для таблиці, що значно ефективніше. Визначають за таблицею ідентичні циклічні підматриці відбором за координатами перших елементів однакових підматриць горизонтально у матричній структурі:

$(1,1) - +1 (1)$ та $(1,9) - +1 (7)$ для $P(n_1) = P(n_2) = (1, 3, 9, 11, 1, 3, 9, 11)$,
 $(9,1) - +1 (7)$ та $(9,9) - +1 (17)$ для $P(n_1) = P(n_2) = (1, 3, 9, 11, 1, 3, 9, 11)$,

однак ці підматриці містять різний у дужках елемент аргументу $P(n_i)$ 1 і 7; 7 і 17, що відповідає різним підмасивам знаків. Тому дані підматриці не є однотипними, і об'єднання вхідних даних не виконується.

Відбір за координатами перших елементів ідентичних підматриць вертикально:

$(1,1) - +1 (1)$ та $(9,1) - +1 (7)$ для $P(n_1) = P(n_2) = (1, 3, 9, 11, 1, 3, 9, 11)$,

$(1,9) - +1 (7)$ та $(9,9) - +1 (17)$ для $P(n_1) = P(n_2) = (1, 3, 9, 11, 1, 3, 9, 11)$,

однак ці підматриці містять різний у дужках елемент аргументу $P(n_i)$, що відповідає різним підмасивам знаків. Тому ці підматриці не є однотипними.

У результаті аналізу структури необхідно виконати чотири 8-точкові симетричні циклічні згортки:

$[x(0), x(1), x(4), -x(5), -x(0), -x(1), -x(4), x(5)] \otimes [cas(1\varphi), cas(3\varphi), cas(9\varphi), -cas(11\varphi), -cas(1\varphi), -cas(3\varphi), -cas(9\varphi), cas(11\varphi)]$;

$[x(0), x(1), x(4), -x(5), -x(0), -x(1), -x(4), x(5)] \otimes [cas(1\varphi), -cas(3\varphi), cas(9\varphi), cas(11\varphi), -cas(1\varphi), cas(3\varphi), -cas(9\varphi), -cas(11\varphi)]$;

$[x(3), -x(2), -x(7), -x(6), -x(3), x(2), x(7), x(6)] \otimes [cas(1\varphi), -cas(3\varphi), cas(9\varphi), cas(11\varphi), -cas(1\varphi), cas(3\varphi), -cas(9\varphi), -cas(11\varphi)]$;

$[x(3), -x(2), -x(7), -x(6), -x(3), x(2), x(7), x(6)] \otimes [-cas(1\varphi), -cas(3\varphi), -cas(9\varphi), cas(11\varphi), cas(1\varphi), cas(3\varphi), cas(9\varphi), -cas(11\varphi)]$.

Особливістю виконання циклічної згортки є інверсне повторення групи послідовностей як вхідних даних, так і значень функції касинус. Результати згорток визначаємо тільки для 4-х значень (горизонталі 1,3,9,11 та 7,5,15,13).

Об'єднання результатів згорток виконується горизонтально на основі координат перших елементів підматриць:

- результат 8-точкової згортки з координатами (1,1) додається до результату 8-точкової згортки з (1,9);

- результат з протилежним знаком 8-точкової згортки з координатами (9,9) додається до результату 8-точкової згортки з (1,9).

Одержані вихідні значення перетворення відповідають порядку відповідно до значень твірного масиву: $X(1), X(3), X(9), X(11), X(7), X(5), X(15), X(13)$.

До структурної схеми (рис. 5.3) обчислення входять вузли: U_i - вузли об'єднання вхідних даних; CCU - циклічний конвольвер для одержання 4-

точкових результатів згортки відповідно структури базису даного обсягу перетворення.

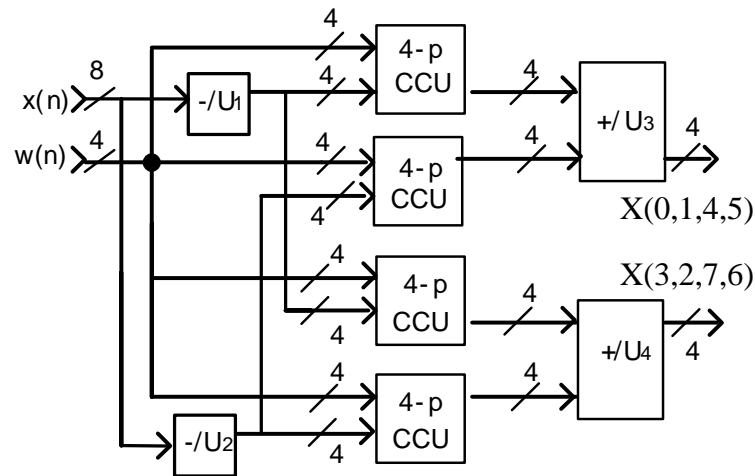


Рисунок 5.3 – Структурна схема модуля обчислення ДПХ-IV обсягу $N=8$

Виконання поелементних додавань входних значень використовуватимуться для горизонтальних ідентичних підматриць і відтак при обчисленні циклічних згорток. Результати згорток багаторазово використовуватимуться для ідентичних підматриць при аналізі вертикально. За наявності решти незадіяних підматриць виконуються циклічні згортки за їхніми параметрами на основі визначених координат.

Наявність симетрії послідовностей згорток зменшує кількість операцій при використанні алгоритмів швидких згорток [232]. Об'єднують результати згорток горизонтально на основі відповідних координат перших елементів підматриць, використовуючи половину результатів згорток. Обчислені вдвічі більші вихідні значення перетворення відповідають порядку відповідно до значень твірного масиву за рядками.

Серед особливостей синтезу та обчислення ДПХ-IV можна виділити:

- розмірність матриці ($2N \times 2N$) і складається з непарних значень ($2n+1$) всіх аргументів;
- послідовність входних значень $[x][-x]$ повторення з протилежним знаком;
- обчисленні вихідні значення $2X(i)$ є вдвічі більші;
- асиметричність деяких вихідних значень (однакові, але з протилежним знаком) для скорочення обчислень на основі циклічних згорток за алгоритмом;

- для непарних значень обсягу перетворення π одна вісь симетрії;
- для парних значень обсягу маємо такі осі симетрії: $\pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4$;
- виконуються деякі циклічні згортки для парних обсягів з повторенням груп елементів;
- однакові підмасиви спрощених аргументів можуть мати різні підмасиви знаків;
- можлива кількість варіантів твірних масивів більше одного.

Порівняння числа операцій обчислення ДПХ I-IV на основі швидких алгоритмів циклічної згортки з мінімальним числом добутоків (табл. 5.11) показує меншу кількість операцій множення порівняно з відомими традиційними алгоритмами [206].

Таблиця 5.11 – Таблиця числа операцій прикладів ДПХ I-IV

| ДПХ | Запропоновані | Традиційні |
|---------|---|-----------------------------------|
| ДПХ I | N=14, m=16, a=72
N=16, m=10, a=62 | N=16, m=12, a=64 |
| ДПХ II | N=8, m=10, a=26
N=9, m=12, a=60
N=18, m=24, a=172 | N=8, m=4, a=18
N=9, m=19, a=38 |
| ДПХ III | N=8, m=10, a=26;
N=11, m=40, a=61 | N=8, m=4, a=18 |
| ДПХ IV | N=5, m=5, a=20
N=8, m=8, a=38 | N=8, m=16, a=32 |

У табл. 5.11 порівняння числа операцій для коротких обсягів чотирьох видів ДПХ I-IV показує в основному співвимірність балансу операцій розробленої узагальненої методології та конкретних традиційних алгоритмів.

Підвищення обчислювальної ефективності ДПХ I-IV на основі ЦЗ забезпечується для довільних обсягів в плані зменшення кількості арифметичних операцій порівняно з алгоритмами [206], що розроблені для конкретних обсягів в основному $N=2^n, N=3^n$.

Отже, сформульовані принципи та етапи синтезу й обчислення з врахуванням особливостей кожного з чотирьох видів ДПХ I-IV, зведених у табл.5.12, підтверджують вірогідність розробленої узагальненої методології.

Таблиця 5.12 – Особливості алгоритму синтезу ДПХ I-IV

| Особливості синтезу ДПХ | | ДПХ I | ДПХ II | ДПХ III | ДПХ IV |
|--|---------------|---|--|--|---|
| Розмірність матриці аргументів
(рядки x стовпці) | | (NxN) | (Nx2N)
непарні
стовпці | (2NxN)
непарні
рядки | (2Nx2N) |
| Послідовність вхідних значень даних
(повторення з протилежним знаком) | | без $x(0)$,
$x(N/2)$ | [x] | [x][-x] | [x][-x] |
| Послідовність вихідних значень
(вдвічі більші) | | без $X(0)$,
$X(N/2)$ | [±X]
без $X(0)$ | 2[X]
без $2x(0)$, | 2[±X] |
| Симетричні циклічні згортки | | для 2^n | нема | нема | |
| Кількість варіантів твірних масивів | | існує | | існує | існує |
| Осі симетрії
для обсягів: | непарних p | нема | N (π) | N (π) | нема |
| | для парних 2p | N/2 (π) | N (π) | N (π) | 2N (π) |
| | для парних 4p | N/2 (π) | N (π), | N (π), | 2N (π) |
| | для парних 8p | N/2 (π),
N/8, 3N/8,
5N/8, 7N/8
($i*\pi/4$,
$i=1, 3,5,7$) | N/4 ($\pi/4$),
3N/4($3\pi/4$),
5N/4($5\pi/4$),
7N/4($7\pi/4$) | N/4 ($\pi/4$),
3N/4($3\pi/4$),
5N/4($5\pi/4$),
7N/4($7\pi/4$) | N/2, 3N/2,
2N, 5N/2,
7N/2
$i*\pi/4$,
$i=1,3,4,5,7$ |

Висновки до п'ятого розділу

1. Як розвиток стратегії Рейдера для ДПФ у розділі розглянуто узагальнену методологію для ефективного обчислення чотирьох видів ДПХ I-IV дискретних перетворень Хартлі на основі циклічних згорток. Проаналізовано особливості базису перетворення, синтезовано алгоритм та виконано обчислення ДПХ I-IV на основі циклічних згорток, що дозволять пришвидшити роботу програмного та апаратного забезпечення при виконанні цих перетворень.

2. На основі розробленої методології видозмінена загальна структура базисної матриці аргументів ДПХ I-IV залежить від значення обсягу перетворення і може містити від однієї матриці у базисній матриці до декількох циклічних підматриць, що повторюються як горизонтально, так і вертикально. Структура базисної матриці аргументів ДПХ I-IV формується за твірними масивами $P(n)$, $P'(n)$, $Sk(n)$. Ці твірні масиви визначаються у процесі синтезу алгоритму обчислення ДПХ I-IV на основі циклічних згорток.

3. Синтез алгоритму та виконання обчислення ДПХ I-IV передбачають: аналіз особливостей для виду ДПХ та обсягу N перетворення; формування твірного масиву та спрощеного твірного масиву із доповненням масивом знаків; визначення коефіцієнтів функції базису за спрощеним твірним масивом; виділення ідентичних циклічних підматриць горизонтально та вертикально з врахуванням першого рядка знаків; переіндексацію за твірним масивом та об'єднання вхідних даних, відповідно однотиповості циклічних підматриць горизонтально; ефективне обчислення зменшеної кількості циклічних згорток; об'єднання результатів швидких згорток для обчислення вихідних значень перетворення.

4. Сформульовані принципи та етапи синтезу й обчислення з врахуванням особливостей для кожного з чотирьох видів ДПХ I-IV на прикладах підтверджують вірогідність розробленої узагальненої методології.

5. Алгоритми ДПХ, відповідно до кожного з чотирьох видів, характеризуються своїми специфічними особливостями синтезу поряд з алгоритмами ДКП, ДСП на основі ЦЗ

Основні результати розділу опубліковано в [2], [22] - [24], [29], [42], [43].

РОЗДІЛ 6

Аналіз ефективності узагальненої методології синтезу алгоритмів та обчислення ДГП на основі циклічних згорток

Узагальнену методологію синтезу алгоритму та обчислення ДГП на основі циклічних згорток із врахуванням особливостей кожного перетворення розглянуто у попередніх розділах. Ефективність як категорійне загальнонаукове поняття широко використовується у різних галузях людської діяльності та постійно уточнюється і доповнюється. Ефективність узагальненої методології як технічна категорія поєднує якісні та кількісні характеристики.

Якісна характеристика, що розкриває інноваційну сутність, полягає у подальшому розвитку узагальненою методологією підходу до формування та аналізу структури базису перетворення у вигляді набору ганкелевих циркулянтів для обчислення ДГП. Кількісна характеристика підвищення ефективності узагальненої методології відображає при досягненні цілей покращення відношення результату до певного виду ресурсних витрат.

Серед основних якісних характеристик узагальненої методології обчислення ДГП на основі циклічних згорток, що підвищують ефективність синтезу алгоритмів і виконання обчислень, виділимо:

- спрощення синтезу алгоритму ДГП завдяки використанню цілочисельних арифметичних операцій для визначення варіантів твірних масивів, що задають кількість та обсяги циклічних згорток, схему об'єднання результатів згорток, блочно-циклічну структуру базису перетворення;

- кросплатформність виконання ДГП, тобто відсутність особливих вимог до апаратних та програмних ресурсів, завдяки гнучкості взаємозв'язків між потоками даних у синтезованих алгоритмах та можливості розбиття їх на структурні модулі, всередині яких можливе розпаралелення обчислень.

Кількісна характеристика ефективності узагальненої методології відображає економію при досягненні цілей відношення результату до певного

виду ресурсних витрат. Кількісні характеристики ефективності синтезу алгоритму та виконання обчислення ДГП залежать як від видів перетворення, так і від конкретного обсягу, набору конкретних обсягів або довільних обсягів та вимог прикладного застосування. Кількісні характеристики ефективності узагальненої методології визначаються певними співвідношеннями, тобто є відносними, і задають:

- мультифункціональність виконання, яка загалом передбачає прямі та зворотні перетворення сукупності ДКП/ДСП/ДПХ видів (I-IV) з конкретними обсягами перетворення за програмної або апаратної реалізації;

- обчислювальні затрати, які співвимірні з відомими традиційними алгоритмами за балансом кількості операцій множення і додавання та можливістю мінімізації кількості множень у випадку використання швидких згорток з мінімальною мультиплікативною складністю;

- затрати компоновки НВІС, що забезпечуються економним використанням площі кристала і, відповідно, покращенням технічних параметрів обчислення перетворень ДГП завдяки локальності та безпосередності міжзв'язків між процесорними елементами при імплементації циклічних згорток.

Розглянемо детальніше ефективність розробленої узагальненої методології в аспекті різних характеристик ефективності у процесі синтезу алгоритму ДГП і виконання його обчислення.

6.1 Апаратна кросплатформність виконання ДГП на основі циклічних згорток

6.1.1 Структура та етапи взаємодії базових блоків пристроїв обчислення ДГП на основі циклічних згорток

Розглянемо загальні особливості структурних схем виконання ДГП на основі циклічних згорток, враховуючи особливість синтезу алгоритму та

проведення обчислень. На етапі декомпозиції задачі обчислення ДГП аналізується можливість виділення підзадач з погляду можливості їхнього паралельного виконання. Виконання ДГП у загальному через великоблокові структури можна поділити на три частини:

- синтез алгоритму обчислення ШГП, адаптованого до довільного цілого значення обсягу N ;
- визначення гармонічних коефіцієнтів перетворення;
- виконання ШГП, адаптованого до обсягу перетворення.

Сам процес виконання ШГП містить три базові компоненти (рис. 6.1), які виконуються у блоці синтезу (SU), у блоці гармонічних коефіцієнтів (W), у виконавчому блоці (PU).

Число N з множини натуральних чисел задає обсяг перетворення і подається на блоки SU, W. Входи $x(n)$ та виходи $X(n)$ у блоці PU задають інформаційні дані перетворення.

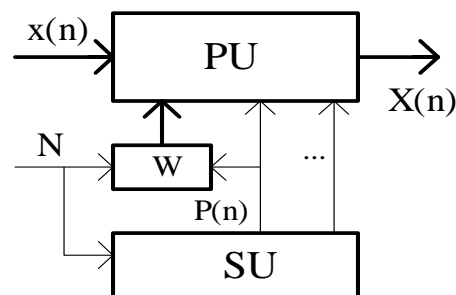


Рисунок 6.1 – Структура взаємодії базових блоків ШГП на основі згорток

Послідовно-паралельно із синтезом у SU після визначення результату підзадачі приналежності значення обсягу перетворення починається паралельне виконання ШГП у компонентах W, PU. Блок синтезу SU виконує підзадачі:

- визначення приналежності обсягу перетворення N до підмножини цілих чисел;
- визначення циклічного розкладу підстановки $P(n)$;
- спрощення циклічного розкладу підстановки $P'(n)$ із доповненням знаками $Z(n)$;
- аналіз структури базисної матриці перетворення на основі визначених $P(n)$, $P'(n)$, $Z(n)$.

Обмін інформацією на цьому рівні виконується на рівні повідомлень від блока синтезу SU до виконавчого блока PU через:

- $n = \lfloor N/2 \rfloor$ об'єднання елементів для обсягу перетворення N (S_1, S_2) або $n = \lfloor N/4 \rfloor$ для (S_3, S_4, S_5);
- твірний масив $P(n) = (n_1)(n_2) \dots (n_k)$ перепорядкування вхідних інформаційних даних $x(n)$;
- структура спрощеного твірного масиву $P'(n)$ задає наступні об'єднання вхідних елементів $x(n_1), x(n_2) \dots x(n_k)$;
- підмасиви спрощеного твірного масиву $P'(n)$ з доповненням знаками $Z(n)$ для обчислення згорток.

Аналіз структури спрощеної базисної матриці визначає порядок об'єднання вхідних даних $x(i)$. Цей аналіз виконується визначенням відповідних параметрів твірного масиву $P(n) = P(n_1)P(n_2) \dots P(n_k)$ для даного обсягу перетворення. До таких взаємопов'язаних параметрів належить:

- N обсяг перетворення: а) $N = p$ (просте або непарне); б) $N = 2p$; (парні або кратні $N = 4p$; $N = 2^i$);
- k – кількість підмасивів у твірному масиві $P(n) = P(n_1) P(n_2) \dots P(n_k)$;
- число елементів кожного твірного підмасиву $(L_1), (L_2), \dots (L_k)$;
- кількість підматриць $m \geq k^2$ базової матричної структури;
- координати $(v_{i,j})$ і відповідні значення $(p_{11}), (p_{21}), \dots (p_{m1})$ перших елементів підматриць у матричній структурі;
- число повторень однакових підматриць $r < m$, визначається за однаковими значеннями перших елементів у матричній структурі та приналежності до відповідного твірного підмасиву;
- кількість підматриць, що починаються з (n_{ij}) проміжного елемента твірного підмасиву $P(n_i)$.

Для підматриць, що містять як горизонтально, так і вертикально, однакові значення аргументів, проводяться об'єднання вхідних даних. Це зменшує кількість циклічних згорток, що необхідно буде виконати PU. Блок синтезу SU

використовує тільки арифметичні операції над цілими числами для виконання виділених підзадач.

Цілочисельний синтез алгоритму у блоці синтезу SU залежить від T періоду базисної функції перетворення ДГП і включатиме у найгіршому випадку такі максимальні обчислювальні затрати:

- 1) T операцій $[(i \times j) \bmod T]$ для обчислення рядка для підстановки;
- 2) від T, \dots , до $T \cdot (T/3)$ доступів до елементів підстановки для формування $P(n)$, де $(T/2)$ – максимальна кількість підмасивів;
- 3) менше $2T$ операцій віднімання для визначення $P'(n)$;
- 4) T доступів і порівнянь елементів $P(n)$ для визначення $S(n)$;
- 5) менше $(T/3) \cdot (T/3)$ max кількість доступів й обчислень значень $S(n)$ і $P'(n)$ перших елементів циклічних підмасивів для аналізу структури базису.

Для зменшення квадратичної залежності обсягу пам'яті виконання аналізу структури базису перетворення ДГП здійснюється пошук ідентичних підматриць у горизонтальних/вертикальних лінійках блочно-циклічної матриці та скорочення кількості $\{L_v/L_m\}$ перших елементів підмасивів з елементами, кратними обсягу перетворення. Наприклад, для ДПК I обсягу $N=15=3 \times 5$ за табл.3.2 та табл. 3.3 в пункті 3.2.3 розглянуто це скорочення.

Блок гармонічних коефіцієнтів W виконує підзадачі:

- визначення приросту аргумента перетворення $\Delta\varphi=(2\pi/N)$ відповідно до вхідного значення обсягу N ;
- обчислення аргументів гармонічних функцій $\Delta\varphi=(2\pi/N), i \cdot \Delta\varphi, i=1, \dots, n/2$;
- обчислення абсолютних значень гармонічних коефіцієнтів залежно від обсягу і виду перетворення $\{\cos(i \cdot \Delta\varphi), \sin(i \cdot \Delta\varphi), \text{cas}(i \cdot \Delta\varphi)\}$.

Обмін інформацією у блоці W виконується на рівні повідомлень між частинами SU, PU.

Від блока синтезу SU до блока W передаються:

$n=[N/2]$ – максимальна кількість значень гармонічних коефіцієнтів для обсягу перетворення N (S_1, S_2) або $n=[N/4]$ – для обсягу N (S_3, S_4, S_5);

$P(n_i)$ – послідовність коефіцієнтів для аргументів гармонічних функцій, що необхідні для виконання згортки.

Від блока W до виконавчого блока PU передаються значення гармонічних коефіцієнтів $\{\cos(i*\Delta\varphi), \sin(i*\Delta\varphi), \cos(i*\Delta\varphi)\}$ для обчислення циклічних згорток. Завдяки зменшенню в 2 або 4 рази абсолютних значень гармонічних коефіцієнтів отримуємо *підвищення ефективності* для їх визначення та зберігання.

Виконавчий блок PU виконує підзадачі:

- об'єднання вхідних інформаційних даних перетворення $x(n)$;
- відбір і групування об'єднаних даних;
- виконання швидких циклічних згорток між згрупованими даними та відповідними значеннями гармонічних коефіцієнтів базисної функції;
- об'єднання результатів згортки у вихідні інформаційні дані $X(n)$ перетворення.

Виконання ШГП блоком PU відповідно до розробленого алгоритму поділяється на три послідовно-паралельні етапи (рис. 6.2): попереднього об'єднання даних (препроцесорний), виконання циклічних згорток (процесорний), формування вихідних значень (постпроцесорний).

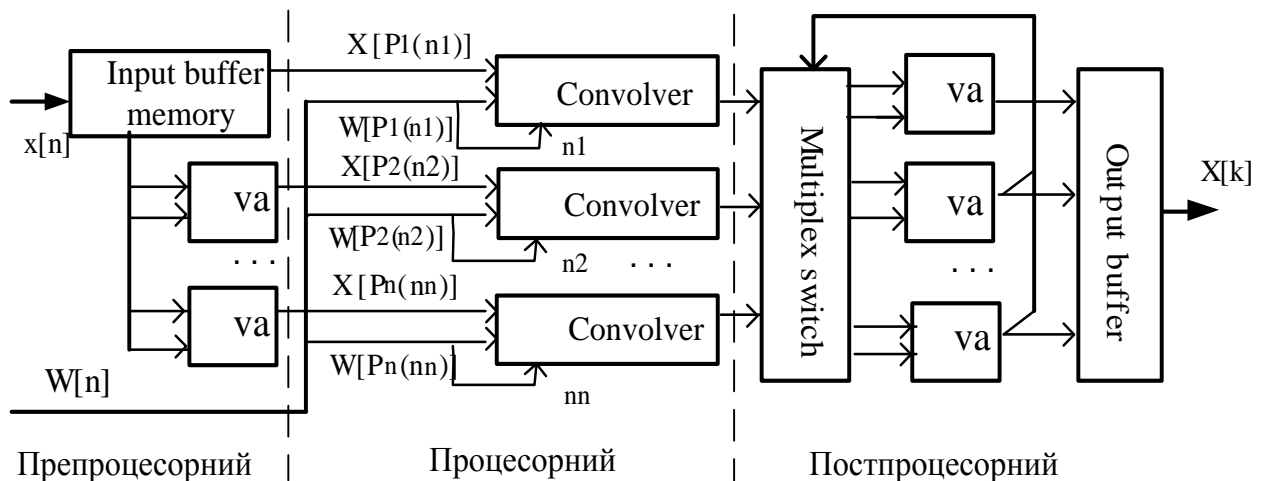


Рисунок 6.2 – Структурна схема виконавчого блока PU

До структури виконавчого блока PU (рис. 6.2) входить: вхідний буфер попереднього групування (Input buffer memory) та об'єднання даних $x[n]$ (va –

vector addition); Конвольвер (Convolver) – модуль виконання циклічної згортки між об'єднаними вхідними даними та $W[n]$ – коефіцієнтами ДГП; Мультиплексор результатів згорток для їх об'єднання (Multiplex switch, va); Вихідний буфер (Output buffer) формування вихідних інформаційних даних $X[k]$.

Обчислення ШГП базується на паралельному виконанні швидких коротких або середніх згорток у модулях згортки, що можуть ефективно реалізуватись за допомогою систолічних структур [233], [234]. Синхронна організація керування виконавчого блока PU виконується відповідно до обчислювальних ресурсів PU та повідомлень блока синтезу SU, адаптованих до обсягу перетворення N .

Отже, структурна організація обчислення ШПГ приводить до послідовно-паралельної взаємодії основних блоків (рис. 6.1) та паралельного виконання циклічних згорток (рис. 6.2) за цим підходом.

Етапи виконання у блоці PU обчислення ДГП потребують максимально допустимих обсягів пам'яті для зберігання:

- 1) N - вхідних значень;
- 2) менше N - об'єднаних вхідних значень;
- 3) N – значень знаків та $N/4$ – спрощених значень коефіцієнтів ДГП;
- 4) менше $N \cdot (N/3)$ – проміжних результатів циклічних згорток;
- 5) N – вихідних значень ДГП.

Для зменшення квадратичної залежності обсягу пам'яті збереження проміжних результатів циклічних згорток застосовується організація дерева об'єднання у горизонтальних лінійках базисних підмасивів із використанням заміщень. Використання необхідної пам'яті пов'язані з N обсягом перетворення ДГП та організацією виконання обчислення відповідно до технічних завдань конкретних застосувань.

6.1.2 Спеціалізовані обчислювальні структури виконання ДГП на основі циклічних згорток

Спеціалізація обчислювальних засобів характеризується високим допустимим рівнем швидкодії, економічністю ресурсів та відносною простотою реалізації та тестування. Структуру пристрою (рис. 6.3) обчислення ДГП на основі циклічних згорток із використанням блока множення з накопиченням MAC захищено патентом [235].

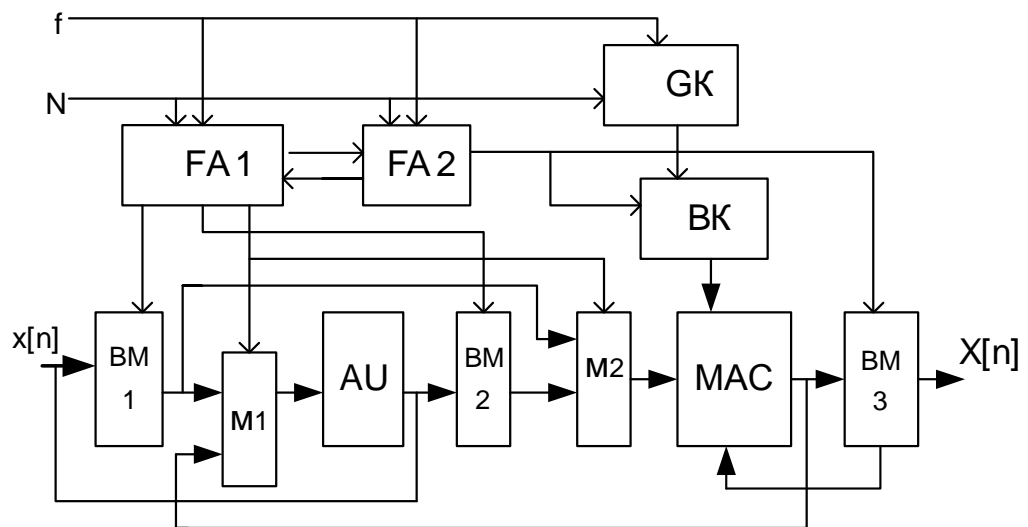


Рисунок 6.3 – Структурна схема пристрою для обчислення ДГП

Пристрій містить тактовий вхід f , вхід N величини обсягу перетворення, інформаційний вхід даних перетворення $x[n]$, перший формувач адрес $FA1$, другий формувач адрес $FA2$, генератор коефіцієнтів GK , пам'ять коефіцієнтів BK , першу пам'ять $BM1$, перший мультиплексор $M1$, арифметичний вузол AU , другу пам'ять $BM2$, другий мультиплексор $M2$, блок накопичувача добутків MAC , третю пам'ять $BM3$, інформаційний вихід результату перетворення $X[n]$.

Основну функцію у формуванні твірною масиву і відповідно організації відбору та об'єднання вхідних даних $x(n)$ виконує $FA1$. Перший формувач адрес $FA1$ проводить адресацію вводу з інформаційного входу значень $x[i]$, $i=0(1)N-1$, і відтак формує адреси для зчитування і запису значень у процесі виконання AU етапів об'єднань у першу і другу пам'ять $BM1$, $BM2$ відповідно. Другий

формував адрес FA2 бере участь у формуванні послідовності адрес для зчитування (через FA1) об'єднаних значень з другої пам'яті BM2 і значень тригонометричних функцій із пам'яті коефіцієнтів BK. Генератор коефіцієнтів GK паралельно проводить формування тригонометричної функції базису (косинусу, синусу, касинусу) залежно від обсягу N. У пам'яті коефіцієнтів BK зберігаються значення коефіцієнтів базису та значення їхніх знаків, тобто у BK проводиться спрощення гармонічних коефіцієнтів. У блоці накопичувача (MAC) добуток обчислюється скалярний добуток:

$$X_i^k = X_i^{k-1} + h_k x_k \quad (6.1)$$

між гармонічними коефіцієнтами зі знаками h_k та вхідними або об'єднаними даними x_k , що подаються через мультиплексор M2. У блоці третьої пам'яті BM3 відбираються результати вихідних значень перетворення $X[n]$, $i=0, \dots, N-1$.

Побудова та швидкодія функціональних вузлів BM, AU, MAC обчислювального пристрою конкретніше визначаються технічними вимогами до виконання перетворення ДГП.

Ефективно використовуються MAC вузли у більшості сучасних цифрових сигнальних процесорах з виконанням операції (6.1) протягом одноразового такту.

Виходячи з методології обчислення ДГП на основі циклічних згорток [236], її можна подати у вигляді ГПД, де відбувається рух даних у ребрах від однієї операції вузла до іншої під час обчислення. Потенційно за таким підходом можна досягнути високого рівня паралелізму, оскільки потокове подання намагається вибрати максимальну паралельність серед усіх заданих обчислень.

У графі потоків даних виконання обчислення перетворення передбачає:

- об'єднання векторів вхідних даних $x(n)$;
- обчислення векторів абсолютних значень гармонічних коефіцієнтів перетворення та відповідних їм векторів знаків;
- виконання швидких циклічних згорток над векторами об'єднаних вхідних даних та векторами гармонічних коефіцієнтів;

– об’єднання векторів результатів згортки у вихідні дані X(n) перетворення.

Приклад узагальненого ГПД для обчислень за твірним масивом $P(n)=(1,2,4,8,5,10)(3,6,9)$ подано на рис. 6.4. Частина ГПД відповідає обчисленню за структурою базисної матриці аргументів, що містить набір підматриць вигляду:

| | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|---|---|---|--|---|-----|----|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 5 | 10 | 3 | 6 | 9 | | | | |
| 2 | 4 | 8 | 5 | 10 | 1 | 6 | 9 | 3 | | | | |
| 4 | 8 | 5 | 10 | 1 | 2 | 9 | 3 | 6 | | | | |
| 8 | 5 | 10 | 1 | 2 | 4 | 3 | 6 | 9 | | | | |
| 5 | 10 | 1 | 2 | 4 | 8 | 6 | 9 | 3 | | | | |
| 10 | 1 | 2 | 4 | 8 | 5 | 9 | 3 | 6 | | | | |
| 3 | 6 | 9 | 3 | 6 | 9 | 9 | 3 | 6 | | | | |
| 6 | 9 | 3 | 6 | 9 | 3 | 3 | 6 | 9 | | | | |
| 9 | 3 | 6 | 9 | 3 | 6 | 6 | 9 | 3 | | | | |
| | | | | | | | | | | A | | b |
| | | | | | | | | | | | | b |
| | | | | | | | | | | | b b | b' |

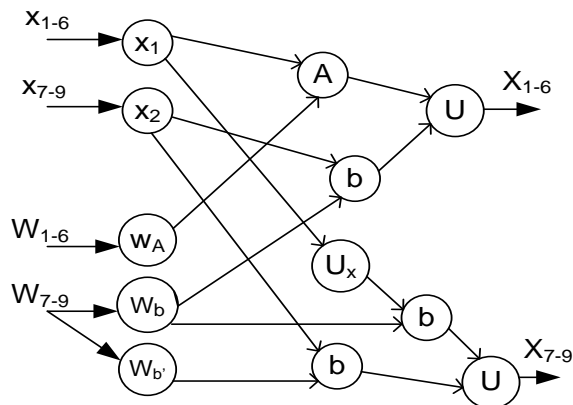


Рисунок 6.4 – Граф потоку даних за твірним масивом $P(n)=(1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10)(3\ 6\ 9)$

Відповідно до структури базисної матриці аргументів вузли задають у ГПД циклічні згортки (A – 6-точкові, b – 3-точкові) або об’єднання векторів даних (Ux – вхідних даних з 6-точкових у 3-точкові) та об’єднання результатів згорток (U – 6, 3 елементні).

ГПД поділяється на рівні дрібних структурних одиниць (fine-grain) та макро (coarse-grain). Ефективність даних структурних одиниць багато у чому визначається формулюванням завдань у термінах паралельних і незалежних операцій. На перший план виходить не ефективна побудова процедури

обчислень, а виявлення взаємозв'язків між потоками даних у завданні. У результаті взаємозв'язків між потоками даних запропонований підхід має переваги у гнучкості розпаралелення та локальній синхронності виконання циклічних згорток. Застосування локально синхронних систем у перспективі більш привабливе, і глобальна синхронізація у міру можливості повинна виключатись. Подальшим розвитком реалізації ДГП є гібридні обчислювальні системи, де виконується доповнення керування потоком команд до керування потоком даних [237] або використання нових програмно-апаратних рішень.

Розвиток програмування загального призначення GPGPU (General Programming on Graphics Processing Unit) логічно привів до виникнення технологій, направлених на ширше коло завдань. Нові покоління пристроїв (Device 0) з наявністю потужних мультипроцесорів, в яких розміщено на кристалі декілька десятків процесорних ядер зі своєю пам'яттю, кожне з яких одночасно виконує декілька сотень програмних потоків, стали потужною програмованою відкритою архітектурою подібно до сьогоднішніх центральних процесорів (рис. 6.5).

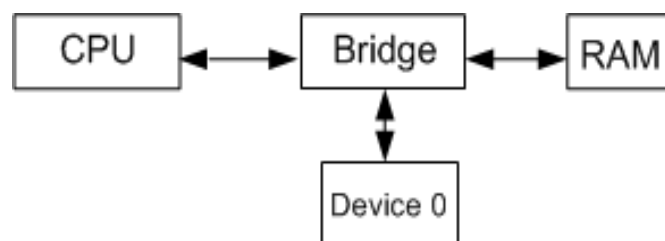


Рисунок 6.5 – Відкрита архітектура з під'єднанням до центральних процесорів високопродуктивних пристроїв

На центральному процесорі CPU (хост) (рис. 6.5) синтезуються алгоритми ДГП на основі циклічних згорток, а виконують після підготовки та пересилання даних й задавання параметрів запуску через міст (Bridge) на пристрої (Device 0). Дослідження виконання алгоритмів, розроблених за узагальненою методологією на відкритих обчислювальних архітектурах, є подальшим розвитком застосувань дійсних ДГП у багатьох прикладних завданнях [238].

Сучасні універсальні комп'ютерні системи використовують багатоядерні центральні процесори. Саме тому актуальним є питання розроблення алгоритмів, які би реалізували обчислення ДГП для довільної кількості вхідних елементів та забезпечували максимально ефективне використання наявних ресурсів комп'ютерної системи. Проаналізуємо виконання розробленого алгоритму ДКП-II у комп'ютерних системах (рис. 6.6) з чотири та двоядерними центральними процесорами з такою конфігурацією:

- Процесор: Intel(R) Core(TM)i-7 CPU 2600@4,2 GHz (рис. 6.6);
- Процесор: Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T5250@1,5 GHz
- ОС: Windows 7 x86;

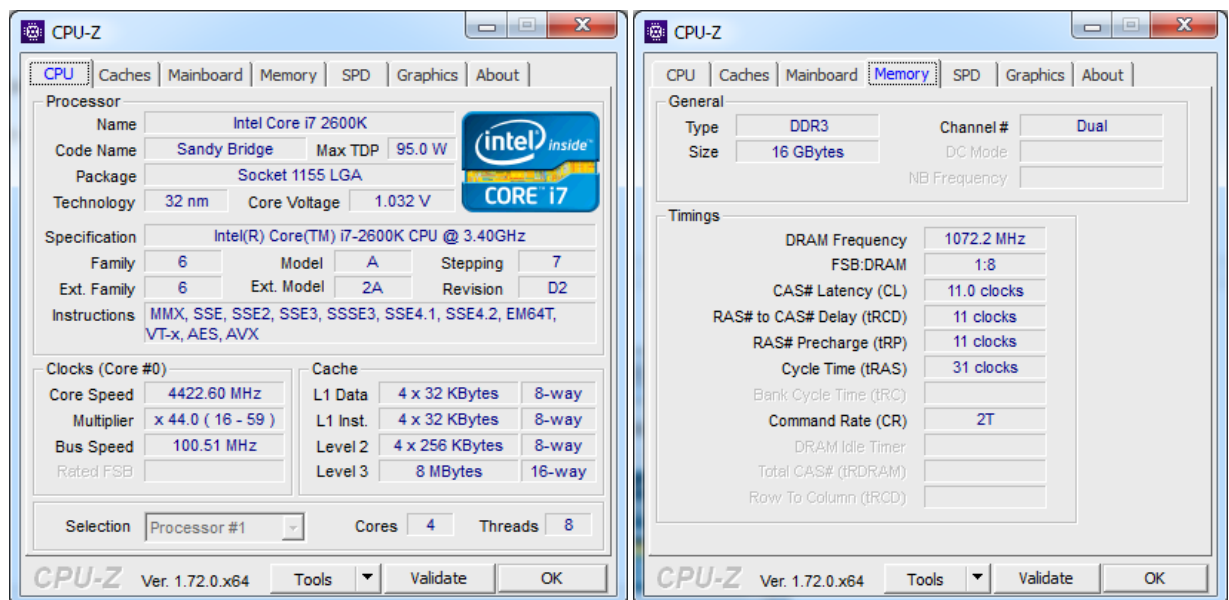


Рисунок 6.6 – Конфігурація багатоядерного центрального процесора Intel(R) Core(TM)i-7 CPU 2600

Результати виконання у тактах розробленого алгоритму ДКП-II у комп'ютерних системах з центральними процесорами (CPU) IC i-7 CPU 2600 та IC 2 Duo CPU T5250 та відношення прямий/швидкий розрахунок ДКП-II подано у табл. 6.1.

Таблиця 6.1 – Результати виконання ДКП-II у тактах

| N
обсяги | IC i-7 CPU 2600 | | | IC 2 Duo CPU T5250 | | |
|-------------|---------------------|----------------------------|-------------------|--------------------|---------------------|----------------------------|
| | пряме
обчислення | обчислення
перетворення | прямий
швидкий | прямий
швидкий | пряме
обчислення | обчислення
перетворення |
| 19 | 1 274 973 | 2914 | 437 | 552 | 2 645 451 | 4 788 |
| 20 | 1 294 043 | 2 934 | 441 | 529 | 2 651 715 | 5 013 |
| 21 | 1 307 241 | 1 577 | 829 | 847 | 2 676 168 | 3 159 |
| 22 | 1 365 968 | 3 107 | 439 | 493 | 2 660 850 | 5 391 |
| 23 | 1 307 942 | 3 279 | 398 | 377 | 2 119 221 | 5 616 |
| 24 | 1 332 709 | 1 862 | 715 | 869 | 2 011 122 | 2 313 |
| 25 | 1 302 946 | 3 382 | 385 | 451 | 2 689 182 | 5 958 |
| 26 | 1 313 854 | 3 775 | 348 | 417 | 2 704 401 | 6 471 |
| 31 | 1 850 273 | 4 766 | 388 | 362 | 2 756 583 | 7 614 |
| 32 | 1 747 120 | 4 633 | 377 | 524 | 2 754 477 | 5 247 |
| 74 | 1 809 870 | 14 443 | 125 | 158 | 3 780 351 | 23 913 |
| 139 | 2 873 012 | 40 326 | 71 | 95 | 6 440 967 | 67428 |
| 256 | 5 602 550 | 119 533 | 46 | 69 | 9 214 596 | 133 524 |
| 345 | 11 208 840 | 112 566 | 99 | 133 | 16 929 099 | 126 810 |
| 461 | 17 393 882 | 361 805 | 48 | 70 | 43 004 466 | 607 698 |
| 592 | 29 220 763 | 584 217 | 50 | 69 | 45 569 016 | 655 029 |
| 788 | 50 790 825 | 941123 | 54 | 66 | 113 940 189 | 1 712 997 |
| 932 | 70 030 336 | 1 494 279 | 47 | 51 | 123 131 241 | 2 412 036 |

Комп'ютерна система з центральними процесором (CPU) IC i-7 CPU 2600 є більш ніж вдвічі потужніша за своїми обчислювальними можливостями ніж комп'ютерна система з CPU IC 2 Duo CPU T5250 (рис. 6.6). Відповідно, кількість тактів виконання повинна бути меншою. Для обсягів перетворення $N=19 \div 74$ кількість тактів є приблизно вдвічі менша, а для обсягів перетворення $N > 100$ кількість тактів наближується до рівності значень. На точне визначення тактів

впливає зміна тактів на підкачування даних у кеш-пам'ять у процесі обчислень ДКП. Відношення кількості тактів виконання ДКП-II (стовпці прямий/швидкий у табл. 6.1) прямого обчислення і розробленого обчислення перетворення для комп'ютерних систем CPU IC i-7 CPU 2600 та CPU IC 2 Duo CPU T5250 приблизно збігаються. Це свідчить, що в алгоритмах обчислення ДГП на основі циклічних згорток для довільних обсягів відбувається ефективно використання наявних ресурсів універсальної комп'ютерної системи.

6.2 Гнучкість узагальненої методології синтезу алгоритмів ДГП та їх обчислень на основі циклічних згорток

6.2.1 Ефективне обчислення твірних масивів для синтезу алгоритмів ДГП на основі циклічних згорток

Основою цілочисельного синтезу алгоритму ДГП є твірний масив $P(n)$, в якому сконцентровано всю інформацію про блочно-циклічну структуру ядра перетворення. Для його визначення:

- обчислюємо послідовність аргументів $a_{ij} = (i \times j)$, де i – номер рядка, j – номер стовпця, що відповідають певним рядкам або стовпцям квадратної матриці аргументів базису, відповідно принципу розробленої узагальненої методології;

- спрощуємо $(a_{ij} \bmod T)$ за властивістю періодичності базису ДГП цілочисельні аргументи;

- визначаємо підстановку з натурального ряду та обчисленою послідовністю аргументів у вигляді *циклічного розкладу підстановки*, тобто твірною масиву $P(n)$.

Для формування твірною масиву $P(n)$ за повним перебиранням у максимальному випадку необхідно до $T \cdot (T/3)$ доступів до елементів підстановки, адже $(T/2)$ відповідає максимальній кількості підмасивів [159].

Тобто, обчислювальні затрати залежні від періоду T , кратному обсягу N перетворення ДГП. Такі затрати на виконання формування $P(n)$ подано у табл.6.2. У процесі синтезу алгоритму ДКП-II різних обсягів N для визначення твірного масиву застосовується повний перебір всіх елементів підстановки.

Обчислення твірного масиву $P(n)$ для алгоритму ДКП-II для різних обсягів виконуються швидше (табл. 6.2) у чотирьохядерному процесорі CPU IC i-7 CPU 2600 порівняно з менш потужнішим двоядерним CPU IC 2 Duo CPU T5250.

Таблиця 6.2 – Результати виконання формування твірного масиву $P(n)$ у тактах

| N
обсяги | Визначення твірного масиву (такти) | |
|-------------|------------------------------------|--------------------|
| | IC i-7 CPU 2600 | IC 2 Duo CPU T5250 |
| 19 | 69 197 | 59 562 |
| 20 | 84 713 | 102 780 |
| 21 | 81 751 | 115 542 |
| 22 | 41 272 | 75 528 |
| 23 | 35 523 | 59 877 |
| 24 | 85 012 | 79 605 |
| 25 | 66 906 | 79 029 |
| 26 | 107 609 | 111 735 |
| 31 | 48 531 | 75 573 |
| 32 | 44 429 | 53 811 |
| 74 | 182 599 | 286 812 |
| 139 | 203 640 | 339 111 |
| 256 | 616 630 | 716 535 |
| 345 | 2 725 112 | 3 209 544 |
| 461 | 1 348 780 | 2 278 269 |
| 592 | 4 506 862 | 5 169 330 |
| 788 | 4 592 091 | 8 203 878 |
| 932 | 6 333 326 | 10 995 885 |

Відповідно до методології використання твірною масиву $P(n)$ зводить обчислення ДГП до обчислення циклічних згорток, завдяки тому, що базисна матриця набуває вигляду блочної структури з набором ганкелевих циркулянтів. За алгоритмом Рейдера [43], переіндексація рядків та стовпців базисної матриці проводиться на базі послідовності натуральних степенів примітивного елемента α . Використовують примітивні елементи α_i тільки для *простого* обсягу перетворення ДГП. Примітивний елемент визначають за виразом

$$\alpha_i^n \bmod N = 1, n = \max \varphi(N), \quad (6.2)$$

де $n = \varphi(N)$ функція Ейлера (2.35), або вибирають за наперед визначеними таблицями [239], причому він може бути і не один.

Порівняння обчислювальних затрат на визначення твірною масиву та послідовності $\alpha^i \bmod N$ ($i=0,1,\dots,N-1$) натуральних степенів примітивного елемента α розглянемо на прикладі для формування ганкелевої матриці значень аргументів базису ДПХ-I обсягу перетворення $N=11$.

Ганкелева матриця ДПХ-I сформована з використанням послідовності переставлень за примітивним елементом $\alpha = 7$, що визначається обчисленнями цілих степенів α за модулем

$$(a_i = \alpha^i = 7^i \bmod 11, i=1,2,\dots,10);$$

$$a_1=7^1=7; \quad a_2=(7^2) \bmod 11=5; \quad a_3=(7^3) \bmod 11=2; \quad a_4=(7^4) \bmod 11=3; \quad a_5=(7^5) \bmod 11=10;$$

$$a_6=(7^6) \bmod 11=4; \quad a_7=(7^7) \bmod 11=6; \quad a_8=(7^8) \bmod 11=9; \quad a_9=(7^9) \bmod 11=8;$$

$$a_{10}=(7^{10}) \bmod 11=1.$$

Визначення твірною масиву $P(n)$ за алгоритмом без звертань до підстановки виду

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} k & 1 & 2 & 3 & \dots & j \\ \hline r & a_1 & a_2 & a_3 & & a_j \end{array},$$

а через значення, де кожен наступний член циклічного розкладу обчислюється на основі попереднього 1 , $a_1=(a_1+0*a_1) \bmod N$, $a_2=(a_1+1*a_1) \bmod N$, $a_3=(a_2+2*a_1) \bmod N$, $a_4=(a_3+3*a_1) \bmod N, \dots, (a_j=1)$, але для цього потрібно виконати $(N-2)$

операцій за модулем, враховуючи особливість визначення a_i елементів рядків аргументів базисних функцій залежно від видів ДГП.

Наприклад, у ганкелевій матриці ДПХ-I, сформованій з використанням переставлень за твірним масивом $P(n)$, визначеним за підстановкою між 1 та 7 рядком (табл. 6.3), використано для визначення елементів сьомого рядка обчислення додавання за модулем:

$$a_{7,1}=7; a_{7,2}=(a_{7,1}+7) \bmod 11=3; a_{7,3}=(a_{7,2}+7) \bmod 11=10; a_{7,4}=(a_{7,3}+7) \bmod 11=6; \\ a_{7,5}=(a_{7,4}+7) \bmod 11=2; a_{7,6}=(a_{7,5}+7) \bmod 11=9; a_{7,7}=(a_{7,6}+7) \bmod 11=5; a_{7,8}=(a_{7,7}+7) \\ \bmod 11=1; a_{7,9}=(a_{7,8}+7) \bmod 11=8; a_{7,10}=(a_{7,9}+7) \bmod 11=4.$$

Таблиця 6.3 – Підстановка між 1 та 7 рядком

| $i*j$ | 1: | 2: | 3: | 4: | 5: | 6: | 7: | 8: | 9: | 10: |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 7: | 7 | 3 | 10 | 6 | 2 | 9 | 5 | 1 | 8 | 4 |

Підстановка за табл. 6.3 у вигляді циклу $P(n) = (1, 7, 5, 2, 3, 10, 4, 6, 9, 8)$ формується 10-ма послідовними доступами. Отже, послідовність

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} = 1, 7, 5, 2, 3, 10, 4, 6, 9, 8$$

ефективніше визначається обчисленням 9 залишків за модулем від додавань та 9 доступами до їхніх значень порівняно з обчисленням такої самої кількості залишків за модулем від добутку в алгоритмі Рейдера [43].

Операції цілочисельного додавання виконуються у центральних процесорах комп'ютерних систем у чотири рази швидше порівняно з операціями цілочисельного множення [240] у відносному співвідношенні, поданому у табл.6.4.

Таблиця 6.4 – Вага тривалості виконання операцій у центральних процесорах

| Арифметичні операції (відносна тривалість) | | | | | |
|--|------------|-----------------------|----------|---------|-----------------------|
| додавання,
віднімання | порівняння | абсолютна
величина | множення | ділення | залишок
за модулем |
| 1 | 1 | 2 | 4 | 10 | 10 |

Отже, послідовність, сформована за твірним масивом $P(n)$, визначається за допомогою $(N-1)$ операції *додавання* за модулем і N *доступами* до обчислених значень. Аналогічна послідовність, сформована за примітивним елементом α , визначається за допомогою $(N-1)$ операції *множення* за модулем і пошуку примітивного елемента за формулою (6.2).

Це *підвищує ефективність* визначення послідовності переставлення за твірним масивом $P(n)$ більш ніж *втричі* за тривалістю порівняно з поширеною методикою за алгоритмом Рейдера [43].

Твірні масиви ДПХ-I обсягу перетворення $N=11$ визначені за підстановками між 1 та 3, 4, 5, 9 рядками, складаються з двох циклічних підмасивів, що містять непарні та парні елементи

$$\begin{aligned} &(1, 3, 9, 5, 4)(2, 6, 7, 10, 8), \\ &(1, 4, 5, 9, 3)(2, 8, 10, 7, 6), \\ &(1, 5, 3, 4, 9)(2, 10, 6, 8, 7), \\ &(1, 9, 4, 3, 5)(2, 7, 8, 6, 10). \end{aligned}$$

Наявність двох твірних підмасивів дає змогу розділити їх визначення на окремі частини або розпаралелити їх обчислення, збільшуючи вдвічі швидкість визначення послідовності переставлення. Також розширюється можливість варіантів організації обчислення ДПХ-I обсягу $N=11$, оскільки маємо два варіанти блочно-циклічних структур з обсягами 10 або 5-точкових циклічних згорток.

Для складеного обсягу перетворення $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$ твірний масив складається з набору твірних підмасивів

$$P(n) = (1, a_i, a_j, \dots, a_k) \dots (a_m, a_n, \dots, a_l) (a_s, a_t, \dots, a_v), \quad (6.3)$$

де $(1, a_i, a_j, \dots, a_k)$ основний підмасив, а решта підмасивів містять елементи, кратні множникам розкладу N_i ($i=2, 3, \dots, k$). У роботах [241], [242] розроблено підхід та реалізовано алгоритм розкладу числа на прості множники з використанням залишків кожного вагового коефіцієнта двійкового значення числа N , що дозволяє ефективно обчислити весь набір простих значень дільників величини розкладу. Відповідно до поданих у табл. 6.1 та 6.2 обсягів,

вони розкладаються на прості множники (табл. 6.5) у результаті виконання розробленого алгоритму.

Кількість елементів L у твірному підмасиві, що кратні простим множникам N_i , визначається за умовою

$$(L * N_i) < N, \quad L=1, 2, 3, \dots \quad (6.4)$$

Таблиця 6.5 – Розклад значення обсягу на прості множники

| Обсяг | Канонічний розклад |
|-------|--|
| N=74 | Enter number 0..65535 >74
Canon multipliers: 2 37 |
| N=139 | Enter number 0..65535 >139
Canon multipliers: 139 |
| N=256 | Enter number 0..65535 >256
Canon multipliers: 2 2 2 2 2 2 2 2 |
| N=345 | Enter number 0..65535 >345
Canon multipliers: 3 5 23 |
| N=461 | Enter number 0..65535 >461
Canon multipliers: 461 |
| N=592 | Enter number 0..65535 >592
Canon multipliers: 2 2 2 2 37 |
| N=788 | Enter number 0..65535 >788
Canon multipliers: 2 2 197 |
| N=932 | Enter number 0..65535 >932
Canon multipliers: 2 2 233 |

Отже, послідовно або паралельно окремими частинами можна визначити набір підмасивів твірною масиву $P(n)$ з елементами кратними простим множникам розкладу N_1, N_2, \dots, N_k . Підстановка для них визначається за рядками

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} k & 1 & 2 & 3 & \dots & j \\ \hline r & a_1 & a_2 & a_3 & & a_j \end{array} \quad (a_k) \bmod N_i = (a_{k-1} + r * N_i) \bmod N_i, \quad (6.5)$$

$$k=2,3,\dots,L; \quad a_1 = r * N_i,$$

де r – номер рядка матриці аргументів, N_i – множник розкладу, k – номер порядку послідовності елементів підстановки.

Наприклад, у процесі синтезу алгоритму ДКП-I обсягу $N = 15 = 3 \times 5$ визначаються циклічні підмасиви (6, 12, 9, 3) і (10, 5) з елементами, кратними множникам 3 і 5 за послідовними обчисленнями додавань за модулем:

$$\begin{array}{c|cccc} \backslash k & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & a_1=6 & a_2=12 & a_3=3 & a_4=9 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \backslash k & 1 & 2 \\ \hline 2 & a_1=10 & a_2=5 \end{array}$$

$$a_k = (a_{k-1} + 2 \cdot 3) \bmod 15, \quad k=2, 3, 4. \qquad a_k = (a_{k-1} + 2 \cdot 5) \bmod 15, \quad k=2.$$

Отже, синтез алгоритму ДГП для складеного обсягу перетворення $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$ виконується через обчислення k – незалежних частин твірних підмасивів, що у випадку розпаралелення обчислень пришвидшує приблизно до $3k$ -разів виконання етапу формування твірного масиву [243]-[245].

6.2.2 Аналіз блочно-циклічних структур базису ДГП на основі твірного масиву

Етап аналізу базисної матриці ДГП виконується за $P(n)$ твірним масивом, в якому сконцентровано всю інформацію про блочно-циклічну структуру ядра перетворення. Подальше використання спрощеного твірного масиву та масиву знаків є завершальним приведенням до блочно-циклічних структур базисної матриці ДГП. Найважливіший параметр твірного масиву k кількість підмасивів у твірному масиві та L кількість елементів у кожному з підмасивів. Комбінація цих параметрів задає різноманітні блочно-циклічні структури базису перетворення ДГП.

Аналіз випадку $k=1$, L – довільне ціле задає твірний масив:

$$P(L) = (n_1, n_2, n_3, \dots, n_L). \qquad (6.6)$$

Базисна матриця у результаті переформування за твірним масивом (6.6) задає для ДГП добуток *ганкелевої* матриці на відповідні вхідні значення перетворення і відповідає *оберненій циклічній згортці* або циклічній кореляції

$$\begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ \dots \\ X(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(1) & w(2) & w(3) & \dots & w(L) \\ w(2) & w(3) & \dots & w(L) & w(1) \\ w(3) & \dots & w(L) & w(1) & w(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & w(L) & w(1) & w(2) & w(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \dots \\ x(L) \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Гнучкість обчислення згортки [246] базується на її основних властивостях комутативності (6.8), дистрибутивності (6.9), асоціативності (6.10)

$$x1(t) \otimes x2(t) = x2(t) \otimes x1(t); \quad (6.8)$$

$$x1(t) \otimes [x2(t) + x3(t)] = x1(t) \otimes x2(t) + x1(t) \otimes x3(t); \quad (6.9)$$

$$x1(t) \otimes [x2(t) \otimes x3(t)] = [x1(t) \otimes x2(t)] \otimes x3(t),$$

$$a[x1(t) \otimes x2(t)] = [a x1(t)] \otimes x2(t) = x1(t) \otimes [a x2(t)], \quad (6.10)$$

де \otimes – згортка, $x1(t)$, $x2(t)$, $x3(t)$ – функції згортки, a – дійсне або комплексне число.

Традиційно, і як для даного підходу, в швидких алгоритмах ДГП вживають термін “циклічна згортка”. Згортку можна отримати з циклічної кореляції простим оберненням індексу в часі для вхідної та вихідної послідовностей перетворення. Проведенням зміни послідовності елементів рядків навпаки, крім першого, отримаємо циклічну згортку:

$$\begin{bmatrix} X(1) \\ X(L) \\ X(3) \\ \dots \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(1) & w(L) & \dots & w(3) & w(2) \\ w(2) & w(1) & w(L) & \dots & w(3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & w(3) & w(2) & w(1) & w(L) \\ w(L) & \dots & w(3) & w(2) & w(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(L) \\ \dots \\ x(3) \\ x(2) \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Твірні масиви (6.6) отримують у процесі синтезу алгоритмів ДГП для *простих* значень обсягів N , що приводять до обчислення тільки *однієї* циклічної згортки.

Наприклад, у п'ятому розділі (пункт 5.2.1) для ДПХ-I обсягу $N=7$ отримали циклічну зліва матрицю H_{ap}^l за твірним масивом $P(6) = (1, 3, 2, 6, 4, 5)$ що приводять до обчислення тільки однієї циклічної згортки. Аналогічну матрицю ДПХ-I обсягу $N=7$ також отримали у роботі [247], використовуючи для переформування базисної матриці примітивний елемент $a=3^s$, $s = 0, 1, \dots, 5$ за

методом Рейдера [43]. Реалізація цього ДПХ-I обсягу $N=7$ з використанням розподіленої арифметики для програмованих логічних матриць (FPGA) показала зменшення площі мікросхеми через використання зменшеної кількості шарів.

Аналогічні показники зменшення площі використання та затримок відзначають у роботах [248]-[251], де реалізовано ДГП у вигляді циклічних згорток для малих обсягів ($N=4,5,6,7,8$) з використанням розподіленої арифметики для програмованих логічних матриць (FPGA) та спеціалізованих інтегральних схем (ASIC).

Аналіз випадку $k=2$, $L+L$ – число елементів у кожному з підмасивів, задає твірний масив вигляду:

$$P(L) = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L}) (n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L}). \quad (6.12)$$

Наприклад, для обчислення $N=6=2 \times 3$ -точкової циклічної згортки у випадку $k=2$, $L=3$ матимемо блочно-циклічну структуру

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(1) \\ X(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(0) w(4) w(2) | w(3) w(1) w(5) \\ w(4) w(2) w(3) | w(1) w(5) w(0) \\ w(2) w(3) w(1) | w(5) w(0) w(4) \\ w(3) w(1) w(5) | w(0) w(4) w(2) \\ w(1) w(5) w(0) | w(4) w(2) w(3) \\ w(2) w(0) w(1) | w(2) w(0) w(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(4) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(1) \\ x(5) \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

або запишемо (6.16) у вигляді блочної 2-точкової циклічної згортки:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_0 & W_1 \\ W_1 & W_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

що обчислюється за формулами

$$\begin{aligned} M_1 &= (W_0 + W_1)/2 (x_0 + x_1); \\ M_2 &= (W_0 - W_1)/2 (x_0 - x_1); \\ X_0 &= M_1 + M_2; \quad X_1 = M_1 - M_2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Для ДКП-IV обсягу $N=7$ отримуємо формування за твірним масивом

$$P(14) = (1,3,9,27,25,19) (5,15,17,23,13,11) (0,0);$$

$$P'(14) = (1,3,9,1,3,9) (5,13,11,5,13,11) (7,7)$$

блочно-циклічної матриці відповідно твірному масиву (6.9) без врахування

підмасиву (0,0). Аналогічну блочно-циклічну матрицю також отримали у роботах [252, 253], де показано *можливість ефективної* реалізації, що полягає у зменшенні площі використання кристала та затримок у спроектованій мікросхемі за КМДП технологією. Аналіз робіт [113]-[123], що застосовують обчислення ДГП на основі ЦЗ, з використанням систолічних масивів у НВІС вказує на підвищення ефективності від 10% показника площа-затримка і відповідно зменшення потужності споживання на вибірку перетворення.

Отже, можна зробити висновок, що реалізація обчислення ДГП у вигляді мікросхем за узагальненою методологією приводить, відповідно до табл. 1.2, не претендуючи на розроблення компонентів з розподіленою арифметикою (distributed arithmetic, group distributed arithmetic, block-based group distributed arithmetic), до *підвищення ефективності* таких характеристик, як площа використання, час обчислення, потужність споживання, продуктивність.

Аналіз та дослідження блочно-циклічних структур, що визначаються параметрами твірною масиву k (кількості підмасивів у твірному масиві) та L (числа елементів у кожному з підмасивів), задає множину варіантів:

$k = 2, L_1 = L_2$; $k > 2, L_1 = L_2 = L_3 = \dots = L_n$; $k > 2, L_1 > L_2 > L_3 > \dots > L_n$; $k > 2, L_1 = L_2 > L_3 > \dots > L_n$; та інші.

Варіанти цих параметрів визначають різноманітні блочно-циклічні структури базису перетворення, які надалі досліджуватимуться для визначення взаємозв'язку [254] між різними обсягами та перетвореннями класу Фур'є. Так, у пункті 3.4.3 розглянуто для обсягів $N=2^n$ характерні ідентичні блочно-циклічної структури матричного базису ДКП-II/III. Наприклад, для ДКП-II обсягу $N=8=2^3$ за твірним масивом $H(15)=H_1(2^3)H_2(2^2)H_3(2^1)H_4(2^0)$ подано блочно-циклічну структуру (рис. 6.7) розмірністю $(N \times 2N-1)$, що складається з ганкелевих підматриць.

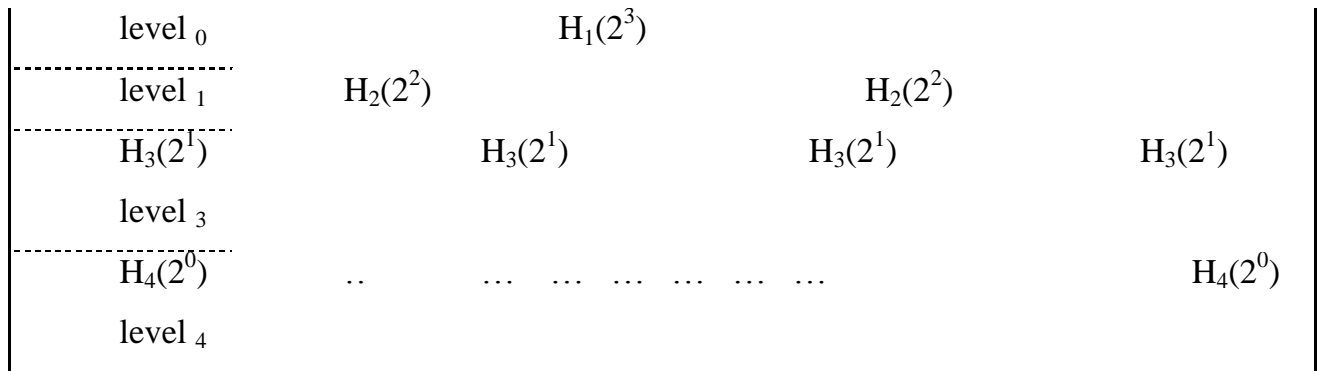


Рисунок 6.7 – Блочно-циклічна структура ДКП-II обсягом N=8

Відповідно до блочно-циклічної структури ДКП-II для обсягів $N=2^n$, кожен її рівень (level_i) містить 2^i ганкелевих підматриць $H_{i+1}(2^{n-i})$, де $i=0(1), \dots, n-1$ число рівнів. Структурна схема (рис. 6.8) поєднання набору конвольверів для ДКП-II обсягом $N=2^n$, що можуть входити до складу конвольвера найбільшого обсягу 2^{n-1} .

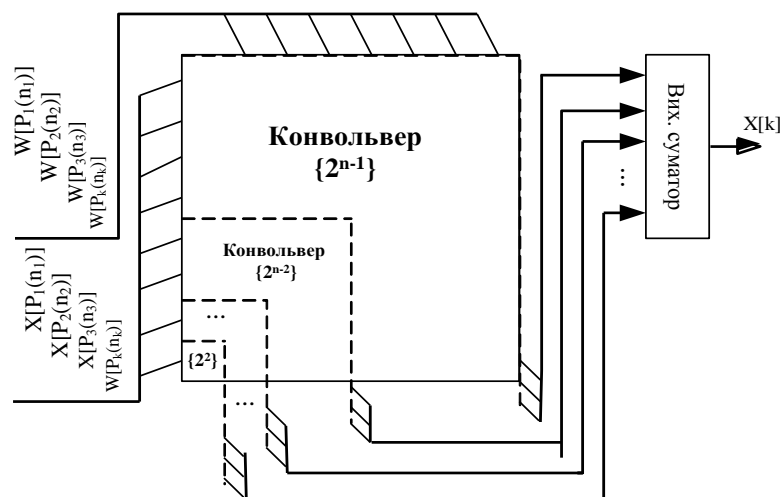


Рисунок 6.8 – Структурна схема поєднання набору конвольверів для ДКП-II обсягом $N=2^n$

Аналогічно, для обсягів $N=q^n$, де q просте число більше двох, характерно однотипове нарощення блочно-циклічної структури матричного базису основних чотирьох видів дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі. Адже для цих обсягів відповідні твірні масиви мають конкретний набір твірних підмасивів з певною кількістю елементів [255]. Наприклад, для ДКП-II

обсягів $N=q^n$ твірний масив складається з конкретного набору твірних підмасивів відповідно до виразу:

$$P\{2 \cdot q^n - 1\} = P_1\{q^n - q^{n-1}\} P_2\{q^n - q^{n-1}/q\} P_3\{q^{n-2} - q^{n-3}\} \dots P_n\{q^2 - q^1\} P_{n+1}\{1\} \\ P_{n+2}\{(q^n - q^{n-1})/2\} P_{n+3}\{(q^n - q^{n-1})/2\} P_{n+4}\{(q^{n-1} - q^{n-2})/(2q)\} P_{n+5}\{(q^{n-1} - q^{n-2})/(2q)\} \\ \dots P_{n+2n-3}\{(q^2 - q^1)/2\} P_{n+2n-2}\{(q^2 - q^1)/2\} \dots P_{n+2n-1}\{1\} P_{n+2n}\{1\}. \quad (6.16)$$

У підмасиві $P_i\{q^{n_i}\}$ вказано у фігурних дужках кількість елементів, що дорівнює цілому степеню простого числа q . Наприклад, для $q=3$ твірні масиви для ДКП-II обсягу $N=3^2, 3^3$ матимуть значення:

$$N=3^2=9$$

$$P\{2 \cdot 3^2 - 1\} = (0) P_1\{3^2 - 3^1=6\} P_2\{(3^2 - 3^1)/3=2\} P_3\{3^0\} P_4\{(3^2 - 3^1)/2=3\} P_5\{(3^2 - 3^1)/2=3\} \\ P_6\{(3^1 - 3^0)/2 = 1\} P_7\{(3^1 - 3^0)/2=1\};$$

$$Pr(17) = (0) (1 \ 5 \ 11 \ 17 \ 13 \ 7) (3 \ 15) (9) (2 \ 10 \ 14) (16 \ 8 \ 4) (6) (12);$$

$$Pr'(17) = (0) (1 \ 5 \ 7 \ 1 \ 5 \ 7) (3 \ 3) (9) (2 \ 8 \ 4) (2 \ 8 \ 4) (6) (6);$$

$$Sc(17) = (+) (+ \ + \ - \ - \ - \ +)(+ \ -) (0) (+ \ - \ -) (+ \ - \ +) (+) (-);$$

$$pColumnArray[] = (1 \ 5 \ 11 \ 17 \ 13 \ 7) (3 \ 15) (9);$$

$$pColumnSimpleArray[] = (1 \ 5 \ 7 \ 1 \ 5 \ 7) (3 \ 3) (9);$$

$$pColumnSignArray[] = (+ \ + \ - \ - \ - \ +) (+ \ -) (0).$$

Для ДКП-II обсягу $N=3^3=27$ твірні масиви мають вигляд:

$$P\{2 \cdot 3^3 - 1\} = P_1\{3^3 - 3^2=18\} P_2\{(3^2 - 3^1)/3=6\} P_3\{3^1 - 3^0=2\} P_4\{1\} P_5\{(3^3 - 3^2)/2=9\} P_6\{(3^3 - 3^2)/2=9\} \\ P_7\{(3^2 - 3^1)/2\} P_8\{(3^2 - q^1)/2=3\} P_9\{(3-1)/2=3\} P_{10}\{(3-1)/2=1\} P_{10}\{(3-1)/2=1\}.$$

$$Pr(53)=(0)(1,5,25,17,31,47,19,41,43,53,49,29,37,23,7,35,13,11)(3,15,21,51,39,33)(9,45)(27)$$

$$(2,10,50,34,8,40,38,28,32)(52,44,4,20,46,14,16,26,22)(6,30,42)(48,24,12)(18)(36);$$

$$Pr'(53) = (0)(1,5,25,17,23,7,19,13,11,1,5,25,17,23,7,19,13,11)(3,15,21,3,15,21)(9,9) \\ (27) (2,10,4,20,8,14,16,26,22)(2,10,4,20,8,14,16,26,22)(6,24,12)(6,24,12)(18)(18)(0),$$

$$Sr(53)=(+)(+, +, +, +, -, -, -, +, -, +, +, +, +, -, -, -, +, -) (+, +, -, +, +, -)(+, +) (+1)$$

$$(+, +, +, +, -, -, +, -, -)(-, -, -, -, +, +, -, +, +) (+, +, +)(-, -, -)(+, -).$$

Порівняння твірних масивів $P\{17\}$ обсягу $N=3^2$ та $P\{53\}$ обсягу $N=3^3$, що складаються з набору підмасивів із вказаною у фігурних дужках кількістю елементів у них, відповідно

$$P\{17\} = (0) \quad P_1\{6\} P_2\{2\} P_3\{1\} \quad P_4\{3\} P_5\{3\} P_6\{1\} P_7\{1\};$$

$$P\{53\} = (0) P_1\{18\} P_2\{6\} P_3\{2\} P_4\{1\} P_5\{9\} P_6\{9\} P_7\{3\} P_8\{3\} P_9\{3\} P_{10}\{1\} P_{10}\{1\}.$$

Для обсягу $N=3^3=27$ закономірно, відповідно $P\{53\}$ і $P\{17\}$, збільшується блочно-циклічна структура базисної матриці відносно обсягу $N=3^2=9$ (табл. 6.6).

Таблиця 6.6 – Блочно-циклічна структура матриці спрощених аргументів і знаків базису ДКП II, $N=9$

| | 1: | 5: | 11: | 17: | 13: | 7: | 3: | 15: | 9: |
|------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|
| 1: | 1 | 5 | 7 | 1 | 5 | 7 | 3 | 3 | 9 |
| 5: | 5 | 7 | 1 | 5 | 7 | 1 | 3 | 3 | 9 |
| 11: | 7 | 1 | 5 | 7 | 1 | 5 | 3 | 3 | 9 |
| 17: | 1 | 5 | 7 | 1 | 5 | 7 | 3 | 3 | 9 |
| 13: | 5 | 7 | 1 | 5 | 7 | 1 | 3 | 3 | 9 |
| 7: | 7 | 1 | 5 | 7 | 1 | 5 | 3 | 3 | 9 |
| 3: | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 9 | 9 | 9 |
| 2: | 2 | 8 | 4 | 2 | 8 | 4 | 6 | 6 | 0 |
| 10: | 8 | 4 | 2 | 8 | 4 | 2 | 6 | 6 | 0 |
| 14: | 4 | 2 | 8 | 4 | 2 | 8 | 6 | 6 | 0 |
| 6: | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 | 0 | 0 |

Отже, базисні матриці ДГП для обсягів, що дорівнюють цілому степеню простого числа, мають закономірні особливості нарощення у структурі базисного перетворення і, відповідно, єдиний алгоритм обчислення у процесі збільшення степеня простого числа обсягу перетворення N . Тобто, ідентичні блочно-циклічні структури базису ДГП обсягів степеня q простого числа $N=q^n$ виключають у процесі синтезу алгоритму *етап* аналізу ідентичних підматриць, що пришвидшує процес синтезу алгоритму. Адже не виконуються m – обчислення значення та знака спрощених перших елементів циклічних підмасивів $s_{i,j}$, $c_{i,j}$ та $k(N/L_i)$ доступів до них для виконання порівнянь з визначення ідентичності у процесі аналізу структури базису перетворення, де k – кількість підмасивів обсягу L_i у твірному масиві $P(n)$, m – кількість підматриць $m \geq k^2$ у базисній матричній структурі.

Проаналізуємо блочно-циклічні структури, що визначаються параметрами твірному масиву k , L для конкретного обсягу N для різних видів ДГП. Наприклад, для ДКП-II, ДСП-II та ДПХ-II обсягу $N=8=2^3$ алгоритм обчислення на основі циклічних згорток визначається спрощеними твірними масивами, в

яких сконцентрована вся інформація про блочно-циклічну структуру ядра перетворення:

| | |
|--|---|
| <p>для ДКП-II</p> $Pc'(8) = (1,3,7,5,1,3,7,5),$ $Sc(8) = (+,+, -, +, -, -, +, -);$ $Pr'(16) = (1,3,7,5,1,3,7,5) (2,6,2,6)(4,4)(8)(0),$ $Sc(16) = (+,+, -, +, -, -, +, -) (+, +, -, -) (+,-) (0) (+1);$ | <p>для ДКП-III</p> $Pc'(16) = (1,3,7,5,1,3,7,5) (2,6,2,6)(4,4)(8)(0),$ $Sc(16) = (+,+,-,+,-,-,+,-) (+,+,-,-) (+,-) (0) (+1);$ $Pr'(n) = (1,3,7,5,1,3,7,5),$ $Sc(16) = (+,+,-,+,-,-,+,-);$ |
|--|---|

| | |
|---|---|
| <p>для ДСП-II</p> $Pc'(8) = (1,3,7,5,1,3,7,5) ,$ $Ss(8) = (+,+, +, -, -, -, -, +);$ $Pr'(16) = (1,3,7,5,1,3,7,5) (2,6,2,6)(4,4)(8,8);$ $Ss(16) = (+,+, +, -, -, -, -, +)(+,+,-,-)(+,+)(+1,-1);$ | <p>для ДСП-III</p> $Pc'(n) = (1,3,7,5,1,3,7,5)(2,6,2,6)(4,4)(8)(16),$ $Ss(n) = (+,+,+,-,-,-,-,+)(+,+,-,-) (+,+) (+1)(0);$ $Pr(n) = (1,3,7,5,1,3,7,5),$ $Ss(n) = (+,+,+,-,-,-,-,+);$ |
|---|---|

| | |
|--|--|
| <p>для ДПХ-II</p> $Pc'(8) = (1,5,1,5)(1,5,1,5);$ $Sh(8) = (+,-, -, +)(+,-, -, +);$ $Pr'(14) = (1,5,1,5)(1,5,1,5) (2,2) (6,6) (4)(0);$ $Sh(14) = (+,-, -, +)(+,-, -, +)(+,-)(0,0) (+1) (+1).$ | <p>для ДПХ-III</p> $Pc'(8) = (1,5,1,5)(1,5,1,5) (2,2) (6,6) (4,4)(0);$ $Sh(n) = (+,-,-,+)(+,-,-,+)(+,-)(0,0) (+1,-1) (+1);$ $Pr'(8) = (1,5,1,5)(1,5,1,5);$ $Sh(n) = (+,-, -, +)(+,-, -, +).$ |
|--|--|

У результаті аналізу узагальненої структури базисів ДКП-II, ДСП-II обсягу $N=8$ обчислення зводиться до виконання 4-, 2- й 1-точкової циклічних згорток та додатково для ДПХ-II ще однієї 1-точкової циклічної згортки, що відповідає операції добутку [256], [257].

За структурною схемою модуля обчислення ДКП-II, ДСП-II обсягу $N=8$ й ДПХ-II додатково підключається блок об'єднання вхідних даних - U_5 та блок Pr -CCU обчислення 1-точкової циклічної згортки (позначено пунктиром на, рис. 6.9). На рис. 6.9 позначено: BRC – буферний регістр коефіцієнтів базису; BRD – буферний регістр даних; OBRD – вихідний буферний регістр; CCU – блок 1-точкової циклічної згортки; U_i – блок об'єднання вхідних даних.

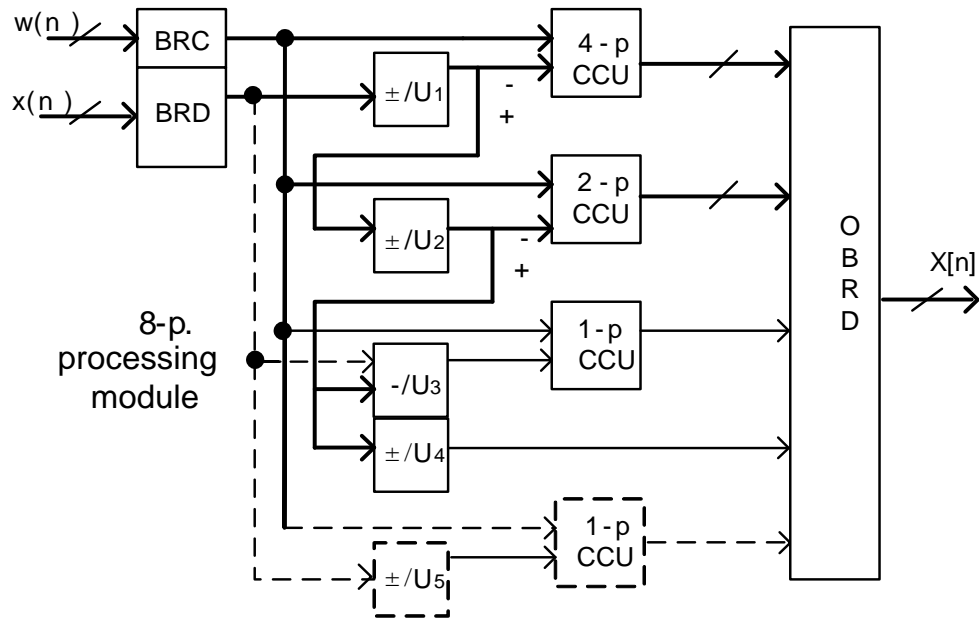


Рисунок 6.9 – Структурна схема обчислення ДПХ-II /ДКП-II/ ДСП-II обсягу $N=8$

Структурна схема модуля обчислення ДКП-III, ДСП-III обсягу $N=8$ й ДПХ-III аналогічна до структурної схеми модуля обчислення ДПХ-II / ДКП-II / ДСП-II з додатковим підключенням Σ – блока об'єднання прямих та інверсних за знаком результатів та блока 1р – ССУ обчислення 1-точкової циклічної згортки (обведено пунктиром, рис. 6.10)

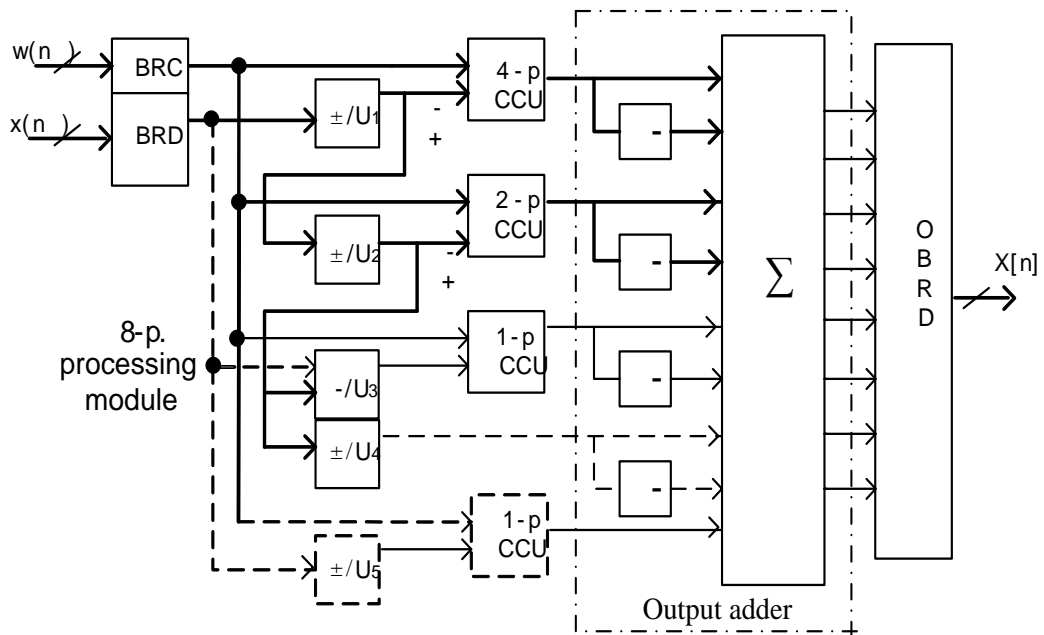


Рисунок 6.10 – Структурна схема обчислення ДПХ-III/ДКП-III/ДСП-III для обсягу $N=8$

Розглянемо розроблення багатofункціональної структурної схеми модуля обчислення для інших обсягів. Наприклад, для ДКП-I, ДСП-I та ДПХ-I обсягу $N=14$ алгоритм обчислення на основі циклічних згорток визначається спрощеними твірними масивами:

ДКП-I, $N=14$

$P(13) = (1, 5, 3, 13, 9, 11) (2, 10, 6) (4, 8, 12) (7);$

$P'(13) = (1, 5, 3, 1, 5, 3) (2, 4, 6) (4, 6, 2) (7),$

$Sc(13) = (+, +, +, -, -, -)(+, -, +)(+, -, -) (0);$

ДСП-I, $N=14$

$P(27) = (1,3,9,1,3,9)(5,13,11,5,13,11)(2,6,10,2,6,10)(4,12,8,4,12,8)(7,7)(14);$

$P'(27) = (1,3,5,1,3,5)(5,1,3,5,1,3)(2,6,4,2,6,4)(4,2,6,4,2,6)(7,7)(0),$

$Ss(27) = (+,+,+,-,-,-)(+,-,-,-,+,+)(+,+,-,-,-,+)(+,+,+,-,-,-)(+,-)(0);$

$P'(13) = (1, 3, 5, 1, 3, 5) (2, 6, 4, 2, 6, 4) (7) (0),$

$Ss(13) = (+,+,+,-,-,-)(+,+,-,-,-,+)(+)(0);$

ДПХ-I, $N=14$

$P(13) = (1\ 3\ 9\ 13\ 11\ 5) (8\ 10\ 2\ 6\ 4\ 12) (7);$

$P'(13) = (1\ 3\ 2\ 6\ 4\ 5) (1\ 3\ 2\ 6\ 4\ 5) (7),$

$Sh(13) = (+,+,+,-,-,+)(-, -, +, -, +, -) (-).$

У результаті аналізу спрощених твірних масивів та врахування їхніх масивів знаків у структурну схему модуля обчислення ДКП-I, ДСП-I та ДПХ-I обсягом $N=14$ входять блоки 6-точкової, 3-точкової та 1-точкової циклічних згорток.

Отже, виконання ДПХ-II /ДКП-II /ДСП-II перетворень ДГП для одного конкретного обсягу та зворотних їм (ДПХ-III/ДКП-III/ДСП-III) в одному модулі обчислення характеризується *ефективністю*, що зменшує затрати більш ніж вдвічі при апаратній або програмній реалізації. Перетворення I та IV видів ДПХ / ДКП /ДСП взаємозворотні, тобто їхні структурні схеми модулів для прямих та зворотних перетворень однакові.

Застосування ДГП, а точніше обчислення ДПХ-I на основі циклічних згорток є альтернативою обчислення ДПФ, що протягом десятиліть застосовують у багатьох прикладних завданнях. Взаємозв'язок ДПФ з ДПХ та їх

переваги та недоліки порівняно у роботі [208], аналогічно існує взаємозв'язок швидкого обчислення ДКП за допомогою ДПХ [194].

Дійсна та уявна частини перетворення Фур'є хоч і мають певний фізичний зміст, в якісному аналізі сигналів застосовуються достатньо рідко. Більше практичне значення ДПФ для аналізу мають модуль та фаза спектра (амплітудно-частотна і фазово-частотна характеристика) і спектр густини потужності сигналу [258]. Тобто, для дійсної послідовності вхідних даних між ДПФ ($F(k)$) і ДПХ-I $H(k)$ існує простий зв'язок

$$F(k) = 1/2[H^I(k) + H^I(N-k)] - j(1/2)[H^I(k) - H^I(N-k)], \quad (6.17)$$

де $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Амплітуда $A(k)$ та фаза $\varphi(k)$, яка визначається як відношення уявної та дійсної частин і може бути виражена за допомогою парної і непарної складової $H(k)$ дискретного перетворення Хартлі

$$A(k) = 1/2\sqrt{(H^I(k) + H^I(N-k))^2 + (H^I(k) - H^I(N-k))^2}, \quad (6.18)$$

$$\varphi(k) = \text{arctg} [H^I(k) - H^I(N-k)] / [(H^I(k) + H^I(N-k))] . \quad (6.19)$$

Обчислювальні затрати ДПХ-I та ДПФ подано у табл. 6.7

Таблиця 6.7 – Число операцій m -множення та a -додавання

| Обсяг | ДПХ-I | ДПФ на основі ДПХ-I | ДПФ [272, р.84] |
|-------|------------|-----------------------------|-----------------|
| N=14 | m=16, a=72 | 2m=2*16=32, 2a=2(72+28)=200 | m=32, a=172 |
| N=16 | m=10, a=62 | 2m=2*10=20, 2a=2(62+32)=188 | m=20, a=148 |

Результати подані у табл. 6.7 для ДПФ, належать до комплексних вхідних даних, а для ДПХ-I – для дійсних вхідних даних. Тому числа операцій множаться на два у другому стовпці для ДПХ-I та враховуються операції додавання, що дорівнюють $2N$, для переходу до визначення ДПФ [259]-[264].

Отже, за узагальненою методологією, обчислюючи ДПХ-I та використавши формулу (6.17), можна визначити дійсну та уявну частини ДПФ, витрачаючи при цьому на обчислення ДПХ-I співвимірну кількість операцій m -множення та додаткові операції a -додавання.

Варіативність твірних масивів сформованих за різними рядками матриці аргументів базисних функцій у процесі синтезу алгоритму дає можливість вибрати більше варіантів твірних масивів, що задають блочно-циклічні структури і, відповідно, гнучкіше проводити послідовно-паралельну організацію обчислення ДГП на основі циклічних згорток для кожного конкретного випадку.

6.3 Аналіз обчислювальних затрат ДГП на основі циклічних згорток

У загальному обчислювальні затрати розробленого підходу обчислення ДГП на основі циклічних згорток за кількістю операцій на етапі виконання визначаються виразом:

$$C = C_I^+ + \sum_i C_i^{X^+} + C_{III}^+, \quad (6.20)$$

де C_I^+ – додавання на етапі об'єднання вхідних даних; $C_i^{X^+}$ – додавання та добутки на етапі виконання μ циклічних згорток; C_{III}^+ – додавання на етапі об'єднання результатів циклічних згорток та деяких вхідних даних.

Вираз (6.1) не містить безпосередньої оцінки кількості арифметико-логічних операцій. Однак, до нього входить складова $C_i^{X^+}$, що враховує кількість базових операцій циклічних згорток, що є в алгоритмі обчислення ДГП. Обсяг та кількість циклічних згорток, структура їх взаємозв'язку при об'єднанні результатів згорток відіграють ключову роль у завданні виконання ДГП.

6.3.1 Оцінювання обчислювальних затрат ДГП на основі циклічних згорток

Найпростіше аналітичну оцінку обчислювальних затрат можна узагальнити для ДГП з обсягами $N=q^n$, де q – просте число і n – цілий степінь, що мають закономірне нарощення блочно-циклічних горизонтальних лінійок у структурі базису перетворення та структурі твірного масиву. Наприклад, отримані

аналітичні вирази та результати *ефективності* обчислювальних затрат алгоритмів ДКП-II обсягів $N=2^n$ (табл. 3.18, 3.19) для а) варіанта твірного масиву показують, що розроблені алгоритми мають *меншу кількість операцій множення* – на 30% порівняно з традиційними [105] для а) варіанта твірного масиву. У цьому випадку використовують алгоритми з мінімальною мультиплікативною складністю [20].

У роботі Вінограда [20] визначено мінімальну мультиплікативну складову (число добутоків) при обчисленні за алгоритмом на основі поліноміальних перетворень (табл. 6.8). Для багатьох обсягів згорток, особливо простих значень, мінімальної мультиплікативної складової досягають ціною значного збільшення кількості адитивних операцій.

Таблиця 6.8 – Алгоритми циклічної згортки з мінімальною кількістю добутоків

| Обсяг, n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 16 |
|--------------|---|----|----|--------|----|----|--------|----|-----|-----|----------|
| Множення, m | 2 | 4 | 5 | 8(10) | 8 | 13 | 12(14) | 16 | 30 | 46 | 33(35) |
| Додавання, a | 4 | 11 | 15 | 62(21) | 34 | 83 | 72(32) | 77 | 100 | 356 | 181(155) |

Мінімізоване обчислення враховує спеціальні алгоритми з найменшою кількістю добутоків (алгоритми Вінограда) [20]. Однак, за загальною кількістю операцій (добутоків і додавань) пряме обчислення у балансі $(m+a) = (2n^2-n)$ для *простих* обсягів n краще, а мінімізоване обчислення краще для складених обсягів n. Мінімізація добутоків у співвідношенні з загальною кількістю операцій не завжди виправдана, наприклад, у табл. 6.8 для обсягу $n=5$ загальна кількість операцій $S+M$ дорівнює 70(31), де у дужках подана альтернативна кількість операцій.

У процесі синтезу алгоритмів дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток у спрощеному твірному масиві можуть міститись підмасиви, що складаються з повторень груп спрощених елементів [265], [266].

Наприклад, алгоритм ДКП-II для обсягу $N=16$ синтезується за спрощеними твірними підмасивами з групами елементів, що поторюються,

$$P'(16) = (1,3,9,5,15,13,7,11,1,3,9,5,15,13,7,11),$$

$$S_c(16) = (+ + + - - + - + - - - + + - + -);$$

$P'(8) = (2,6,14,10,2,6,14,10)$, $S_c(8) = (+ + - + - - + -)$;

$P'(4) = (4,12,4,12)$, $S_c(4) = (+ + - -)$.

У випадку однієї з послідовностей циклічної згортки вигляду $h(n) = (h_1, h_2, \dots, h_m, h_1, h_2, \dots, h_m)$, де $n=2m$ повторення групи елементів визначає блочно-матричну структуру і відповідає (6.21) обчисленню згортки

$$\begin{pmatrix} h(m)h(m) \\ h(m)h(m) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(m) \otimes (x_0 + x_1) \\ h(m) \otimes (x_0 + x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

а у випадку послідовності $h(n) = (h_1, h_2, \dots, h_m, -h_1, -h_2, \dots, -h_m)$ з повторенням групи елементів з протилежним знаком відповідає (6.25) обчисленню згортки

$$\begin{pmatrix} h(m) - h(m) \\ -h(m)h(m) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(m) \otimes (x_0 - x_1) \\ -h(m) \otimes (x_0 - x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

де $h(m) = (h_1, h_2, \dots, h_m)$, $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x_1 = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{2m})$.

Обчислювальна складність циклічної згортки даної послідовності $O(n/2)$, визначається складністю виконання згортки вдвічі меншого обсягу. Відповідно, зменшується кількість операцій множення, що виконуються при обчисленні циклічних згорток.

Наприклад, обчислення циклічної згортки з мінімальною кількістю добутків (алгоритми Вінограда) [20] для парних обсягів подано у табл. 6.9.

Таблиця 6.9 – Алгоритми циклічної згортки з мінімальним числом добутків

| Обсяг | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 16 | n |
|-------------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|------|-----|-----|---|
| Мінімізоване обчислення | 2 | 4 | 5 | 8 | 8 | 13 | 12 | 16 | 30 | 46 | 33 | M |
| | 4 | 11 | 15 | 62 | 34 | 83 | 72 | 77 | <100 | 356 | 181 | S |

Обчислення циклічної згортки парних обсягів з повторенням групи елементів за формулами (6.21, 6.22) зменшує кількість з m до m' – добутків, з a до a' – додавань (табл. 6.10, рис. 6.11)

Таблиця 6.10 – Зменшення кількості операцій ЦЗ парних обсягів з повторенням групи елементів m', a' та без повторень m, a

| Обсяг | 16 | 10 | 8 | 6 | 4 | Обсяг | 16 | 10 | 8 | 6 | 4 |
|-------|----|----|----|---|---|-------|-----|-----|----|----|----|
| m | 33 | 30 | 12 | 8 | 5 | a | 181 | 100 | 72 | 34 | 15 |
| m' | 12 | 8 | 5 | 4 | 2 | a' | 80 | 67 | 19 | 14 | 6 |

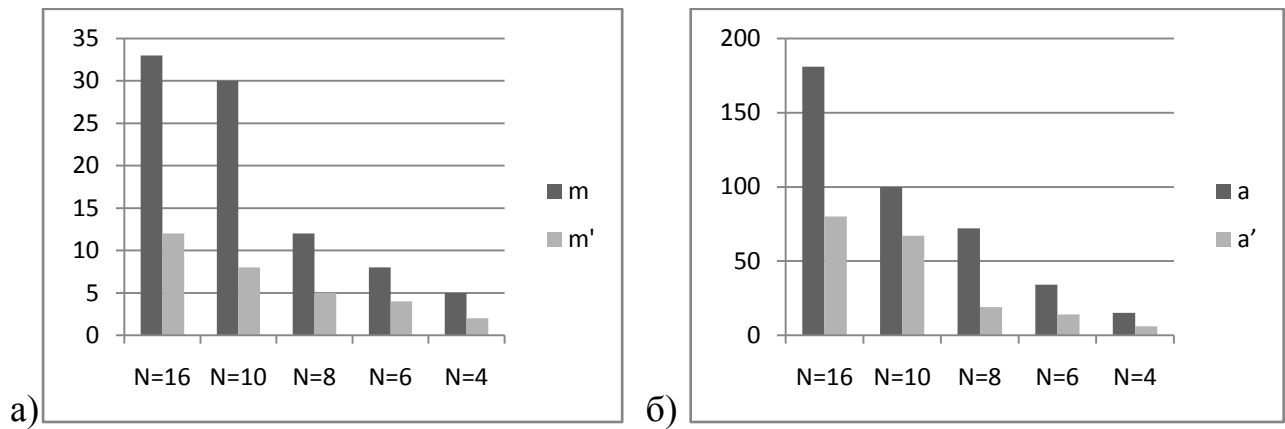


Рисунок 6.11 – Кількість операцій а) множення б) додавання циклічних згорток парних обсягів з повторенням групи елементів

Приклад порівняння (табл. 6.11) розробленого алгоритму ДКП-II обсягів $N=8, 16, 32$ із традиційними даними у роботах [76], [168], де кількість операцій m – множення, a – додавання, $s = (m+a)$ – сума, показує на конкретному порівнянні коротких обсягів *підвищення обчислювальної ефективності* узагальненої методології .

Таблиця 6.11 – Таблиця числа операцій ДКП-II

| N | Розроблені | | | Традиційні [168] | | |
|----|------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
| | $m(N)$ | $a(N)$ | $s(N)$ | $m(N)$ | $a(N)$ | $s(N)$ |
| 8 | 8 | 22 | 30 | 15 | 79 | 94 |
| 16 | 22 | 96 | 118 | 51 | 221 | 272 |
| 32 | 55 | 338 | 393 | 147 | 551 | 698 |

Відповідно до табл. 6.11 діаграму порівняння кількості операцій розробленого та традиційного алгоритмів [76], [168] подано на рис. 6.12, де m – множення, a – додавання, $s=m+a$.

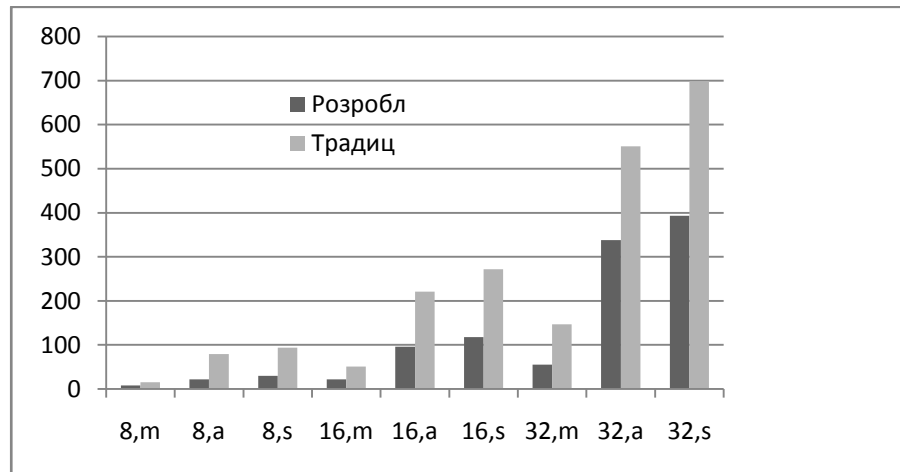


Рисунок 6.12 – Діаграма порівняння кількості операцій розробленого та традиційного алгоритмів ДКП-II для обсягів $N=8, 16, 32$

Для порівняння зведемо результати числа операцій з табл. 3.19, табл. 4.8 і табл. 5.12 в об'єднану табл. 6.12.

Таблиця 6.12 – Таблиця числа операцій прикладів ДГП та традиційних (m – множення, a – додавання)

| ДГП | Розроблені | Традиційні | ДГП | Розроблені | Традиційні |
|---------|------------------|------------------|-------------------|-----------------|------------|
| ДПХ-I | N=14, m=16, a=72 | N=16, m=12, a=64 | ДСП-I | N=8, m=6, a=22 | m=6, a=19 |
| | N=16, m=10, a=62 | | ДСП-II/III | N=8, m=8, a=30 | m=9, a=24 |
| ДПХ-II | N=8, m=10, a=26 | N=8, m=8, a=28 | ДСП-IV | N=8, m=14, a=46 | m=20, a=38 |
| | N=9, m=12, a=60 | N=9, m=19, a=38 | ДКП-II | N=8, m=8, a=22 | m=12, a=29 |
| ДПХ-III | N=8, m=10, a=26; | N=8, m=8, a=28 | | N=9, m=11, a=43 | m=10, a=56 |
| | N=11, m=40, a=61 | | N=27, m=41, a=289 | m=55, a=248 | |
| ДПХ-IV | N=5, m=5, a=20 | N=8, m=16, a=32 | ДКП-IV | N=8, m=14, a=46 | m=20, a=38 |
| | N=8, m=8, a=38 | | | N=9, m=14, a=56 | m=10, a=74 |

Як традиційні алгоритми (табл. 6.12) у результаті пошуку відібрано роботи, в яких отримано найкращі результати числа операцій виконання ДГП. Для видів ДПХ у першому стовпці (табл. 6.12) взято результати з робіт [206] для ДПХ-(II-IV), з [215] для ДПХ-II, з [216] для ДПХ-III, з [99] для ДПХ-I. Для інших видів ДГП взято результати з робіт [134] для ДСП-I, з [81] для ДСП-(II-IV), з [102] для ДКП-II та з [168] для ДКП-(II-IV). У цих роботах розроблено специфічні

алгоритми (з основою 2, з відповідною декомпозицією та інші), що стосуються конкретних обсягів. У табл. 6.12 в основному порівнюються тільки доступні результати традиційних алгоритмів для найпоширеніших обсягів, що дорівнюють цілій степені 2^n та 3^n . За табл. 6.12, маємо загалом співвимірний баланс операцій додавання та множення, а для перетворень, наприклад, ДПХ-I обсягу $N=16$ і ДКП-II обсягу $N=8$ обчислювальна ефективність краща за двома складовими. Це свідчить про необхідність подальших досліджень різних обсягів та видів перетворень на основі розробленої узагальненої методології синтезу алгоритмів ДГП.

6.3.2 Аналіз програмної реалізації обчислення ДГП на основі циклічних згорток

Програмна реалізація обчислення дискретних перетворень класу Фур'є розроблена багатьма провідними компаніями у вигляді бібліотек ефективних програм. Найпоширеніші програмні бібліотеки реалізації ШПФ (FFTW, Intel MKL, Intel IPP, CUDA CuFFT та інші) широко використовуються для розроблення різноманітного прикладного програмного забезпечення [267]. Адже вони сприяють максимально ефективному використанню обчислювальних ресурсів комп'ютерної системи, зменшують час реалізації проектів. Для обчислення ШПФ у бібліотеках програм використовують багато різних ефективних підходів розроблення алгоритмів, а вибір конкретного обчислення визначається відповідно до набору заданих параметрів та вхідних даних ДГП [268].

Обчислення ДГП на основі циклічних згорток за розробленою узагальненою методологією ефективно реалізується як на апаратному, так і на програмному рівнях. Програмне забезпечення обчислення ДГП на основі циклічних згорток характеризується простотою розділення частин алгоритму на послідовно зв'язані програмні модулі. Розглянемо особливості програмної

реалізації ДГП на основі циклічних згорток за блок-схемою (рис. 6.13) з використанням мови програмування високого рівня C++. Важливою частиною програмного забезпечення за цим узагальненим підходом є синтез алгоритму ДГП, в основу якого покладено операції цілочисельної арифметики [269].

Вхідними даними є N – обсяг перетворення та номери рядків і стовпців, за якими формується твірний масив.

Перший програмний модуль (рис. 6.13) містить визначення твірних масивів:

```
1. pRowArray, pRowSizeArray, pColumnArray, pColumnSizeArray
void DCT(float* pX, float* pY, const int N, const int XRow, const int YRow);
int BuildRowHash(short* pRowArray, short* pRowSizeArray, const int N, const int XRow, const int YRow);
bool isExist( short* pArr, int size, short test );
void FillBaseCol(short* pNRow, int R, int N);
```

```
int BuildColumnHash(short* pRowArray, short* pRowSizeArray, short* pColumnArray, short* pColumnSizeArray, const int N, int blockSizeCol);
bool isExist( short* pArr, int size, short test );
```

Задання змінних: $pRowArray$, $pRowSizeArray$, $pColumnArray$, $pColumnSizeArray$, відповідає твірним масивам $Pr(n)$ та його розмірності (L_1, L_2, \dots, L_k) , $Pc(n)$ та його розмірності (L_1, L_2, \dots, L_k) . Відповідно, функція `void DCT` містить функції побудови твірних масивів на основі циклічного розкладу підстановки.

Наступний програмний модуль визначає спрощені твірні масиви $Pr(n)$, $Pc(n)$, доповнені масивом знаків:

```
2. pColumnSimpleArray[i], pColumnSignArray[i], pRowSimpleArray[i], pRowSignArray[i].
```

Для виконання даної задачі розроблені функції

```
short** Create2DimArr( int x, int y );
char** Create2DimArrCh( int x, int y );
```

Важливим для ефективного обчислення ДГП є програмний модуль, що виконує пошук ідентичних підматриць у розширеній структурі, за масивами координат ідентичності: $pIdentRow[i][k]$, $pIdentSign[i][k]$.

Знаходження координат розміщення у базисні структурі ідентичних підматриць виконується за допомогою функцій:

```
void FindRange( int & dx, int& dy, short x, short* pArray, short* pSizeArray, int iArrSizeSize );
int FindPos( short x, short* pRowSimpleArray, int dx, int dy );
```

На основі отриманих результатів у попередніх програмних модулях виконується обчислення ДГП.

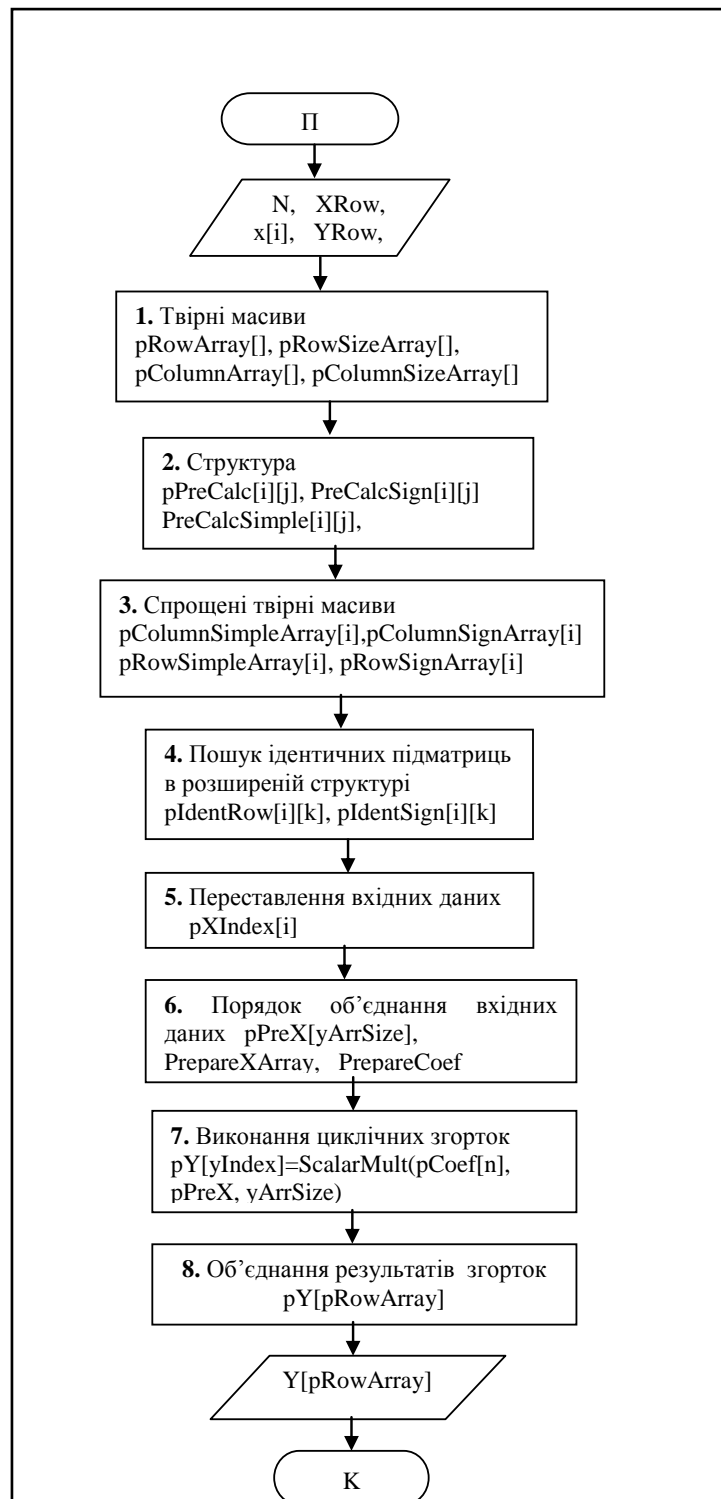


Рисунок 6.13 – Схема послідовності програмних модулів алгоритму синтезу та виконання ДГП на основі циклічних згорток

Переставлення вхідних даних $x(n)$ проводиться за масивом $pXIndex[i]$. Порядок об'єднання вхідних даних проводиться за масивом $pPreX[indexPreX]$, та $yArrSize$. Для виконання циклічних згорток викликається функція:

$pY[yIndex]=ScalarMult(pCoef[n], pPreX, yArrSize)$.

Об'єднання результатів згорток та одержання вихідних значень знаходиться у масиві $pY[pRowArray]$, з врахуванням знаків однакові або квазіоднакові: $pToUse[z]$; $firstSign$, $secondSign$. У додатку Г подано результати програмної реалізації етапів синтезу та обчислення ДКП-II для обсягу $N=20$.

Важливою частиною програмної реалізації за цим підходом є автоматичний синтез алгоритму ДГП (блоки 1-4, 6, 8), що використовує операції цілочисельної арифметики.

Відповідно до узагальненої методології розроблено для найскладнішого випадку тестове програмне забезпечення для синтезу швидких алгоритмів обчислення ДКП-II на основі ЦЗ. Після етапу ідентифікації ідентичних підматриць по горизонталі отримуємо (табл. 6.13, рис. 6.14) зменшення кількості операцій множення порівняно з прямим обчисленням $O(N^2)$.

Таблиця 6.13 – Кількість операцій m - множення обчислення ДКП-II

| N | N=7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|-------|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| m | 18 | 16 | 28 | 27 | 25 | 47 | 56 | 48 | 58 | 32 | 37 | 54 | 42 |
| N^2 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |

продовження таблиці 6.13

| N | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| m | 79 | 110 | 51 | 49 | 103 | 64 | 114 | 83 | 108 | 61 | 136 | 66 | 64 |
| N^2 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 | 900 | 961 | 1024 |

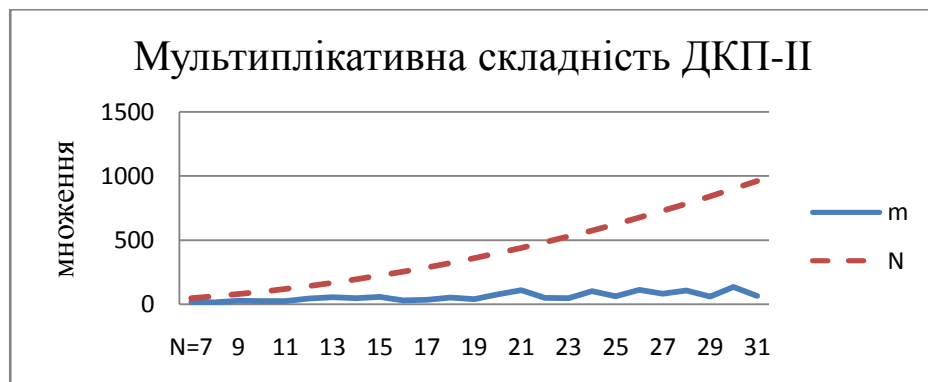


Рисунок 6.14 – Кількість операцій m – множення виконання ДКП-II після

етапу ідентифікації ідентичних підматриць для обсягів $N=7,8,\dots,31$

Приклад виведення етапів синтезу та обчислення ДКП-II обсягу $N=7$ в узагальненій програмній реалізації алгоритму.

Введіть обсяг: $N=7$; перший рядок: 0; другий рядок: 1;

```
pRowArray[]={ (0)(1,3,9)(2,6,10) (4,12,8)(5,13,11)(7) };
pRowSimpleArray[]={ (0)(1,3,5)(2,6,4)(4,2,6)(5,1,3)(7) };
pRowSignArray[]={ (+)(+,+,-)(+,+,-)(+,-,-)(+,-,-)(0) };
pColumnArray[]={ (1,3,9)(5,13,11)(7) };
pColumnSimpleArray[]={ (1,3,5)(5,1,3)(7) },
pColumnSimpleArray[]={ (+,+,+)(+,-,-)(0) };
```

Структура базису перетворення:

```
0 0 0  + + +  0 0 0
1 5 7  + + +  1 5 7
2 10 14 + - -  2 4 0
4 20 0  + - +  4 6 0
5 25 7  + + +  5 3 7
7 7 21  + + +  7 7 7
```

Переставлена послідовність вхідних даних: $x(n) = \{ 0, 1, 4, 2, 6, 5, 3 \}$

Об'єднання вхідних даних:

```
0 - 6, 1 - 5, 4 - 2;
0 + 6, 1 + 5, 4 + 2;
0 + 6, 1 - 5, 4 + 2;
0 - 6, 1 - 5, 4 - 2;
```

Виконання циклічних згорток та об'єднання результатів:

```
* 0 (рядок) *** 1 * (28) * 0 * (-0) * (1)          # y[0]=28
* 1 (рядок) *** 3 * (-6, -4, 2) * -2.44929e-016 * (1, 3, -5) # y[1]=-9.84466
* 3 (рядок)                                           # y[3]=-1.0056
* 5 (рядок)                                           # y[5]=0.267254
* 2 (рядок) *** 3 * (8, 8, 8) * -4 * (2, 6, -4)      # y[2]=0
* 6 (рядок)                                           # y[6]=0
* 4 (рядок)                                           # y[4]=0
```

Вихідні дані перетворення: $y[0]=28$;

```
y[1]= -9.844660881198; y[2]= 0.000000000000;
y[3]= -1.005598113974; y[4]= 0.000000000000;
y[5]= -0.267253750914; y[6]= 0.000000000000
```

з корекцією знаку в $y[4]$, $y[5]$.

Аналіз точності обчислення ДКП-II залежить від формату відображення даних. У сучасних комп'ютерних системах використовується стандарт IEEE 754. Обчислення ДКП-II виконується у форматі з подвійною точністю 64 біти, де вхідні та вихідні дані описуються у функції: `void DCT_II(double* x, double*y, const unsigned int N)`.

Зазначимо, що формат чисел з плаваючою крапкою пропускає початкові нулі у мантиї. Наприклад, значення коефіцієнта базису ДГП, що дорівнює 0.0000012345678, зберігатиметься у вигляді 0.12345678 eхr-5, загалом 8 цифр, а число 0.9999912345678 не будет нормалізуватись і займе 13 цифр. Тому втрата точності для синусних або косинусних коефіцієнтів та даних, що близькі до нульового значення, буде більшою порівняно з іншими значеннями. Однак у процесі виконання операцій з плаваючою крапкою порядки операндів вирівнюються. У швидких алгоритмах ДГП виконується менша кількість арифметичних операцій і, відповідно, похибка округлення результатів ДГП зменшується порівняно з прямими обчисленнями.

Аналіз програми виконання обчислення ДКП-II у форматі з подвійною точністю показує, що порівняно з прямим обчисленням добутку квадратної матриці на стовпець похибка виконання перетворення дорівнює 10^{-12} (рис. 6.15, третій стовпець). Тобто сучасні можливості комп'ютерних систем забезпечують широкий діапазон подання інформаційних даних із точністю мантиї 7 десяткових цифр для формату з одинарною точністю, 16 – для формату з подвоєною точністю, 20 – для формату з підвищеною точністю.

```

cmd.exe
C:\Windows\system32\cmd.exe
58.000000000000
1711.000000000000    1711.000000000000    0.000000000000
-681.605568816613    -681.605568816613    0.000000000000
-0.000000000000      -0.000000000000      0.000000000000
-75.659687633890     -75.659687633890     0.000000000000
-0.000000000000      -0.000000000000      0.000000000000
-27.183687056892     -27.183687056892     0.000000000000
0.000000000000       0.000000000000       0.000000000000
-13.827630605188     -13.827630605187     0.000000000000
0.000000000000       0.000000000000       0.000000000000
-8.330828227160      -8.330828227159      0.000000000001
-0.000000000000      -0.000000000000      0.000000000000
-5.547829984426      -5.547829984426      0.000000000000
0.000000000000       0.000000000000       0.000000000000
-3.946633348396      -3.946633348395      0.000000000000
0.000000000000       0.000000000001      0.000000000001
-2.941438828095      -2.941438828094      0.000000000001
0.000000000000       0.000000000001      0.000000000001
-2.269031798919      -2.269031798920      0.000000000000
0.000000000000       0.000000000000      0.000000000000
-1.796905288550      -1.796905288550      0.000000000000
0.000000000000       0.000000000001      0.000000000001
-1.452449998583      -1.452449998583      0.000000000000
0.000000000000       0.000000000000      0.000000000000
-1.193169822965      -1.193169822966      0.000000000001
0.000000000000       0.000000000000      0.000000000000
-0.992845902836      -0.992845902836      0.000000000000
0.000000000000       0.000000000000      0.000000000000
-0.834586399911      -0.834586399911      0.000000000000
0.000000000000       0.000000000000      0.000000000000
-0.707106781187      -0.707106781186      0.000000000000
0.000000000000       0.000000000001      0.000000000001
-0.602631800092      -0.602631800091      0.000000000001
0.000000000000       0.000000000001      0.000000000001
-0.515658635882      -0.515658635882      0.000000000000

```

Рисунок 6.15 – Результати прямого та швидкого обчислення ДКП-II обсягом $N=58$ та похибки обчислення між ними (третій стовпець)

Проаналізуємо обчислення ДКП-II з програмної бібліотеки чисельного перетворення Фур'є FFTW (Fastest Fourier Transform in the West) розробників М. Фріго та С. Г. Джонсона (Matteo Frigo, Steven G. Johnson) та розроблене тестове обчислення ДКП-II на основі циклічних згорток. FFTW – вільно доступна бібліотека [270], яка широко використовується у багатьох прикладних програмах, зокрема у математичному пакеті MatLab. Для обчислення ШПФ бібліотека FFTW використовує багато алгоритмів, а вибір конкретного визначається за набором заданих параметрів та вхідних даних. Бібліотеку спроектовано так, що використовують генератор коду, який оптимально розбиває заданий обсяг даних на менші частини, які швидко обчислюються.

Проаналізуємо FFTW3 версії 3.3.5, в якій відповідне налаштування «плану» задає виконання обчислення ДКП-II. Робота з FFTW полягає у тому, що спочатку відбувається побудова «плану», який оптимізує час обчислення для конкретного завдання. Відтак побудований план передається як параметр функціям, які безпосередньо відповідають за обчислення перетворення. Для виконання ДКП-II за допомогою бібліотеки FFTW3 створюємо план, тобто встановлюємо налаштування:

`fftw_plan p = fftw_plan_r2r_1d(nSize, in, out, FFTW_REDFT10, FFTW_ESTIMATE),`
де `r2r_1d` – створення дійсного одновимірного перетворення; `nSize` – обсяг перетворення; `in` – вказівник на вхідну послідовність дійсних чисел; `out` – вказівник на вихідну послідовність дійсних чисел; `FFTW_REDFT10` – виконання ДКП-II; `FFTW_ESTIMATE` – використання внутрішніх налаштувань за замовчуванням.

У результаті тестування програм у комп'ютерній системі (Intel(R) Core(TM) i-7 CPU 2600@4,2 GHz) обчислення ДКП-II на основі циклічних згорток (ДКП ЦЗ) отримано час десятиразового виконання алгоритмів (для зменшення впливів системних переривань та підвантажень даних до кеш-пам'яті), що подано у табл. 6.14.

Таблиця 6.14 – Виконання обчислення ДКП-II (мсек)

| N | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
|-----|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
| | мксек | такти | мксек | такти | мксек | такти | мксек | такти | мксек | такти |
| 7 | 0.301174 | 568 | 0.301174 | 686 | 0.301174 | 571 | 0.301174 | 597 | 0.301174 | 526 |
| 8 | 0.301174 | 775 | 0.301174 | 742 | 0.301174 | 702 | 0.301174 | 702 | 0.301174 | 677 |
| 10 | 0.301174 | 714 | 0.301174 | 674 | 0.301174 | 683 | 0.301174 | 687 | 0.301174 | 655 |
| 16 | 0.301174 | 909 | 0.301174 | 1011 | 0.301174 | 924 | 0.301174 | 921 | 0.301174 | 905 |
| 20 | 0.301174 | 970 | 0.301174 | 955 | 0.301174 | 939 | 0.301174 | 934 | 0.301174 | 921 |
| 21 | 0.301174 | 727 | 0.301174 | 732 | 0.301174 | 829 | 0.301174 | 742 | 0.301174 | 893 |
| 22 | 0.301174 | 794 | 0.301174 | 856 | 0.301174 | 838 | 0.301174 | 801 | 0.301174 | 809 |
| 29 | 0.301174 | 692 | 0.301174 | 717 | 0.301174 | 714 | 0.301174 | 695 | 0.301174 | 721 |
| 30 | 0.301174 | 1014 | 0.301174 | 956 | 0.301174 | 1017 | 0.301174 | 974 | 0.301174 | 1030 |
| 32 | 0.602348 | 1310 | 0.301174 | 1338 | 0.301174 | 1329 | 0.301174 | 1326 | 0.301174 | 1295 |
| 33 | 0.301174 | 853 | 0.301174 | 996 | 0.301174 | 871 | 0.301174 | 813 | 0.301174 | 1017 |
| 38 | 0.301174 | 887 | 0.301174 | 927 | 0.301174 | 878 | 0.301174 | 875 | 0.301174 | 902 |
| 45 | 0.301174 | 974 | 0.301174 | 986 | 0.301174 | 1162 | 0.301174 | 973 | 0.301174 | 977 |
| 48 | 0.602348 | 1598 | 0.602348 | 1595 | 0.602348 | 1610 | 0.301174 | 1607 | 0.602348 | 1610 |
| 51 | 0.301174 | 1240 | 0.301174 | 1236 | 0.301174 | 1249 | 0.301174 | 1243 | 0.301174 | 1245 |
| 62 | 0.602348 | 1175 | 0.301174 | 1131 | 0.301174 | 1122 | 0.301174 | 1082 | 0.301174 | 1122 |
| 64 | 0.602348 | 1908 | 0.301174 | 1870 | 0.602348 | 1879 | 0.602348 | 1889 | 0.602348 | 1876 |
| 67 | 0.301174 | 1007 | 0.301174 | 986 | 0.301174 | 961 | 0.301174 | 995 | 0.301174 | 995 |
| 83 | 0.602348 | 1335 | 0.602348 | 1345 | 0.602348 | 1344 | 0.301174 | 1344 | 0.301174 | 1345 |
| 85 | 0.301174 | 1159 | 0.301174 | 1165 | 0.602348 | 1169 | 0.301174 | 1206 | 0.301174 | 1183 |
| 91 | 0.301174 | 1144 | 0.602348 | 1125 | 0.602348 | 1171 | 0.301174 | 1165 | 0.301174 | 1110 |
| 96 | 0.903522 | 2500 | 0.903522 | 2463 | 0.602348 | 2466 | 0.602348 | 2470 | 0.903522 | 2457 |
| 103 | 0.301174 | 1227 | 0.301174 | 1193 | 0.301174 | 1236 | 0.301174 | 1227 | 0.301174 | 1230 |
| 114 | 0.602348 | 2108 | 0.913172 | 4179 | 0.602348 | 2105 | 0.903522 | 2117 | 0.602348 | 2101 |
| 128 | 0.903522 | 3060 | 0.903522 | 3032 | 0.903522 | 3045 | 0.903522 | 3047 | 0.903522 | 3032 |

продовження таблиці 6.14

| N | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | |
|----|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
| | мксек | такти | мксек | такти | мксек | такти | мксек | такти | мксек | такти |
| 7 | 0.301174 | 523 | 0.301174 | 513 | 0.301174 | 516 | 0.301174 | 568 | 0.301174 | 520 |
| 8 | 0.301174 | 680 | 0.301174 | 677 | 0.301174 | 723 | 0.301174 | 720 | 0.301174 | 686 |
| 10 | 0.301174 | 656 | 0.301174 | 708 | 0.301174 | 1020 | 0.301174 | 785 | 0.301174 | 680 |
| 16 | 0.301174 | 1054 | 0.301174 | 872 | 0.301174 | 1029 | 0.301174 | 930 | 0.301174 | 970 |
| 20 | 0.301174 | 921 | 0.301174 | 952 | 0.301174 | 915 | 0.301174 | 968 | 0.301174 | 934 |
| 21 | 0.301174 | 742 | 0.301174 | 751 | 0.301174 | 745 | 0.301174 | 856 | 0.301174 | 788 |
| 22 | 0.301174 | 826 | 0.301174 | 825 | 0.301174 | 829 | 0.301174 | 834 | 0.301174 | 807 |
| 29 | 0.301174 | 692 | 0.301174 | 689 | 0.301174 | 744 | 0.301174 | 736 | 0.301174 | 696 |
| 30 | 0.301174 | 1079 | 0.301174 | 983 | 0.301174 | 1005 | 0.301174 | 983 | 0.301174 | 1175 |
| 32 | 0.301174 | 1301 | 0.301174 | 1332 | 0.602348 | 1283 | 0.301174 | 1264 | 0.301174 | 1295 |
| 33 | 0.301174 | 856 | 0.301174 | 850 | 0.301174 | 863 | 0.301174 | 840 | 0.301174 | 863 |
| 38 | 0.301174 | 859 | 0.301174 | 847 | 0.301174 | 884 | 0.301174 | 881 | 0.301174 | 906 |
| 45 | 0.301174 | 965 | 0.301174 | 958 | 0.301174 | 1149 | 0.301174 | 1122 | 0.301174 | 979 |

продовження таблиці 6.14

| | | | | | | | | | | |
|-----|----------|------|----------|------|----------|------|----------|------|----------|------|
| 48 | 0.301174 | 1601 | 0.301174 | 1577 | 0.301174 | 1713 | 0.602348 | 1586 | 0.301174 | 1645 |
| 51 | 0.301174 | 1249 | 0.301174 | 1242 | 0.301174 | 1246 | 0.301174 | 1245 | 0.602348 | 1239 |
| 62 | 0.301174 | 1132 | 0.301174 | 1119 | 0.301174 | 1141 | 0.301174 | 1137 | 0.602348 | 1134 |
| 64 | 0.602348 | 1895 | 0.602348 | 1888 | 0.602348 | 1879 | 0.602348 | 1900 | 0.602348 | 1873 |
| 67 | 0.301174 | 1001 | 0.301174 | 1002 | 0.301174 | 998 | 0.301174 | 995 | 0.301174 | 1023 |
| 83 | 0.301174 | 1344 | 0.602348 | 1344 | 0.602348 | 1820 | 0.602348 | 1345 | 0.602348 | 1342 |
| 85 | 0.301174 | 1153 | 0.301174 | 1171 | 0.602348 | 1125 | 0.602348 | 1178 | 0.301174 | 1168 |
| 91 | 0.301174 | 1168 | 0.301174 | 1113 | 0.301174 | 1171 | 0.602348 | 1137 | 0.301174 | 1138 |
| 96 | 0.903522 | 2473 | 0.602348 | 2494 | 0.602348 | 2470 | 0.602348 | 2467 | 0.903522 | 2455 |
| 103 | 0.301174 | 1227 | 0.301174 | 1230 | 0.301174 | 1233 | 0.301174 | 1240 | 0.301174 | 1255 |
| 114 | 0.903522 | 2139 | 0.602348 | 2108 | 0.602348 | 2104 | 0.602348 | 2826 | 0.903522 | 2822 |
| 128 | 0.903522 | 3060 | 0.903522 | 3069 | 0.903522 | 3038 | 0.903522 | 3044 | 0.903522 | 3032 |

Для фіксації часу виконання застосовано функцію *QueryPerformanceTimer* мови C++ для ОС Windows, а для забезпечення вищої роздільності використовуємо функцію *rdtsc()* обчислення тактів виконання. Діаграму одержаних мінімальних результатів виконання з табл. 6.14 та виконання ДКП-II за допомогою бібліотеки FFTW3 подано на рис. 6.16

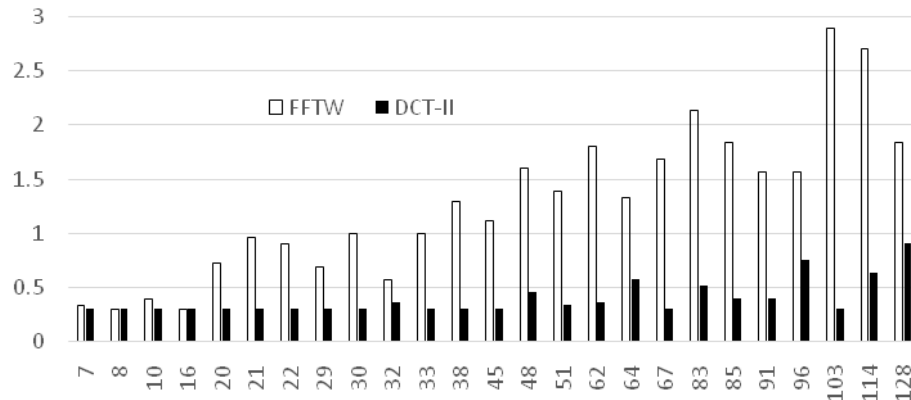


Рисунок 6.16 – Діаграма результатів виконання часу (мксек) виконання ДКП-II розробленої тестової програми (DCT-II) та програми з бібліотеки FFTW

Отже, отримано *підвищення ефективності* в межах (1,2÷3) разів тривалості обчислення ДКП-II для коротких обсягів, менших за $N=120$. Кількісна характеристика *ефективност*, показує, що час виконання (рис. 6.16) розробленої тестової програми (ДКП ЦЗ) обчислення ДКП-II кращий для коротких обсягів порівняно з часом виконання програми FFTW3 обчислення

ДКП-II [271]. Алгоритми виконання обчислень ДГП для більших обсягів перетворень конструюють на основі менших обсягів [20]. Тому отримані результати розробленої програми обчислення ДКП-II для коротких обсягів можуть ефективно використовуватись в алгоритмах обчислення ДГП великих обсягів.

Діаграму відношення одержаних результатів подано на рис. 6.17 .

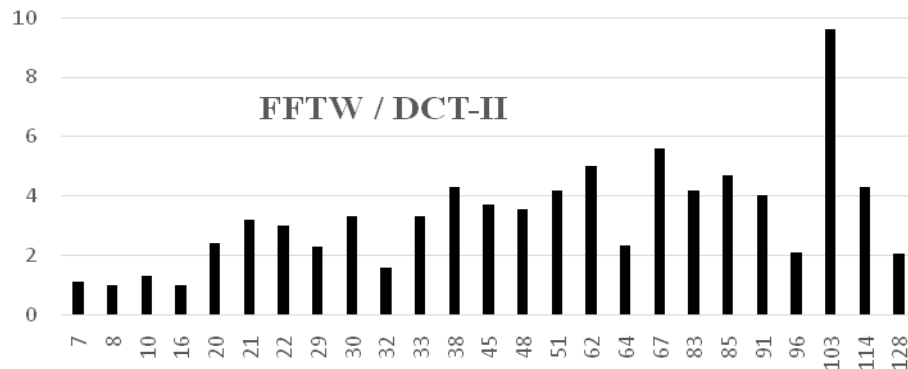


Рисунок 6.17 – Діаграма відношення результатів виконання часу (мсек) виконання ДКП-II розробленої тестової програми (DCT-II) та програми з бібліотеки FFTW

Порівняння часу (мсек) планування програм обчислення ДКП-II з бібліотеки FFTW3 та часу (мсек) синтезу розробленого ДКП-II на основі циклічних згорток подано у табл. 6.15.

Таблиця 6.15 – Відношення результатів часу (мсек) синтезу алгоритму ДКП-II та програми з бібліотеки FFTW

| N | 7 | 8 | 10 | 16 | 20 | 21 | 22 | 29 |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| FFTW | 7.83 | 4.22 | 10.84 | 10.54 | 10.24 | 28.91 | 22.59 | 29.21 |
| DCT-II | 4.51761 | 1.80704 | 7.52935 | 19.2751 | 14.4564 | 32.5268 | 36.1409 | 25.2986 |
| FFTW / DCT-II | 1.733217 | 2.335311 | 1.439699 | 0.546819 | 0.708337 | 0.888806 | 0.625054 | 1.154609 |

продовження таблиці 6.15

| 30 | 32 | 33 | 38 | 45 | 48 | 51 | 62 | 64 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|----------|
| 21.08 | 11.44 | 21.68 | 37.65 | 21.38 | 30.72 | 37.35 | 51.8 | 25.6 |
| 67.7642 | 82.8229 | 88.244 | 26.2022 | 186.126 | 219.857 | 261.72 | 62.6442 | 473.747 |
| 0.311079 | 0.138126 | 0.245682 | 1.436902 | 0.114868 | 0.139727 | 0.14271 | 0.826892 | 0.054037 |

продовження таблиці 6.15

| 67 | 83 | 85 | 91 | 96 | 103 | 114 | 128 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|
| 101.8 | 152.09 | 38.85 | 26.2 | 26.5 | 235.82 | 45.18 | 35.54 |
| 90.0511 | 974.6 | 302.078 | 184.62 | 1376.97 | 260.214 | 2215.74 | 3115.65 |
| 1.130469 | 0.156054 | 0.128609 | 0.141913 | 0.019245 | 0.906254 | 0.02039 | 0.011407 |

Час синтезу алгоритму ДКП-II порівняно з часом формування плану програмою FFTW3 (табл. 6.15) залежить від конкретного обсягу перетворення. Коректність такого порівняння потребує глибокого аналізу формування плану програмою FFTW3. У розробленій тестовій програмі синтезовано алгоритм ДКП-II, що є найскладнішим випадком узагальненої методології, в який може бути включено синтез інших видів ДГП.

Отже, виконання програми обчислення ДКП-II та аналіз результатів підтверджує підвищення ефективності виконання обчислення ДГП на основі циклічних згорток відповідно сформульованих методологічних принципів.

6.4 Інформація про використання узагальненої методології та впровадження результатів дисертаційної роботи

Актуальність застосувань ДГП вимагає від провідних виробників у сфері ІТ створювати відповідні технології та архітектури, програмні продукти для комп'ютерних систем схемотехнічного проектування, для систем комп'ютерної математики, для спеціальних технічних систем фільтрації сигналів на основі теореми про швидку згортку. Основна практична цінність розробленої узагальненої методології обчислення ДГП на основі циклічних згорток, яка охоплює послідовні й паралельні етапи синтезу ефективних алгоритмів та організації обчислень дванадцяти різних дійсних дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі, у можливості застосування у багатьох галузях науки і техніки (частину яких подано у табл. 6.16). Адже гармонічний аналіз у

світовій практиці є одним з основних інструментів опрацювання даних різноманітних явищ і процесів [272].

У дисертаційній роботі розроблено алгоритми та схеми реалізації методів обчислення циклічного розкладу підстановки, побудови блочно-циклічної структури ядра перетворення та цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі, які дають змогу програмно реалізувати синтез алгоритму ДГП на основі циклічних згорток. Використання методів та алгоритмів узагальненої методології дозволяє на вищому рівні здійснювати розроблення відповідних засобів ДГП, про що свідчать акти про використання результатів дисертаційного дослідження (див. додаток Д. «Акти про впровадження результатів дисертаційної роботи»).

Таблиця 6.16 – Призначення та використання ДГП

| Призначення | Сфера застосування | Використання ДГП |
|---|--|--|
| Формування діаграм направленості антен | Радіофізика,
Гідроакустика | Двовимірне перетворення класу ДПХ матриці даних |
| Виділення сигналу на фоні шумів | Радіолокація,
Обробка зображень | Пряме ДПФ + сглажування спектра + зворотне ДПФ |
| Виявлення та визначення об'єкта | Гідроакустика,
Обробка зображень | Пряме ДПФ + узгоджена фільтрація спектра + 3 ДПФ |
| Визначення швидкості об'єкта | Радіолокація,
Гідроакустика | Одновимірне ДПФ часової послідовності сигналу |
| Стиснення, відтворення зображень | Передавання обробка і архівація | Двовимірне ДКП перетворення за вікном |
| Захист і безпека інформаційних даних | Криптографія,
Стеганографія | Одновимірні ДГП,
Теорема про згортку |
| Відтворення зображень за проєкціями | Томографія,
Кристалографія | Перетворення Радона для векторів даних через ДПХ |
| Технічна діагностика механічного обладнання | Механіка,
Машинобудування | Одновимірні ДГП часової послідовності вібрацій |
| Мультимедійне передавання даних | Зв'язок, безпроводні комунікаційні си-ми | Технологія OFDM для 4G, прекодування ДПХ, ДКП |

Розробник ліцензійного програмного забезпечення систем автоматизованого проектування ТОВ “Юнісервіс” (м. Львів) надав акт щодо використання узагальненої методології синтезу алгоритмів та виконання обчислень дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. Високопрецизійне проектування комп’ютерними засобами трубопровідних мереж для рідин з різною питомою вагою потребує проведення моделювання роботи спроектованої мережі, що може витримувати опускання ґрунту, його вібрації, високий тиск рідин з великою питомою вагою. Для аналізу та діагностики надійності роботи механічних систем трубопроводу використовують спектральні методи, які допомагають виявити та ідентифікувати несправності на ранніх стадіях зародження та розвитку, завдяки виявленню підвищених амплітуд вібрації на частотах, що збігаються з частотами можливих пошкоджень елементів, резонансних частотах деталей, на частотах протікання робочого процесу.

У вказаному акті надано позитивні відгуки про практичні результати дисертаційного дослідження, зокрема можливості підвищення ефективності роботи та розширення функціональності підсистеми спектрального аналізу, основаної на використанні розробленої узагальненої методології. Це дозволить у багатьох випадках на вищому рівні використовувати підсистему спектрального аналізу в процесах аналізу та діагностики на надійність спроектованої трубопровідної мережі. Використання розробленого програмного забезпечення з меншим часом виконання ДГП для коротких обсягів перетворення порівняно з відомими бібліотеками FFTW та MKL-Intel дає змогу конструювати ефективні обчислення великих обсягів перетворень на основі коротких для дванадцяти різних дійсних дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі за єдиною методологією.

Запропоновані до впровадження результати дисертаційного дослідження пройшли успішну апробацію під час проведення тестових випробувань системи захисту мовної інформації програмної розробки на ОС Android. Підвищення рівня захисту при передаванні мовної інформації є актуальною проблемою, яка

потребує нових наукових рішень. Залежно від рівня значимості мовних інформаційних даних (індивідуальних, соціальних) підвищується їхня кількість рівнів захисту, який має здійснюватись у масштабі реального часу. Одним з цих рівнів є шифрування в області математичних обчислень, в данному випадку перетворень ДГП (рис. 6.18).

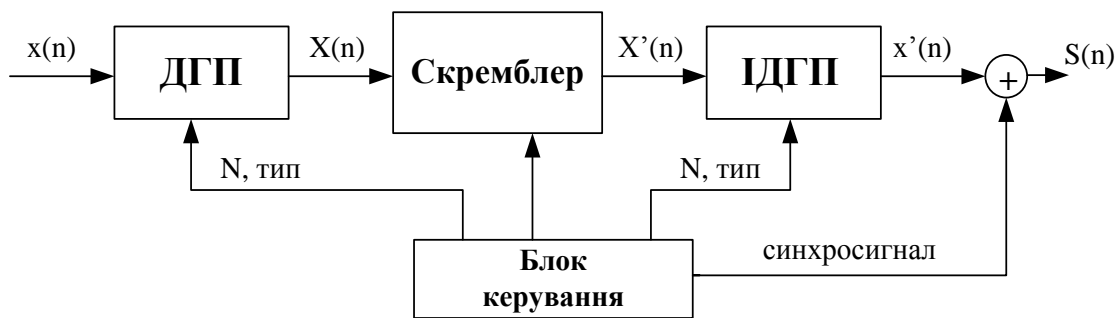


Рисунок 6.18 – Структурна схема шифрування мовних інформаційних даних у частотній області

Вибірки мовного сигналу $x(n)$ з часової області на основі одного з видів ДГП перетворюються на послідовність $X(n)$ частотної області з використанням швидких алгоритмів ДГП на основі циклічних згорток. Скремблер відповідним способом (переставлення, доповнення, OFDM та ін.) здійснює шифрування цієї послідовності в послідовність $X'(n)$. Зворотне ІДГП виконує перетворення послідовності $X'(n)$ у $x'(n)$ часової області. Додавання синхромітки до зашифрованих мовних інформаційних даних дозволяє виконати дешифрування переданих даних $S(n)$ у зворотному порядку.

Використання розроблених швидких ДГП на основі циклічних згорток забезпечує на вищому рівні захищеність до криптоаналізу в процесі атаки. Це базується на використанні багатоступінчастого ключа криптосистеми, до якого входять різні типи перетворень ДКП/ДСП/ДПХ, різні значення обсягів N мовних фрагментів в поєднанні зі способом скремблювання. Низька обчислювальна складність алгоритмів ДГП на основі циклічних згорток приводить до зменшення часової затримки мовного зв'язку, яка викликана процесом скремблювання. Відповідні висновки містяться в акті щодо

використання узагальненої методології в ІТ організації ТОВ “Лемберг рішення” (м. Львів).

В акті, отриманому від ТДВ “Самбірська швейна фабрика”, про впровадження у практику розроблених у процесі роботи над дисертаційним дослідженням узагальненої методології та програмно-алгоритмічних засобів вказано про можливість контролювати якість фрагментів тканин на основі ефективного обчислення двовимірних дискретних косинусних перетворень. Послідовне виконання розроблених одновимірних ДКП-II на основі циклічних згорток для довільних обсягів за рядками та стовпцями двовимірного текстурного зображення дозволяє контролювати якість фрагментів тканин різних розмірів. Рівномірно періодичне зображення структури тканини без браку в результаті гармонічного перетворення має відповідне спектральне зображення (рис. 6.19). Зміна цієї картини свідчить про наявність у ній дефекту, тобто в результаті контролю забезпечується створення високоякісних швейних виробів.

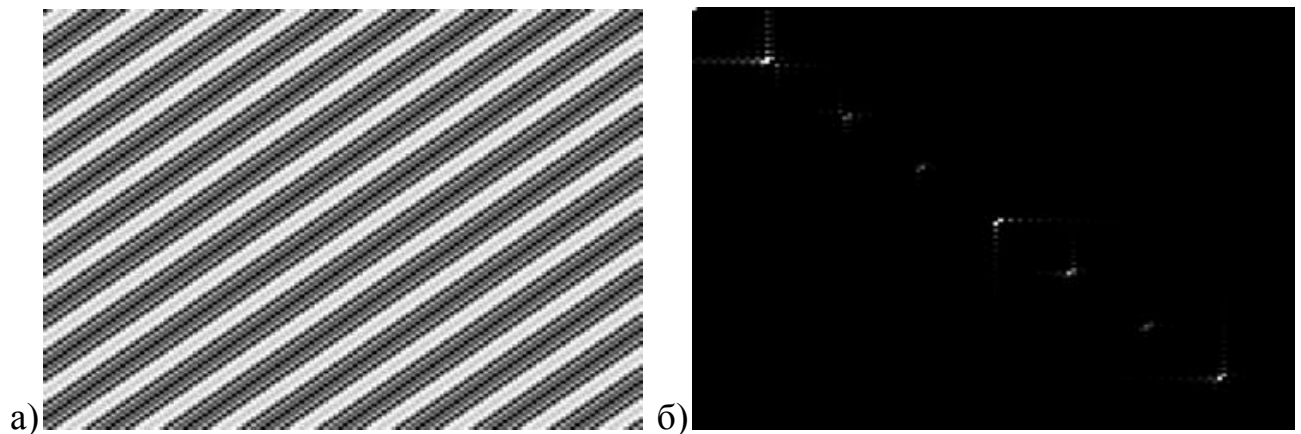


Рисунок 6.19 – а) Фрагмент рівномірного зображення б) спектральне зображення ДКП-II фрагмента

Результати дисертаційної роботи використовують у навчальному процесі та наукових дослідженнях для вивчення студентами нових ефективних підходів обчислення косинусних, синусних та перетворень Хартлі на основі циклічних згорток (див. додаток Д «Акти про впровадження результатів дисертаційної роботи» від НУ “Львівська політехніка”, Львівського національного аграрного університету).

Висновки до шостого розділу

В розділі розглянуто ефективність характеристик застосування узагальненої методології на етапах синтезу алгоритмів та обчислення ДГП на основі циклічних згорток, що поєднує у собі якісні та кількісні характеристики.

1. Якісна характеристика ефективності узагальненої методології, що розкриває її сутність, полягає в подальшому розвитку підходу до обчислення ДГП на основі циклічних згорток. Вперше застосовано твірний масив, на основі якого виконуються формування та аналіз структури базису перетворення у вигляді набору ганкелевих циркулянтів, для обчислення ДГП довільних обсягів. Серед інших якісних характеристик виділимо:

- спрощення синтезу алгоритму ДГП завдяки використанню цілочисельних арифметичних операцій для визначення варіантів твірних масивів, що задають кількість та обсяги циклічних згорток, схему об'єднання результатів згорток, блочно-циклічну структуру базису перетворення;

- кросплатформність виконання ДГП, тобто відсутність особливих вимог до апаратних та програмних ресурсів, завдяки гнучкості послідовно-паралельних зв'язків між потоками даних у синтезованих алгоритмах та можливості розбиття їх на структурні модулі, всередині яких можливе розпаралелення обчислень.

2. Кількісні характеристики ефективності узагальненої методології підтверджуються конкретними числовими значеннями:

- спрощення синтезу алгоритму ДГП при визначенні послідовності переставлення за твірним масивом $P(n)$ більш ніж *втричі ефективніше* за тривалістю порівняно із загальноприйнятим за алгоритмом Рейдера, а для складеного обсягу перетворення $N=N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$ виконується *до 3k-разів ефективніше* у випадку розпаралелення обчислення незалежних k - частин твірних підмасивів;

- мультифункціональність виконання характеризується *ефективністю*, що зменшує затрати більш ніж *вдвічі* при апаратній або програмній реалізації на

прикладі ДПХ-II/ДКП-II/ДСП-II перетворень для одного конкретного обсягу та зворотних їм (ДПХ-III/ДКП-III/ДСП-III) в одному модулі обчислення;

– обчислювальні затрати алгоритмів ДКП-II обсягів коротких $N=2^n$ для а) варіанта твірного масиву показують на конкретному порівнянні з роботами [76, 168] підвищення *обчислювальної ефективності більш ніж вдвічі*, а при використанні алгоритмів циклічних згорток з мінімальною мультиплікативною складністю розроблені алгоритми мають *меншу кількість операцій множення на 30%* порівняно з традиційними. Загалом за балансом кількості операцій множення і додавання розроблені алгоритми співвимірні з відомими традиційними;

– затрати компонування НВІС програмованих логічних матриць (FPGA) та спеціалізованих інтегральних схем (ASIC) характеризуються зменшенням використання площі кристала на *більше ніж 10%* і, відповідно, зменшенням потужності споживання, паразитних ємностей і вартості завдяки локальності та регулярності імплементації зв'язків між процесорними елементами у блоках циклічних згорток;

– час виконання показує, що тривалість обчислення ДКП-II для коротких обсягів до $N=120$ розробленої тестової програми *менша у межах (1,2÷3) разів* порівняно з часом виконання програми FFTW3 обчислення ДКП-II;

– визначення та зберігання абсолютних значень гармонічних коефіцієнтів зменшена в їхній кількості від N до $N/2$ або $N/4$ відповідно до значення обсягу обчислення ДГП на основі циклічних згорток.

Ці ефективні характеристики отримано завдяки таким можливостям узагальненої методології, як: вибору обсягів виконання циклічних згорток, порядку об'єднання їх результатів, зменшенню кількості циклічних згорток за спрощеним твірним масивом, великоблоковому розпаралелення обчислень, можливості нарощення обсягу перетворень для значень, що дорівнюють степеню простого числа та іншим.

Основні результати розділу опубліковано в [4], [5], [10], [14], [15], [26], [30] - [33], [37], [39], [40], [41], [45], [48], [50] - [53], [55], [56].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальну науково-прикладну проблему підвищення ефективності обчислювальних характеристик дійсних дискретних гармонічних перетворень шляхом розроблення узагальненої методології, що вирішує завдання формування й аналізу структури дискретних гармонічних складових базису перетворення у вигляді набору ганкелевих циркулянтів і виконання обчислення перетворень на основі циклічних згорток.

Зокрема, отримано такі результати.

1. Проаналізовано методи обчислення та обґрунтовано актуальність розроблення математичного та програмного забезпечення для підвищення ефективності обчислення дискретних перетворень класу Фур'є на основі циклічних згорток.

2. Запропоновано методіку формування блочно-циклічних структур матриці аргументів функцій базису ДГП за допомогою циклічного розкладу підстановки, що дало змогу синтезувати алгоритми та розробити обчислювальні схеми основних типів дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі циклічних згорток.

3. Використано твірний масив, що визначається через циклічний розклад підстановки, що дозволило підвищити ефективність більш ніж втричі тривалості обчислення послідовності переставлення базису перетворення порівняно з традиційним визначенням за цілочисельним степенем примітивного елемента циклічної групи.

4. Обґрунтовано узагальнені методологічні принципи та етапи синтезу алгоритмів з врахуванням особливостей кожного з чотирьох видів дискретних косинусних, синусних і перетворень Хартлі для виконання їх ефективного обчислення на основі циклічних згорток.

5. Проаналізовано взаємозв'язок послідовно-паралельних частин алгоритму синтезу та обчислення дійсних ДГП довільних значень обсягу перетворення, що

дає змогу проведення гнучкої організації виконання ДГП на основі використання швидких циклічних згорток для різних комп'ютерних систем.

6. Розроблено метод побудови стислої характеристики блочно-циклічної структури матриці базису перетворення на основі твірних масивів та спрощених твірних масивів, доповнених масивом знаків, що дало змогу підвищити ефективність виконання аналізу блочно-циклічної структури за першими елементами циклічних підматриць.

7. Розроблено метод цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення на основі твірних масивів, що дає змогу зменшити обчислювальні затрати, а для обсягів цілого степеня простого числа – вилучити етап аналізу структури базису завдяки однотипності нарощення горизонтальних структур у базисі ДГП.

8. Розроблено структурну схему обчислення ДПХ, ДКП або ДСП для конкретного обсягу в одному виконавчому модулі, що дозволило підвищити ефективність більш ніж вдвічі затрат апаратної або програмної реалізації завдяки однотипності блочно-циклічних структур базису перетворення.

9. Вдосконалено метод аналізу структури базису ДГП для складеного обсягу шляхом визначення ідентичних підматриць у горизонтальних та вертикальних структурах базису, що дає змогу зменшити квадратичну залежність обсягу пам'яті для зберігання значень знака та спрощених перших елементів циклічних підматриць.

10. Проаналізовано кількість операцій обчислення ДГП, що в балансі співвимірні значенням найкращих алгоритмів, а для обсягів $N=2^n$ кількість множень у випадку використання швидких згорток із мінімальною мультиплікативною складністю зменшується на 30%.

11. Розглянуто розроблені структурні схеми обчислення дійсних ДГП з використанням блоків швидких циклічних згорток, що дає змогу при реалізації інтегральних схем підвищити ефективність у вигляді значення показника компоновки НВІС площа/затримка та відповідно зменшити потужність споживання.

12. Розроблено програмне забезпечення синтезу алгоритмів ДГП та їх обчислення, проаналізовано використання в процесі обчислення компонентів виконання швидкої циклічної згортки. В результаті отримано підвищення ефективності в межах $(1,2\div 3)$ разів тривалості обчислення ДКП-II для коротких обсягів, менших $N=120$, порівняно з обчисленням за програмним кодом з бібліотеки FFTW3.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] C. Runge, "Über die Zerlegung empirisch gegebener periodischer Functionen in Sinuswellen", *Z. Math. Physik*, vol. 48, pp. 443-456, 1903.
- [2] G. C. Danielson, and C. Lanczos, "Some Improvements in Practical Fourier Analysis and Their Application to X-Ray Scattering from Liquids", *J. Franklin Institute*, vol. 233, pp. 45-52, 1942.
- [3] J. W. Cooley, and J. W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series", *Math. Comput.*, vol. 19, pp. 297-301, 1965.
- [4] I. J. Good, "The interaction algorithm and practical Fourier analysis", *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 22, pp. 372-375, 1960.
- [5] L. H. Thomas , "Using of computer to solve problems in physics", *Applications of digital computers*, pp. 67-83, 1963.
- [6] R. Yavne, "An economical method for calculating the discrete Fourier transform", in *Proc. AFIPS Fall Joint Computer Conf.*, part 1 (Thompson book co.), Washington, D.C., 1968, vol.33, pp. 115-125.
- [7] S. Winograd, "On computing the discrete Fourier transform", *Math. Comput.*, vol.32, pp. 175-199, 1978.
- [8] W. Yuan, P. Hao, and C. Xu, "Matrix factorization for fast DCT algorithms", in *IEEE. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP -III.)*, Toulouse, France, 2006, pp. 948-951.
- [9] G. Goertzel, "An algorithm for the evaluation of finite trigonometric series", *Amer. Math. Monthly*, vol. 65, pp. 34-35, 1958.
- [10] H. J. Nussbaumer, and P. Quandalle, "Fast computation of discrete Fourier transforms using polynomial transforms", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 27, pp. 169-181, 1979.
- [11] И. Е. Капорин, "Новый алгоритм быстрого преобразования. Фурье", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, т. 20, № 4, с. 1054-1058, 1980.

- [12] P. Duhamel, and H. Hollmann, "'Split radix' FFT algorithm", *Electronics Lett.*, vol.20, no. 1, pp. 14-16, 1984.
- [13] P. Duhamel, *Papers on the Fast Fourier Transform*. New York: IEEE Pres, 1995.
- [14] А. М. Григорян, и М. М. Григорян, "Двумерное дискретное преобразование Фурье в тензорном представлении и новые ортогональные функции", *Автометрия*, № 1, с. 21-27, 1986.
- [15] А. М. Григорян, "Оптимальный алгоритм вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье", *Изв. вузов. Радиоэлектроника*, т. 29, №12, с. 20-25, 1986.
- [16] P. J. Nicholson, "Algebraic theory of finite Fourier transforms", *J. Comput. Syst. Sci.*, vol. 5, pp. 524-527, 1971.
- [17] J. M. Pollard, "The fast Fourier transform in a finite field", *Math. Comput.*, vol.25, no. 114, pp. 365-374, 1971.
- [18] Р. Блейхут, *Теория и практика кодов, контролирующих ошибки*. Москва: Мир, 1986.
- [19] А. А. Залманзон, *Преобразование Фурье, Уолта, Хаара и их применение в управлении и связи и других областях*. Москва: Наука, 1989.
- [20] Дж. Г. Макклеллан, и Рейдер Ч. М., *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов*. Москва: Радио и связь, 1983.
- [21] J. Martens, "Recursive cyclotomic factorization – a new algorithm for calculating discrete Fourier transform", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 32, pp. 750-762, 1984.
- [22] O. K. Ersoy, *Fourier - related transforms, fast algorithms and applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
- [23] G. Bongiovanni, P. Corsini, and G. Frosini, "One-dimensional and two-dimensional generalized discrete Fourier transforms", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-24, pp. 97–99, 1976.
- [24] G. D. Bergland, "A fast Fourier transform for real-valued series", *Commun. ACM*, vol. 11, pp. 703-710, 1968.

- [25] C. M. Rader, and N. M. Brenner, "A new principle for fast Fourier transformation", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-24, pp.264-266, 1976.
- [26] G. Bruun, "z-transform DFT filters and FFTs", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-26, pp. 56-63, 1978.
- [27] Р. Кумаресан, и П. К. Гупта, "Алгоритм БПФ для простых множителей на основе арифметики действительных чисел", *Труды института инженеров по электронике и радиотехнике*, т. 73, № 7, с. 98-100, 1985.
- [28] И. О. Арро, "Алгоритм быстрого преобразования Фурье вещественного массива", *Изв. АН СССР, Физ. Мат.*, т. 36, № 3, с. 340-343, 1987.
- [29] E. Chu, and A. George, *Inside the FFT black box. Serial and Parallel Fast Fourier Transform, Algorithms*. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
- [30] R. N. Bracewell, "The Discrete Hartley Transform", *J. Optical Society of America*, vol. 73, pp. 1832-1835, 1983.
- [31] R. N. Bracewell, "The Fast Hartley Transform", *Proc. IEEE*, vol. 72, no. 8, pp.1010-1018, Aug., 1984.
- [32] N. Ahmed, T. Natarajan and K. R. Rao, "Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-23, pp. 90-93, Jan., 1974.
- [33] A. K. Jain, "A sinusoidal family of unitary transforms", *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-1, pp. 356-365, 1979.
- [34] V. Britanak, "A unified discrete cosine discrete sine transform for computation", *Signal Process.*, vol. 43, no. 3, pp. 333-339, 1995.
- [35] Z. Wang, "Comments on generalized discrete Hartley transform", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no. 7, pp. 1711-1712, 1995.
- [36] D. Liu, D. Wang, and Z. Wang, "Interpolation using Hartley transform", *Electronic Lett.*, vol. 28, no. 2, pp. 209-210, 1992.
- [37] Z. Wang, and B. R. Hunt, "The discrete W transform", *Applied Math. and Comput.*, vol. 16, pp. 19-48, 1985.
- [38] A. Mertins, *Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications*. New Jersey: John Wiley & Sons Ltd, 1999.

- [39] S. Egner, J. Johnson, D. Padua, J. Xiong, and M. Püschel, "Automatic Derivation and Implementation of Signal Processing Algorithms", *ACM SIGSAM Bull. Commun. in Computer Algebra*, vol.35, no.2, pp. 1-19, 2001.
- [40] Р. Блейхут, *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов*. Москва: Мир, 1989.
- [41] D. Myers, *Digital Signal Processing, Efficient Convolution and Fourier Transform Techniques*. Sydney, Australia: Prentice Hall, 1990.
- [42] R. Tolimiery, M. An, and C.Lu, *Algorithms for Discrete Fourier Transform and Convolution*. New York: Springer-Verlag (s.ed.), 1997.
- [43] C. M. Rader, "Discrete Fourier transform when the number of data samples is prime", *Proc. IEEE*, vol. 56, pp. 1107-1108, 1968.
- [44] L. I. Bluestein, "Linear filtering approach to the computation of discrete Fourier transforms", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. AU-18, pp. 451-455, 1970.
- [45] S. Winograd, "On computing the discrete Fourier transforms", *Proc. National Academy of Sciences USA*, vol. 73, no. 4, pp. 1005-1006, Apr. 1976.
- [46] D. P. Kolba, and T. W. Parks, "A Prime Factor FFT Algorithm Using High Speed Convolution", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-25, pp. 281-294, August, 1977.
- [47] H. F. Silverman, "An introduction to programming the Winograd Fourier Transform algorithm (WFTA)", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 25, no. 2, pp. 152-165, 1977.
- [48] Ш. Зохар, "Алгоритм Винограда для дискретного преобразования Фур'е", в *Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений*, Т. С. Хуанг, Пер. с англ., Москва: Радио и связь, 1984, с. 89-155.
- [49] R. Tolimiery, C. Lu, and W. Johnson, "Modified Winograd FFT Algorithm and Its Variants for Transform Size $N = p^n$ and Their Implementations", *Advanced in Applied Math.*, vol. 10, pp. 289-251, 1989.
- [50] P. Lavoie, "A high-speed CMOS implementation of the Winograd Fourier transform algorithm ", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, no. 8, pp. 2121-2126, Aug. 1996.

- [51] I. Prots'ko, and V. Teslyuk, "Development of WFTA based on the hashing array", *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 2(45), с.135-142, 2018.
- [52] Ю. И. Гагарин, "Рекурсивное преобразование Фурье через свертки", *Проблемы передачи информации*, т. 25, Вып. 4, с. 93-95, 1989.
- [53] P. K. Meher, "A new convolutional formulation of the DFT and efficient systolic implementation", in *Proc. IEEE Int. Region 10 Conf. (TENCON'05)*, Melbourne, Australia, Nov., 2005, pp. 1462-1466.
- [54] Л. Рабинер, и Б. Гоулд, *Теория и применение цифровой обработки сигналов*. Москва: Мир, 1978.
- [55] В. И. Гадзиковский, *Теоретические основы цифровой обработки сигналов*. Москва: Радио и связь, 2004.
- [56] А. Оппенгейм, и Р. Шафер, *Цифровая обработка сигналов*, Москва: Техносфера, 2006.
- [57] R. N. Bracewell, *The Hartley Transform*. New York: Oxford University Press, 1986.
- [58] S. A. Cook, "On the minimum computation time of functions", Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, 1966.
- [59] A. L. Toom, "The complexity of a scheme of functional elements simulating the multiplication of integers", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 150, pp. 496-498, 1963.
- [60] А. А. Карацуба, и Ю. П. Офман "Умножение многозначных чисел на автоматах", *Докл. АН СССР*, т. 145, № 2, с. 293-294, 1962.
- [61] R. C. Agarwal, and J. W. Cooley, "New Algorithms for Digital Convolution", *IEEE Tran. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-25, no. 5, pp. 392 – 409, October, 1977.
- [62] H. J. Nussbaumer, "New algorithm for convolution and DFT based on polynomial transforms", in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Tulsa, Oklahoma, USA, April 10-12, 1978, pp. 638-641.
- [63] Г. Дж. Нуссбаумер, *Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свертки*. Москва: Радио и связь, 1985.

- [64] D. Potts, G. Steidl, and M. Tasche, "Fast algorithms for discrete polynomial transforms", *Math. of Comput.*, vol. 67, no. 224, pp. 1577-1590, 1998.
- [65] W.-C. Siu, and A. G. Constantinides, "Cyclic Convolution of Long Sequences using Number Theoretic Transform", *IEE Proc. Electronic Circuits and Syst.*, vol.131, no. 3, pp. 119-126, 1984.
- [66] C. M. Rader, "Discrete convolution via Mersenne transform", *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-21, no. 12, pp. 1269-1273, 1972.
- [67] H. J. Nussbaumer, "Complex convolutions via Fermat number transforms", *IBM J. Research and development*, vol. 20, pp. 282-284, 2010.
- [68] Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, и М. Н. Поляк, *Цифровая обработка сигналов: Справочник*. Москва: Радио и связь, 1985.
- [69] D. A. Pitassi, "Fast convolution using the Walsh transform," in *Proc. Conf. on Applications of Walsh Functions*, Washington D. C., April 1971, pp. 130-133.
- [70] V. F. Daviss, "A class of efficient convolution algorithm", in *Proc. Conf. on Applications of Walsh Functions*, Washington D. C., April 1971, pp. 318-329.
- [71] А. Н. Терещенко, "Оптимизация метода Питасси вычисления свертки", *Искусственный интеллект*, №1, с. 204-212, 2009.
- [72] M. Teixeira, "A New Method Mathematically Links Fast Fourier Transform Algorithms with Fast Cyclic Convolution Algorithms", *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 2, no. 5, pp. 92-94, 1995.
- [73] M. Teixeira, and Y. I. Rodríguez, "Parallel Cyclic Convolution Based on Recursive Formulations of Block Pseudocirculant Matrices", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 7, pp. 27-55, 2008.
- [74] A. V. Oppenheim, and R. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1989.
- [75] M. Borgerding, "Turning Overlap-Save into a Multiband Mixing, Downsampling Filter Bank", *IEEE Signal Process. Magazine*, pp. 158-161, 2006.
- [76] K. R. Rao, and P. Yip, *Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications*. Boston: Academic Press, 1990.

- [77] V. Britanak, "A unified approach to fast computation of discrete sinusoidal transforms I: DCT and DST transforms", *Computers and Artificial Intelligence*, vol. 17, no. 6, pp. 583-607, 1998.
- [78] N. Roma, and L. Sousa, "A tutorial overview on the properties of the discrete cosine transform for encoded image and video processing", *Signal Process.*, vol.91, no. 01, pp. 2443-2464, 2011.
- [79] W. Yuan, P. Hao, and C. Xu, "Matrix factorization for fast DCT algorithms", in *Proc. IEEE Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, 2006, vol. III, pp. 948-951.
- [80] B. G. Lee, "A new algorithm for computing the discrete cosine transform", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-32, pp. 1243-1245, Dec., 1984.
- [81] S. Egner, and M. Püschel, "Automatic Generation of Fast Discrete Signal Transforms", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 9, pp. 1992-2002, 2001.
- [82] M. J. Narasimha, and A. M. Peterson, "On the computation of the discrete cosine transform", *IEEE Trans. Comput.*, vol. COM-26, no. 6, pp. 934-936, 1978.
- [83] H. Malvar, "Fast computation of discrete cosine transform through fast Hartley transform", *Electronic Lett.*, vol. 22, no. 7, pp. 352-353, 1986.
- [84] W. Li, "A new algorithm to compute the DCT and its inverse", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 39, pp.1305-1313, 1991.
- [85] E. Feig, and M. Ben-Or, "On Algebras Related to the Discrete Cosine Transform", *Linear algebra and its applications*, vol. 266, pp. 81-106, 1997.
- [86] M. Vetterli, and H. Nussbaumer, "Simple FFT and DCT Algorithms with Reduced Number of Operations", *Signal Process.*, vol. 6, pp. 267-278, Aug., 1984.
- [87] L. P. Chau, D. P. K. Lun, and W-. C. Siu, "Efficient Prime Factor Algorithm and Address Generation Techniques for the Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. Circuits and Syst., Pt.II*, vol. 48, no. 10, pp. 985-988, 2001.
- [88] B. G. Lee, "Input and output index mappings for a prime-factor decomposed computation of discrete cosine transform", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Process.*, vol. 37(2), pp. 237-244, Feb., 1989.

- [89] P. Z. Lee, and F. Y. Huang, "An efficient prime factor algorithm for Discrete Cosine Transform and its hardware implementations", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no 8, pp. 1996-2005, 1994.
- [90] A. Tatsaki, C. Dre, T. Stouraitis, and et.al., "Prime-factor DCT algorithms", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no.3, pp. 772-776, 1995.
- [91] L. P. Chau, D. P. K. Lun, and W.-C. Siu, "Efficient Prime Factor Algorithm and Address Generation Techniques for the Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. Circuits and Syst., Pt.II*, vol.48, no.10, pp. 985-988, 2001.
- [92] V. Britanak, "Discrete Cosine and Sine Transforms", in *The Transform and Data Compression Handbook*, Ed. K. R. Rao and P.C. Yip. / V. Britanak (Chapter 4), Boca Raton: CRC Press LLC, 2001, pp. 138-216.
- [93] Z. Wang, "A fast algorithm for the discrete sine transform implemented by the fast cosine transform", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-30, no. 5, pp. 814-815, 1982.
- [94] P. Lee and F.-Y. Huang, "Restructured recursive DCT and DST algorithms", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 7, pp. 1600-1609, 1994.
- [95] В. К. Задирака, *Теория вычисления преобразования Фурье*. Киев: Наук. думка, 1983.
- [96] М. М. Яцимирський, *Швидкі алгоритми ортогональних тригонометричних перетворень*. Львів: Академічний Експрес, 1997.
- [97] V. Britanak, "A Unified Approach to the Fast Computation of Discrete Sinusoidal Transforms I: DCT and DST Transforms", *Computers and Artificial Intelligence*, vol. 17, pp. 583-607, Dec., 1998.
- [98] Z. Wang, "Fast discrete sine transform algorithms", *Signal Process.*, vol. 19, pp. 91-102, 1990.
- [99] H. V. Sorensen, D. L. Jones, C. S. Burrus, and M. T. Heideman, "On computing the discrete Hartley transform", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, ASSP-33, (4), pp. 1231-1238, 1985.
- [100] G. Bi, Y. Chen, and Y. Zeng, "Fast algorithms for generalized discrete Hartley transform of composite sequence lengths", *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 47,

- no. 9, pp. 893-901, 1985.
- [101] G. Bi, and S. Tian Lian, "Fast Algorithms for Generalized Discrete Hartley Transform", *J. Circuits, Systems, and Computers*, vol. 10, no. 1-2, pp. 77-84, 2000.
- [102] Y.- H. Chan, and W.- C. Siu, "A New Convolution Structure for the Realisation of the Discrete Cosine Transform", in *IEEE Int. Symp. on Circuits and Syst. (ISCAS'90)*, New Orleans, Louisiana, USA, May 1-3, 1990, pp. 2373-2376.
- [103] P. Duhamel, and H. H'mida, "New 2^n DCT algorithms suitable for VLSI implementation", in *Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP-85)*, Tampa, March, 1985, pp. 780-783.
- [104] Y. H. Chan, and W.- C. Siu, "Algorithm for prime length discrete cosine transforms", *Electronics Lett.*, vol. 26, no. 3, pp. 206-208, 1990.
- [105] Y. H. Chan, and W.- C. Siu, "A cyclic correlated structure for the realization of discrete cosine transform", *IEEE Trans. on Circuits and Syst. – II: Analog and Digit. Signal Process.*, vol. 39, no. 2, pp. 109-113, 1992.
- [106] Y.-H. Chan, and W.- C. Siu, "Generalized approach for the realization of discrete cosine transform using cyclic convolutions", in *Proc. IEEE Int.Conf. Acoust., Speech, Signal process.: digit. speech processing*, Volume III. IEEE Computer Society, Washington, DC, 1993, pp. 277-280.
- [107] R.-X. Yin and W.-C. Siu, "New Fast Algorithm for Computing Prime length DCT through Cyclic Convolutions", *Signal Process.*, Switzerland, vol. 81, pp.895-906, May, 2001.
- [108] R. Asir Sejoie Nath, and D. Jessintha, "High Speed Systolic Array Discrete Cosine Transform Architecture With Fast Convolution", *Int. J. on Advanced Computer Theory and Engineering*, vol. 2, iss. 4, pp. 2319 – 2526, 2013.
- [109] D. F. Chiper, M. N. S. Swamy, M. O. Ahmad, and T. Stouraitis, "Systolic algorithms and a memory-based design approach for a unified architecture for the computation of DCT/DST/IDCT/IDST ", *IEEE Trans. Circuits Syst-I: Reg. Papers*, vol. 52, no. 6, pp. 1125–1137, 2013.
- [110] C. Cheng, and K. K. Parhi, "A novel systolic array structure for DCT", *IEEE Trans. Circuits and Syst.-II: Express Briefs*, vol. 52, no. 7, pp. 366-369, 2005.

- [111] C. Cheng, and K. K. Parhi, "Hardware efficient fast DCT based on novel cyclic convolution structures", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 11, pp. 4419-4434, Nov., 2006.
- [112] V. Muddhasani, and M. D. Wagh, "Bilinear Algorithms for Discrete Cosine Transforms of Prime Length", *Signal Process.*, vol. 86, no 9, pp. 2393-2406, Nov., 2006.
- [113] T.-S. Chang, and C.-W. Jen, "Hardware efficient transform designs with cyclic formulation and subexpression sharing", in *Proc. Int. Symp. on Circuits Syst. (ISCAS)*, Monterey, CA, USA, 1998, pp. 398-401.
- [114] T.-S. Chang, J.-I. Guo, and C.-W. Jen, "Hardware-Efficient DFT Designs with Cyclic Convolution and Subexpression Sharing", *IEEE Trans. Circuits Systems-II: Analog and digit. signal process.*, vol. 47, no. 9, pp. 886-892, 2000.
- [115] H.-C. Chen, J.-I. Guo, C.-W. Jen, and T.-S. Chang, "A memory-efficient realization of cyclic convolution and its application to discrete cosine transform", *IEEE Trans. Circuits and Syst. for Video Techn.*, vol. 15, pp. 445-453, March, 2005.
- [116] H.-C. Chen, J.-I. Guo, C.-W. Jen, and T.-S. Chang, "Distributed arithmetic realisation of cyclic convolution and its DFT application", *IEE Proc. Circuits Devices Syst.*, vol. 152, no. 6, pp. 615-629, December, 2005.
- [117] P. K. Meher, "Systolic Designs for DCT using a Low-Complexity Concurrent Convolutional Formulation", *IEEE Trans. Circuits Syst. for Video Techn.*, vol. 16, no. 9, pp. 1041-1050, 2006.
- [118] P. K. Meher, "A memory-efficient realization of cyclic convolution and its application to discrete cosine transform", in *Int. Sym. on Signals, Circuits Syst. (ISSCS 2007)*, Iasi, Romania, 2007, pp. 1-4.
- [119] Khader Mohammad, and Sos Agaian, "Efficient FPGA implementation of convolution", in *Proc. IEEE Int. Conf. Systems, Man, and Cybernetics*, San Antonio, TX, USA, 2009, pp. 3478-3483.
- [120] P. Saha, A. Banerjee, A. Dandapat, and P. Bhattacharyya, "ASIC Implementation of High Speed Processor for Calculating Discrete Fourier

- Transformation using Circular Convolution Technique", *WSEAS Trans. Circuits Syst.*, vol. 10, iss. 8, pp. 278-288, 2011.
- [121] D. F. Chiper, and P. Ungureanu, "Novel VLSI Algorithm and Architecture with Good Quantization Properties for a High-Throughput Area Efficient Systolic Array Implementation of DCT", *EURASIP J. Advances in Signal Process.*, vol. 2011, pp.1-14, January 2011. doi:10.1155/2011/639043.
- [122] D. F. Chiper, "A new VLSI algorithm and architecture for the hardware implementation of type IV discrete cosine transform using a pseudo-band correlation structure", *Central European J. of Computer Science*, vol.1, no.2, pp.90-97, 2011.
- [123] P. K. Meher, S. Y. Park, B. K. Mohanty, K. S. Lim, and C. Yeo, "Efficient Integer DCT Architectures for HEVC (High Efficiency Video Coding)", *IEEE Trans. Circuits Systems for Video Techn.*, vol. 24, no.1, pp. 168-178, 2014.
- [124] I. Prots'ko, and R. Rykmas, "Becoming of Discrete Harmonic Transform Using Cyclic Convolutions", *Amer. J. of Circuits, Systems and Signal Process.*, vol. 1, no.3, pp. 114-119, 2015.
- [125] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*. Москва: Мир, 1985.
- [126] С. В. Заболотній, *Цифрове оброблення сигналів: Посібник для студентів*. Черкаси: ЧДТУ (Черкас. держ. технол. ун-т), 2010.
- [127] A. Cipra Barry, "The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms", *SIAM News*, vol. 33, no. 4, pp. 1-2, 2000.
- [128] В. Н. Малозёмов, и С. М. Машарский, *Основы дискретного гармонического анализа*. СанктПетербург: НИИМ, 2003.
- [129] S. A. Martucci, "Symmetric convolution and discrete sine and cosine transforms", *IEEE Trans. Signal Process*, vol. 42, pp. 1038-1051, May, 1994.
- [130] A. Arico, S. Serra-Capizzano, and M. Tasche, "Fast and numerically stable algorithms for discrete Hartley transforms and applications to preconditioning", *Commun. in information and systems. Int. Press*, vol. 5, no. 1, pp. 21-68, 2005.

- [131] N. L. Tsitsas, "On block matrices associated with discrete trigonometric transforms and their use in the theory of wave propagation", *J. of Comput. Math.*, vol. 28, no. 1, pp. 864-878, 2010.
- [132] V. Britanak, "DCT/DST universal computational structure and its impact for VLSI design", in *IEEE DSP Workshop*, Hunt, TX., Oct., 2000, pp. 15-18.
- [133] S. Oraintara, "The unified discrete Fourier-Hartley transforms: theory and structure", in *IEEE Int. Sym. Circuits Syst. ISCAS (1)*, Scottsdale, Arizona, 2002, pp. 433-436.
- [134] V. Britanak, P. C. Yip, and K. R. Rao, *Discrete Cosine and Sine Transforms: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations*. New York, NY: Academic Press, 2007.
- [135] R. V. L. Hartley, "A more symmetrical Fourier analysis applied to transmission problems", *Proc. IRE*, Mar., vol. 30, pp. 144-150, 1942.
- [136] A. K. Jain, "A fast Karhunen–Loeve transform for a class of random processes", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 24, pp. 1023-1028, 1976.
- [137] L. N. Wu, "Comments on shift property of DCTs and DSTs", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 38, no. 1, pp. 186-188, 1990.
- [138] Z. Wang, G. A. Julien, and W. C. Miller, "The generalized discrete W transform and its application to interpolation", *Signal Process.*, vol. 36, pp. 99-109, 1994.
- [139] V. Britanak, and K. R. Rao, "The fast generalized discrete Fourier transform: a unified approach to the discrete sinusoidal transforms computation", *Signal Process.*, vol. 79, no. 12, pp. 135–150, December, 1999.
- [140] М. Пушел, и Жозе М. Ф. Моура, "Алгебраический подход к дискретным косинусным и синусным преобразованиям и их быстрым алгоритмам", *SIAM J. of Computing*, vol. 32, no. 5, pp. 1280-1316, 2003.
- [141] L. Auslander, E. Feig, and S. Winograd, "Abelian semi-simple algebras and algorithms for the discrete Fourier transform", *Advances in Applied Mathematics*, vol. 5, pp. 31–55, 1984.

- [142] О. О. Чуприна, "Удосконалений алгоритм ШПФ на базі швидкої згортки ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Радіoeлектроніка та телекомунікації*, № 618, с. 174-179, 2008.
- [143] M. D. Wagh, and H. Ganesh, "A new algorithm for the discrete cosine transform of arbitrary number of points", *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-29, no. 4, pp. 269-277, 1980.
- [144] І. Процько, "Аналіз алгебраїчної системи аргументів для простого обсягу ДПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 711, с. 48-53, 2011.
- [145] I. Prots'ko, "Analysis algebraic system of arguments for prime size DHT", in *Proc. XIth Int. Conf. Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET'2012)*, Lviv-Slavske, 24-28 february, 2012, pp.428.
- [146] Л. Я. Куликов, *Алгебра и теория чисел*. Москва: Высшая школа, 1979.
- [147] В. М. Муттер, *Основы помехоустойчивой телепередачи информации*. Санкт-Петербург: Энергоатомиздат, 1990.
- [148] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*. Москва: Издательство научно-теоретической литературы, 1952.
- [149] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming; Seminumerical Algorithms*. 3rd ed., t.1, NJ:Addison-Wesley Publishing Co., 1997.
- [150] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*. Москва: Наука, 1975.
- [151] G. James, and M. Liebeck, *Representations and characters of groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [152] S.V. Kanetkar, and M. D. Wagh, "Group character tables in discrete transform theory", *J. of Computer and System Science*, vol. 19, pp. 211-221, 1979.
- [153] І. О. Процько, "Спосіб приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток", *G06F 17/16 (2006.01), H03M 7/30 (2006.01), Патент 96540 Україна*, 10.11.2011. Бюл. №21.
- [154] І. О. Процько, "Розробка схеми узагальненого ефективного алгоритму гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету*

- "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі, № 549, с. 157-164, 2005.
- [155] І. О. Процько, "Узагальнене ефективне дискретне гармонічне перетворення даних", *Технічні вісті*, №1(22), 2(23), с. 88-92, 2006.
- [156] І. О. Процько, "Підхід ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень через циклічні згортки", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 626, с. 74-78, 2008.
- [157] I. Prots'ko, "The generalized technique of computation the discrete harmonic transforms", in *Proc. IVth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2008)*, Polyana, 21-24 may, 2008, pp. 101-102.
- [158] R. Nykyforchin, and I. Prots'ko, "Computational algorithm of the discrete harmonic components for microelectronic systems", in *Proc. Ist Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2005)*, Lviv-Polyana, 25-28 may, 2005, pp. 21-22.
- [159] Р. Никифорчин, та І. Процько, "Формування блочно-матричних структур для алгоритмів гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Автоматика, вимірювання та керування*, № 530, с. 175-180, 2005.
- [160] Р. Б. Никифорчин, та І. Процько, "Секціонування базової матриці дискретного гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 564, с. 40-45, 2006.
- [161] І. О. Процько, та Р. Рикмас, "Аналіз циклічних підматриць в структурі базису дискретних гармонічних перетворень", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 710, с. 209-214, 2011.
- [162] I. Prots'ko, and R. Rikmas, "Analysis cyclic submatrices in structure of basis discrete harmonic transform", in *Proc. VIIth Int. Conf. Perspective Technologies*

- and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2011)*, Polyana, 12-14 may, 2011, pp. 64-66.
- [163] І. О. Процько, "Схема алгоритму синтезу гармонічних дискретних перетворень в підсистемі аналізу САПР", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №694, с. 297-302, 2011.
- [164] H. V. Sorensen, D. L. Jones, M. T. Heideman, and C. S. Burrus, "Real Valued Fast Fourier Transform Algorithms", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 35, no. 6, pp. 849-863, June, 1987.
- [165] R. Gluth, Regular "FFT-related transform kernels for DCT/DST- based polyphase filter banks", in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process., (ICASSP 1991)*, Toronto, May, 1991, pp. 2205-2208.
- [166] R. J. Clarke, "Relation between the Karhunen–Loève and cosine transforms", *IEEE Proc. Part F: Commun., Radar and Signal Process.*, vol.128, no. 6, pp. 359-360, 1981.
- [167] М. А. Чичева, "Эффективный алгоритм дискретного косинусного преобразования четной длины", *Компьютерная оптика*, № 18, с. 147-149, 1998.
- [168] М. А. Чичева, "Быстрые алгоритмы дискретных косинусных преобразований", *Компьютерная оптика*, № 16, с. 122-130, 1996.
- [169] K. Rose, A. Heiman, and I. Dinstein, "DCT/DST alternate-transform of image coding", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, no. 1, pp. 94-101, Jan., 1990.
- [170] K. R. Rao, and J. J. Hwang, *Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [171] Ю. Б. Буркатовская, М. А. Карагодин, и А. Н. Осокин, "Двумерные дискретные преобразования в алгоритмах сжатия видеопоследовательностей" *Известия Томского политехнического университета*, т. 309, № 2, с. 17-22, 2006.
- [172] Z. Wang , "On computing the discrete Fourier and cosine transforms", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 33, no. 4, pp. 1341-1344, 1983.

- [173] H. Kitajima, "A symmetric cosine transform", *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-29, no. 4, pp. 317-323, 1985.
- [174] S. A. Martucci, "Convolution-multiplication properties of the entire family of discrete sine and cosine transforms", in *Proc. 26th Annual Conf. Information Sciences and Systems (CISS'92)*, Princeton, NJ, March, 1992, pp. 399-404.
- [175] S. A. Martucci, "Digital filtering of images using the discrete sine and cosine transform", *Optical Engineer.*, vol. 35, no. 1, pp. 119-127, January, 1996.
- [176] Процько І., "Ефективне обчислення дискретних косинусних перетворень", *Вісник НУ "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 591, с. 58–63, 2007.
- [177] I. Prots'ko, "Fast Cosine Transform Algorithm on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. of the 2nd Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2006)*, Lviv-Polyana, 24-27 may, 2006, pp. 65–66.
- [178] I. Prots'ko, "Algorithm of Efficient Computation of DCT I-IV Using Cyclic Convolutions", *Int. J. Circuits, Syst. and Signal Process.*, vol. 7, iss. 1, pp. 1-9, 2013.
- [179] І. О. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДКП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 732, с. 274-280, 2012.
- [180] І. О. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДКП на основі циклічних згорток", *Моделювання та інформаційні технології*" зб. наук. праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, Вип. 65, с. 110-118, 2012.
- [181] I. Prots'ko, "The Module of DCT^{II} for Size N=8 using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2013)*, Polyana, february 2013, pp. 299-301.
- [182] I. Protsko, "The Efficient Algorithm of Discrete Cosine Transform", in *Proc. IXth Int.l Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2007)*, Polyana, 20-24 february, 2007, pp. 163-164.

- [183] R. J. Clarke, "Relation between the Karhunen–Loève and sine transforms", *Electronics Lett.*, vol. 20, iss. 1, pp. 12-13, 1984.
- [184] P. S. Kumar, and K. M. M. Rabhu, "A set of new fast algorithms for DCTs and DSTs", *Int. J. of Electronics*, vol.76, no. 4, pp. 553-568, 1994.
- [185] Y. Voronenko, and M. Püschel, "Algebraic Signal Processing Theory: Cooley-Tukey Type Algorithms for Real DFTs", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no.1, pp. 1-19, January, 2009.
- [186] D. F. Chiper, M. N. S. Swamy, M. O. Ahmad, and T. Stouraitis, "A Systolic Array Architecture for the Discrete Sine Transform", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 9, pp. 2347-2354, 2002.
- [187] M. N. Murty "Realization of Prime-Length Discrete Sine Transform Using Cyclic Convolution", *Int. J. Engineering Science and Technology*, vol. 5, no.3, pp.583-589, March, 2013.
- [188] I. Prots'ko, "Generalized approach for synthesis and computation DST using cyclic convolutions", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2012)*, Polyana, 18-21 april, 2012, pp.66-67.
- [189] I. O. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДСП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі*, № 743, с. 140-151, 2012.
- [190] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Algorithm of efficient computation DST^{I-IV} using cyclic convolutions", *WSEAS Trans. Signal Process.*, vol. 10, pp. 278-288, 2014.
- [191] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Computational structure of DST-II using convolvers", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2015)*, Polyana, february, 2015, pp.200-202.
- [192] I. O. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДСП на основі циклічних згорток", *Збірн. наук. праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*, Вип. 65, с.196-205, 2012.

- [193] I. Prots'ko, "Synthesis of Efficient Algorithms of DST for Types I, IV via Cyclic Convolutions", *Int. J. Electronic Engineering and Computer Science*, vol.1, no. 1, pp. 6-13, 2016.
- [194] H. Malvar, "Fast computation of the discrete cosine transform and discrete Hartley transform", *Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, ASSP-35, no.10, pp.1484-1485, 1987.
- [195] A. Ganapathiraju, "Report on Analysis and Characterization of Fast Fourier Transform Algorithms", Institute for Signal and Information Processing, Mississippi State University, Technical report, 1999.
- [196] Р. Н. Брейсуэлл, "Быстрое преобразование Хартли", *Труды института инженеров по электронике и радиотехнике*, т.72, №8, с.19-27, 1984.
- [197] A. Amira, "An FPGA based parameterisable system for discrete Hartley transforms implementation", in *Proc. Seventh Int. Symp. Signal Process. and Its Applications*, Paris, vol. 1, p. 625-628, 2003.
- [198] P. Duhamel, and M. Vetterli, "Improved Fourier and Hartley transform algorithms: application to cyclic convolution of real data", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 34, pp. 642-644, 1986.
- [199] P. K. Meher, and G. Panda, "Fast computation of circular convolution of real-valued data using prime factor fast Hartley transform algorithm" , *IETE J. of Research*, vol.41, no. 4, pp. 261-264, 1995.
- [200] C. H. Paik, G. L. Cote, J. S. DaPonte, and M. D. Fox, "Fast Hartley transforms for spectral analysis of ultrasound Doppler signals", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol.35, no.10, pp. 885-888, 1988.
- [201] S. C. Pei, and I. I. Yang, "Computing pseudo-Wigner distribution by the fast Hartley transform", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, pp. 2346-2349, September, 1992.
- [202] C. H. Paik, and M. D. Fox, "Fast Hartley transforms for image processing", *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol.7, no.2, pp. 149-153, 1988.
- [203] P.-S. Yeh, "Data compression properties of the Hartley transform", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-37, no. 4, pp. 50-51, 1989.

- [204] J.-L. Wu, and W.-P. Shiu, "Discrete Hartley Transform in Error Control Coding", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-39, pp. 2356-2359, Oct., 1991.
- [205] R. Saatcilar, S. Ergintav, and N. Canitez, "The use of the Hartley transform in geophysical applications", *Geophysics*, vol. 55, no. 11, pp. 1488-1495, 1990.
- [206] N. C. Hou, H. I. Chang, O. Ersoy, "Generalized discrete Hartley transform", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, pp. 2931-2940, 1992.
- [207] A. Arico, S. Serra-Capizano, and M. Tasche, "Fast and numerically stable algorithms for discrete Hartley transforms and applications to preconditioning", *Commun. in information and system*, vol. 5, no. 1, pp. 21-68, 2005.
- [208] Р. Брейсуэлл, *Преобразование Хартли. Теория и приложения*. Москва: Мир, 1990.
- [209] R. P. Millane, "Analytic properties of the Hartley Transform and their implications", *Proc. IEEE*, vol. 82, no. 3, pp. 413-428, 1994.
- [210] R. F. Ulmann, "An algorithm for fast Hartley transform", Stanford Exploration Project reports, pp. 45-62, 1984.
- [211] M. Popovic, and D. Sevic, "A new look at the comparison of the fast Hartley and Fourier transform", *IEEE Trans. Signal Process.* vol. 42, no. 8, pp. 2178-2182, 1994.
- [212] O. Buneman, "Conversion of FFT's to fast Hartley transforms", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol. 7, pp. 624-638, 1986.
- [213] И. Кантор, "Эффективное вычисление дискретного преобразования Фурье и дискретного преобразования Хартли", 2002. [Электронный ресурс]. Доступно: http://algotlist.manual.ru/maths/fft_art.zip .
- [214] S. Bouguezel, M. O. Ahmad, and M. N. S. Swamy, "New Parametric Discrete Fourier and Hartley Transforms, and Algorithms for Fast Computation", *IEEE Trans. Circuits and Syst. I: Reg. Papers*, vol. 58, no. 3, pp. 562-575, March, 2011.
- [215] H. Shu, and J. Wu, "Fast radix3 algorithm for the Generalized Discrete Hartley Transform of type II", *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 19, no. 6, pp. 348- 351, 2012.

- [216] D. F. Chiper, "Fast radix-2 algorithm for the discrete Hartley transform of type II", *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 18, no. 11, pp. 687-689, 2011.
- [217] С. Л. Злобин, "Матричные рекуррентные алгоритмы быстрого преобразования Хартли по основаниям 2 и 4 повышенного быстродействия", *Радиотехника*, №11, с. 22-32, 2009.
- [218] S. Bouguezel, M. O. Ahmad, and M. N. S. Swamy, "A new split-radix FHT algorithm for length- $q \cdot 2^m$ DHTs", *IEEE Trans. Circuits Syst. I.*, vol. 51, no. 10, pp.2031-2043, Oct., 2004.
- [219] H. M. de Oliveira, and R. M. Campello de Souza, "A factorization scheme for some discrete Hartley transform matrices", in *Proc. of Int. Confr. on System Engineering, Communications and Informations Technologies*, Punta Arenas, Chile, 2001. [Online]. Available: http://www2.ee.ufpe.br/codec/1_01.pdf
- [220] Y.-H. Chan, and W.-C. Siu, "New Formulation of Fast Discrete Hartley Transform with the Minimum Number of Multiplications", in *Proc. IEEE Pacific Rim Conference on communications, Computers and Signal Processing*, Victoria, Canada, May 9-10, 1991, pp. 323-326.
- [221] A. Arico, S. Serra-Capizzano, and M. Tasche, "Fast and numerically stable algorithms for Discrete Hartley Transforms and applications to preconditioning", *Commun. in information and systems*, vol. 5, no. 1, pp. 21-68, 2005.
- [222] Y.-M. Huang, and J.-L. Wu, "Polynomial transform based algorithms for computing two-dimensional generalized DFT, generalized DHT, and skew circular convolution", *Signal Process.*, vol. 80, pp. 2255-2260, 2000.
- [223] D. F. Chiper, M. N. S. Swamy, and M. O. Ahmad, "An efficient design approach for a prime-length generalized Hartley transform systolic array", *IEEE DSP Workshop*, Hunt, TX, 2000. [Online]. Available: <http://www.spid.rice.edu/DSP2000>.
- [224] D. F. Chiper, M. N. S. Swamy, and M. O. Ahmad, "An efficient systolic array algorithm for the VLSI implementation of a prime-length DHT", in *Proc. Int. Symp. Signals, Circuits Syst. (ISSCS 2005)*, Iasi, Romania, July, 2005, pp. 167-169.

- [225] P. K. Meher, J. C. Patra, and M. N. S. Swamy, "High-throughput memory-based architecture for DHT using a new convolutional formulation", *IEEE Trans. Circuits Syst. II.*, vol. 54, no. 7, pp. 606-610, July, 2007.
- [226] D. P.-K. Lun, and W.-C. Siu, "On prime factor mapping for the discrete Hartley Transform", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 39, no. 6, pp. 1399-1411, June, 1992.
- [227] І.О. Процько, "Приведення до ефективних обчислень довільних обсягів ортогональних перетворень Хартлі", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 522, с. 85-89, 2004.
- [228] I. Prots'ko, "The Efficient Computation of Discrete Hartley Transform on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. Vth Int. Scientific and Technical Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT 2010)*, Lviv, 14-16 october, 2010, pp.157-158.
- [229] I. Prots'ko, "The Efficient Computation DHT using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2011)*, Polyana, 24-28 february, 2011, pp. 85-86.
- [230] І. О. Процько, "Ефективне обчислення дискретного перетворення Хартлі на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи та мережі*, № 688, с. 190-196, 2010.
- [231] І. О. Процько, "Синтез та обчислення основних типів ДПХ на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 744, с. 302-311, 2012
- [232] I. Prots'ko, "Algorithm of efficient computation of generalized discrete Hartley transform based on cyclic convolutions", *IET Signal Process.*, vol. 8, iss. 4, pp.301-308, 2014.
- [233] D. I. Moldovan, and J. A. B. Fortes, "Partitioning and mapping of algorithms into fixed size systolic arrays", *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-35(1), pp. 1-12, January, 1986.

- [234] В. А. Костенко, "Особенности построения эффективных вычислительных систем для цифровой обработки сигналов на базе систолических процессоров", *Радиотехника*, № 7-8, с. 31-38, 1992.
- [235] І. О. Процько, та В. А. Радомський, "Пристрій для обчислення швидкого трансформування Фур'є", *G06F7/00, G06F15/00, Декл. патент 346144 Україна*, 15.03.2001, Бюл. №2.
- [236] І. О. Процько, "Обчислювальні структури адаптивного до обсягу ШПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 651, с. 145-151, 2009.
- [237] R. A. Iannucci, "Toward a dataflow/von Neumann hybrid architecture", in *Proc. 15th Int. Symp. on Computer Architecture (ISCA)*, Honolulu, Hawaii, May, 1988, pp. 131-140.
- [238] I. Prots'ko, and R. Rikmas "Analysys parallel processing DHT using convolution on SIMT model", in *Proc. VIIth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2012)*, Lviv, 20-24 november, 2012, pp. 136-137.
- [239] М. Абрамович, и И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*. Москва: Наука, 1979.
- [240] V. Hindriksen, "How expensive is an operation on a CPU", 2012. [Online]. Available: <https://streamcomputing.eu/blog/2012-07-16/how-expensive-is-an-operation-on-a-cpu/> Accessed on: May, 2018.
- [241] О. А. Гришук, та І. О. Процько, "Обчислення значень канонічного розкладу одновимірної величини", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*. № 501, с. 30–32, 2004.
- [242] І. О. Процько, та В. М. Теслюк, "Пристрій канонічного розкладу числа на множники", *G06F7/04(2006.01), G06F17/10(2006.01), Патент 116912 Україна*, 25.05.2018, Бюл. №10.
- [243] І. О. Процько, "Розпаралелення на рівні підзадач алгоритму ШГП на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська*

політехніка": *Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №826, с. 306-312, 2015.

- [244] I. Prots'ko, "Computational parallel models of the discrete harmonic transforms", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2005)*, Lviv-Polyana, 23-26 february, 2005, pp. 230-231.
- [245] I. O. Процько, "Обчислювальні паралельні моделі гармонічних дискретних перетворень", на *Наук.-прак. конф. Математичне моделювання складних систем*, Львів, 2007, с. 214-219.
- [246] S. W. Smith, *Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists.*/ 2nd ed., California: Technical Publishing, 2003.
- [247] T. Srikanthan, N. Kumar, and A. J. Nanyang, "A Circular Formulation of the Prime Length DHT Kernel and its FPGA Implementation", in *Proc. Information, Communications and Signal Processing of the Fourth International Conf., ICSP 2003*, Singapore, Dec. 2003, pp. 23-27.
- [248] R. Asir Sejoie Nath, and D. Jessintha, "High Speed Systolic Array Discrete Cosine Transform Architecture With Fast Convolution", in *Int. J. on Advanced Computer Theory and Engineering*, Singapore, 2013, vol. 2, iss. 4, pp. 2319-2526.
- [249] K. Mohammad, and S. Agaian, "Efficient FPGA implementation of convolution", in *Proc. IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics*, San Antonio, TX, USA, October, 2009, pp. 3478-3483.
- [250] A. Saha, A. Banerjee, A. Dandapat, and P. Bhattacharyya, "ASIC Implementation of High Speed Processor for Calculating Discrete Fourier Transformation using Circular Convolution Technique", *WSEAS Trans. Circuits and Syst.*, iss. 8, vol. 10, pp.278-288, August, 2011.
- [251] S. B. Pan, and R.-H. Park, "Unified Systolic Arrays for Computation of the DCT/DST/DHT", *IEEE Trans. Circuits and Syst. for Video Techn.*, vol. 7, no. 2, pp.413-419, 1997.

- [252] H.-C. Chen, J.-I. Guo, C.-W. Jen, and T.-S. Chang, "Distributed arithmetic realisation of cyclic convolution and its DFT application", *IEE Proc. Circuits Devices Syst.*, vol. 152, no. 6, pp. 615-629, December, 2005.
- [253] E. Agraval, and K. Raj, "Type-IV DCT using Systolic Array based on Cyclic Convolution Algorithm", *Int. J. of Electronics and Commun. Eng.*, vol. 2, pp. 93-97, Aug., 2012.
- [254] І. О. Процько, "Взаємозв'язок ефективних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток для обсягів 2^n ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 685, с. 125-130, 2010.
- [255] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Computational structure of DST-II using convolvers", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2015)*, Polyana, february, 2015, pp.200-202.
- [256] I. Prots'ko, "The algorithm and structures for efficient computation of type II/III DCT/ DST/ DHT using cyclic convolutions", *Int. J. Signal Process. Syst.*, vol. 2, no. 2, pp. 119-127, 2014.
- [257] I. Prots'ko, "Interconnection discrete harmonic transforms sizes 2^n on base circular convolutions", in *Proc. VIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2010)*, Polyana, 20-23 april, 2010, pp.49-50.
- [258] Z. Wang, "Harmonic analysis with a real frequency function", Part III, *Appl. Math. Comput.*, vol. 9, pp. 245-255, 1981.
- [259] S. Zohar, "Faster Fourier Transformation: The Algorithm of S. Winograd", Jet Propulsion Laboratory JPL Publication 78-104, under NASA. Contract No. NAS7-100, pp. 1-93, February 15, 1979.
- [260] І. Процько, та В. Радомський, "Узагальнений підхід швидкого трансформування класу Фур'є на основі згорток" на *V Всеукр. міжн. конф. УкрОБРАЗ'2000*, Київ, 2000, с. 249-252.

- [261] І. Процько, та В. Радомський, "Обчислення швидкого трансформування Фур'є за допомогою згорток", *II Нац. наук.-практ. конф. "Системний аналіз та інформаційні технології": Збірка тез доповідей*, Київ: НТУУ "КПІ", 2000, с. 97-98.
- [262] I. Protsko, "Adaptive synthesis to transform size of Fast Fourier Algorithm", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2003)*, Lviv-Slavske, 18-22 february 2003. pp. 230-231.
- [263] I. Prots'ko, "Computational structure of adaptive to transform size FFT", in *Proc. Xth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2009)*, Polyana, 24-28 february, 2009, pp. 255-257.
- [264] I. Prots'ko, "The compare of computation FFT on base cyclic convolutions for size of $N=2^n$ ", in *Proc. Vth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2009)*, Polyana, 22-24 april, 2009, pp. 70-72.
- [265] І. О. Процько, "Особливості обчислення циклічних згорток для ідентичних послідовностей", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 719, с. 200-206, 2011.
- [266] I. Prots'ko, "The specific of computation cyclic convolutions for identical sequences", in *Proc. VIth Int.Scienc. and Tech. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2011)*, Lviv, 16-19 november, 2011, pp. 301-302.
- [267] Р. Рикмас, "Порівняння ефективності реалізацій ШПФ в програмних бібліотеках", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 711, с.26-30, 2011.
- [268] M. J. Bergström, "Study of Convolution Algorithms using CPU and Graphics Hardware", M. S. thesis in the Programme Computer Science, University of Gothenburg Chalmers University of Technology Department of Computer Science and Engineering, Göteborg, Sweden, Sept., 2012.
- [269] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The program implementation of the synthesis the efficient algorithms for computation of DCT-II via cyclic

- convolutions", in *Proc. IXth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2014)*, Lviv, 18-22 november, 2014, pp. 116-118.
- [270] FFTW (Fastest Fourier Transform in the West). [Online]. Available: <http://www.fftw.org/>.
- [271] I. Prots'ko, and R. Rykmas, "The Runtime Benchmarking of DCT-II based on Cyclic Convolutions", *Int. J. of Condition Monitoring and Diagnostic Engineering Management*, vol. 21, no. 2, pp. 11-16, 2018.
- [272] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The efficient computation of integer DCT based on cyclic convolutions", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Computer Sciences & Information Technologies (CSIT'2018)*, Lviv, 11-14 september 2018, pp.245-248.

ДОДАТКИ

Додаток А

Твірні масиви для синтезу алгоритму обчислення ДКП-II коротких обсягів перетворення

N=9,

Pr(17) = (1, 5, 11, 17, 13, 7) (3, 15) (0) (2, 10, 14) (16, 8, 4) (6, 12),

Sr(17) = (+, +, -, -, -, +) (+, -) (1) (+, -, -) (-, +, +) (+, -),

Pr'(17) = (1, 5, 7, 1, 5, 7) (3, 3) (0) (2, 8, 4) (4, 2, 8) (6, 6);

N=10,

Pr(19) = (1, 3, 9, 13) (19, 17, 11, 7) (5, 15) (0) (2, 6) (18, 14) (4, 12) (16, 8),

Sr(19) = (+, +, +, -) (-, -, -, +) (+, -) (1) (+, +) (-, -) (+, -) (+, -),

Pr'(19) = (1, 3, 9, 7) (1, 3, 9, 7) (5, 5) (0) (2, 6) (2, 6) (4, 8) (4, 8);

N=11,

Pr(21) = (1, 3, 9, 17, 7, 21, 19, 13, 5, 15) (11, 0) (2,6,18,10,14) (4,12,8,20,16);

Sr(21) = (+, +, -, 0, -, +, +, -, 0, -) (-1, 1) (+, -, +, -, -) (+, -, -, +, -)

Pr'(21) = (1, 3, 9, 5, 7, 1, 3, 9, 5, 7) (11, 0) (2, 6, 4, 10, 8) (4, 10, 8, 2, 6),

N=12,

Pr(23) = (1,5,23,19)(3,15,21,9)(7,13,17,11)(0)(2,10)(22,14)(4,20)(18,6)(8,16),

Sr(23) = (+, +, -, -) (+, -, -, +) (+, -, -, +) (1) (+, +) (-, -) (+, -) (-, +) (+, -),

Pr'(21) = (1, 5, 1, 5) (3, 9, 3, 9) (7, 11, 7, 11) (0) (2, 10) (2, 10) (4, 4) (6,6) (8,8);

N=13,

Pr(25) = (1, 3, 9, 25, 23, 17, 5, 15, 7, 21, 11, 19) (13, 0) (2, 6, 18) (4, 12, 16) (8, 24, 20) (10, 22, 14);

Sr(25) = (+, +, +, -, -, -, +, -, +, -, +, -) (0, 1) (+, +, -) (+, +, -) (+, -, -) (+, -, -),

Pr'(25) = (1, 3, 9, 1, 3, 9, 5, 11, 7, 5, 11, 7) (13, 0) (2, 6, 8) (4, 12, 10) (8, 2, 6) (10, 4, 12);

N=14,

Pr(27)=(1, 3, 9, 27, 25, 19) (5, 15, 11, 23, 13, 17)(7, 21)(0)(2, 6, 18) (4,12,20) (24,16,8) (26,22, 10),

Sr(27)= (+, +, +, -, -, -)(+, -, +, -, +, -) (+, -)(+)(+, +, -)(+, +, -) (-, -, +)(-, -, +),

Pr'(27)=(1, 3, 9, 1, 3, 9) (5, 13, 11, 5, 13, 11) (7, 7) (0) (2, 6, 10) (4,12, 8) (4, 12, 8)(2, 6, 10);

N=16,

Pr(31) = (1, 3, 9, 27, 17, 13, 25, 11, 31, 29, 23, 5, 15, 19, 7, 21) (0) (2, 6, 18, 10, 30, 26, 14, 22) (4, 12, 28, 20) (8, 24) (16),

Sr(31)=(+, +, +, -, -, +, -, +, -, -, -, +, +, -, +, -) (+) (+, +, -, +, -, -, +, -) (+, +, -, -) (+, -) (0),

Pr(31) = (1, 3, 9, 5, 15, 13, 7, 11, 1, 3, 9, 5, 15, 13, 7, 11) (0) (2, 6, 14, 10, 2, 6, 14, 10) (4, 12, 4, 12) (8, 8) (16);

N=17,

Pr(33) = (1, 3, 9, 27, 13, 29, 19, 11, 33, 31, 25, 7, 21, 5, 15, 23) (17, 0) (2, 6, 18, 14, 26, 10, 30, 22) (4, 12, 32, 28, 16, 20, 8, 24),

Sr(33) = (+, +, +, -, +, -, -, +, -, -, -, +, -, +, +, -) (0, 1)(+, +, -, +, -, +, -, -)(+, +, -, -, +, -, +, -),

Pr'(33) = (1, 3, 9, 7, 13, 5, 15, 11, 1, 3, 9, 7, 13, 5, 15, 11) (17, 0) (2, 6, 16, 14, 8, 10, 4, 12) (4, 12, 2, 6, 16, 14, 8, 10);

N=19,

Pr(37) = (1, 3, 9, 27, 5, 15, 31, 17, 25, 7, 21, 13, 37, 35, 29, 11, 33, 23) (19, 0) (2, 6, 18, 22, 10, 30, 14, 34, 26) (4, 12, 36, 32, 20, 16, 28, 8, 24);

Sr(33) = (+, +, +, -, +, +, -, +, -, +, -, +, -, -, +, -, -)(0, 1)(+, +, +, -, +, -, +, -, -, +, +, -, -, -, +, -, +, -),
Pr'(37) = (1, 3, 9, 11, 5, 15, 7, 17, 13, 7, 17, 13, 1, 3, 9, 11, 5, 15) (19, 0) (2, 6, 18, 16, 10, 8, 14, 4, 12, 4, 12, 2, 6, 18, 16, 10, 8, 14);

N=20,

Pr(39)=(1,7,31,23)(2,14,18,34)(3,21,13,11)(4,28,36,12)(5,35)(6,38,26,22)(8,24)(9,17,39,33)(10)(15,25)(16,32)(19,27,29,37)(20)(30);

Sr(39) = (+, +, -, -)(+, +, +, -)(+, -, +, +)(+, -, -, +)(+, -)(+, -, -)(+, -)(+, +, -, -)(+)(+, -)(+, -)(+, -, -)(0)(-),
Pr'(39)=(1,7,9,17)(2,14,18,6)(3,19,13,11)(4,12,4,12)(5,15)(6,2,14,18)(8,16)(9,17,1,7)(10)(15,15)(16,8)(19,13,11,3)(20)(10);

N=21,

Pr(41)=(1,5,25,41,37,17)(2,10,34)(3,15,9,39,27,33)(4,20,16)(6,30,18)(7,35)(8,40,32)(11,29,23,31,13,19)(12,24,36)(14)(21)(22,26,38)(28);

Sr(41) = (+, +, -, -, +)(+, +, -)(+, +, +, -, -)(+, +, +)(+, -, +)(+, -)(+, -, -)(+, -, -, +, +)(+, +, -)(+)(0)(-, -, -)(-),
Pr'(41)=(1,5,17,1,5,17)(2,10,8)(3,15,9,3,15,9)(4,20,16)(6,12,18)(7,7)(8,2,10)(11,13,19,11,13,19)(2,10,8)(14)(21)(20,16,4)(14);

N=28,

Pr'(55)=(0)(1,3,9,27,25,19,1,3,9,27,25)(2,6,18,2,6,18)(4,12,20)(5,15,11,23,13,17,5,15,11,23,13,17)(7,21,7,21)(8,24,16)(10,26,22,10,26,22)(14,14)(16,8,24)(20,4,12)(28),

Sr(55)=(+)(+, +, +, +, -, +, -, -, -, +, -)(+, +, +, -, -)(+, +, -)(+, +, -, +, -, -, -, +, -)(+, +, -)(+, +, -)(+, -, +, -, +, -)(+, -)(+, -, -)(0),

Pr(55)=(0)(1,3,9,27,31,19,55,53,47,29,25,37)(2,6,18,54,50,38)(4,12,36)(5,15,45,23,43,17,51,41,11,3,13,39)(7,21,49,35)(8,24,40)(10,30,22,46,26,34)(14,42)(16,48,32)(20,52,44)(28).

Додаток Б

**Варіанти твірних масивів для синтезу алгоритму обчислення ДСП-II
коротких обсягів перетворення**

N=7

(1,3,9,27,25,19) (2,6,18,26,22,10) (4,12,8,24,16,20) (5,15,17,23,13,11) (7,21) (14) ;
 (1,3,5,1,3,5)(2,6,4,2,6,4)(4,2,6,4,2,6)(5,1,3,5,11,3)(7,7)(0),
 (+,+,+,-,-,-)(+,+,-,-,-,+)(+,+,+,-,-,-)(+,-,-,-,+)(+,-)(0);
 Pr(n)= **(1,3,9,27,25,19)** (2,6,18,26,22,10)(7),
 Pc(n)= (1,3,9,27,25,19) (5,15,17,23,13,11) (7,21);

(1,9,25)(2,18,22)(3,27,19)(4,8,16)(5,17,13)(6,26,10)(7)(11,15,23)(12,24,20)(14)(21);
 (1,5,3)(2,4,6)(3,1,5)(4,6,2)(5,3,1)(6,2,4)(7)(3,1,5)(2,4,6)(0)(7),
 (+,+,-)(+,-,-)(+,-,-)(+,-,-)(+,-,-)(+,-,-)(0)(+,-,-)(+,-,-)(0)(-);
 Pr(n)= (1,9,25) (2,18,22),
 Pc(n)= (1,9,25) (3,27,19) (5,17,13) (7)(11,15,23) (21);

N=8

(1,3,9,27,17,19,25,11)(2,6,18,22)(4,12)(8,24)(5,15,13,7,21,31,29,23)(10,30,26,14)(16)(20,28) ,
 (1,3,7,5,1,3,7,5)(2,6,2,6)(4,4)(8,8)(5,1,3,7,5,1,3,7)(6,2,6,2)(0)(4,4),
 (+,+,+,-,-,-,+)(+,+,-,-)(+,+)(+,-)(+,+,+,-,-,-,-)(+,-,-,+)(0)(-,-);
 Pr(n)= **(1,3,9,27,17,19,25,11)** (2,6,18,22)(4,12)(8,24),
 Pc(n)= (1,3,9,27,17,19,25,11) (5,15,13,7,21,31,29,23);

(1,7,17,23)(2,14)(3,21,19,5)(4,28)(6,10)(8,24)(9,31,25,15)(11,13,27,29)(12,20)(16)(18,30)(22,26);
 (1,7,1,7)(2,2)(3,5,3,5)(4,4)6,6)(8,8)(7,1,7,1)(5,3,5,3)(4,4)(0)(2,2)(6,6),
 (+,+,+,-,-,+)(+,+,-,-,+)(+,-)(+,+)(+,-,-,+)(+,+,-,-,+)(+,-)(0)(-,-)(-,-);
 Pr(n)= **(1,7,17,23)(2,14)(3,21,19,5)(4,28)(6,10)(8,24)**,
 Pc(n)= (1,7,17,23)(3,21,19,5)(9,31,25,15)(11,13,27,29);

N=9

(1,5,25,17,13,29)(2,10,14,34,26,22)(3,15)(4,20,28,32,16,8)(6,30)(7,35,31,11,19,23)(9)(12,24)(18)
 (21,33)(27);
 (1,5,7,1,5,7)(2,8,4,2,8,4)(3,3)(4,2,8,4,2,8)(6,6)(7,1,5,7,1,5)(6,6)(0)(3,3)(9),
 (+,+,+,-,+,-)(+,+,+,-,-,-)(+,+)(+,-,-,-,+)(+,-)(+,-,-,+,-,-)(+)(+,-)(0)(-,-)(-);
 Pr(n)= **(1,5,25,17,13,29)(2,10,14,34,26,22)(3,15)(6,30)(9)**,
 Pc(n)= (1,5,25,17,13,29) (3,15) (7,35,31,11,19,23)(9) (21,33) (27);

(1,7,13,19,25,31)(2,14,26)(3,21)(4,28,16)(5,35,29,23,17,11)(6) (8,20,32)(9,27)(10,34,22) (12)(15,
 33)(18)(24)(30) ;
 (1,7,5,1,7,5)(2,4,8)(3,3)(4,8,2)(5,1,7,5,1,7)(6)(8,2,4)(9,9)(8,2,4)(6)(3,3)(0)(6)(6),
 (+,+,+,-,-,-)(+,+,-,-)(+,-,-,+)(+,-,-,-,+)(+)(+,-,-,+,-,-)(+)(+,-)(0)(-)(-);
 Pr(n)= **(1,7,13,19,25,31)** (2,14,26)(3,21)(4,28,16)(6)(9,27);
 Pc(n)= (1,7,13,19,25,31)(3,21) (5,35,29,23,17,11) (9,27) (15 33).

N=10

(1,3,9,27)(2,6,18,14)(4,12,36,28)(5,15)(7,21,23,29)(8,24,32,16)(10,30)(11,33,19,17)(13,39,37,31)(20)(22,26,38,34)(25,35),

(1,3,9,7)(2,6,2,6)(4,8,4,8)(5,5)(7,1,3,9)(8,4,8,4)(10,10)(9,7,1,3)(7,1,3,9)(0)(2,6,2,6)(5,5),

(+,+,+,-)(+,+,+,+)(+,+,-,-)(+,+)(+,-,-,-)(+,-,-,+)(+,-)(+,-,+,+)(+,-,-,-)(0)(-,-,-,-)(-,-);

Pr(n)= **(1,3,9,27)(2,6,18,14)(4,12,36,28)(5,15)(10,30)**,

Pc(n)= (1,3,9,27)(5,15)(7,21,23,29)(11,33,19,17)(13,39,37,31)(25,35).

N=11

(1,3,9,27,37,23,25,31,5,15)(2,6,18,10,30)(4,12,36,20,16)(7,21,19,13,39,29,43,41,35,17)(8,24,28,40,32)(11,33)(14,42,38,26,34)(22);

(1,3,9,5,7,5,1,3,9,5,7)(2,6,4,10,8)(4,10,8,2,6)(7,1,3,9,5,7,1,3,9,5)(8,2,6,4,10)(11,11)(8,2,6,4,10)(0),

(+,+,+,-,-,-,-,+)(+,+,+,+,-)(+,+,-,+,+)(+,+,+,+,-,-,-,-,+)(+,-,-,-,-)(+,-)(+,-,-,-,-)(0);

Pr(n)= **(1,3,9,27,37,23,25,31,5,15)(2,6,18,10,30)**,

Pc(n)= (1,3,9,27,37,23,25,31,5,15)(7,21,19,13,39,29,43,41,35,17)(11,33);

(1,5,25,37,9)(2,10,6,30,18)(3,15,31,23,27)(4,20,12,16,36)(7,35,43,39,19)(8,40,24,32,28)(11)(13,21,17,41,29)(14,26,42,34,38)(22)(33),

(1,5,3,7,9)(2,10,6,8,4)(3,7,9,1,5)(4,2,10,6,8)(7,9,1,5,3)(8,4,2,10,6)(11)(13,1,5,3,7)(8,4,2,10,6)(0)(11),

(+,+,-,-,+)(+,+,+,-,+)(+,+,-,-,-)(+,+,+,+,-)(+,-,-,-,+)(+,-,-,-,-)(+)(+,+,+,-,-)(+,-,-,-,-)(0)(-);

Pr(n)= (1,5,25,37,9)(2,10,6,30,18)(11),

Pc(n)= (1,5,25,37,9)(3,15,31,23,27)(7,35,43,39,19) (11)(13, 21,17,41,29)(33).

Додаток В

Твірні масиви для синтезу алгоритму обчислення ДСП-IV коротких обсягів перетворення

N=5,

(1,3,9,27) (21,23,29,7) (19,17,11,33)(39,37,31,13) (5,15) (25,35);
 (1,3,9,7) (1,3,9,7) (1,3,9,7) (1,3,9,7) (5,5)(5,5),
 (+,+,+,-)(-,-,-,+)(+,+,+,-)(-,-,-,+)(+,+)(-,-);

N=6

(1,5,25,29)(3,15,27,39)(7,35,31,11)(9,45,33,21)(13,17,37,41)(19,47,43,23);
 (1,5,23,19)(3,15,21,9)(7,13,17,11)(9,3,15,21)(13,17,11,7)(19,1,5,23),
 (1,5,1,5)(3,9,3,9)(7,11,7,11)(9,3,9,3)(11,7,11,7)(5,1,5,1),
 (+,+,-,-)(+,-,-,+)(+,-,-,+)(+,-,-,+)(+,-,-,+)(+,-,-,+);

N=7

(1,3,9,27,25,19)(5,15,45,23,13,39)(7,21)(11,33,43,17,51,41)(29,31,37,55,53,47)(35, 49);
 (1,3,9,1,3,9)(5,13,11,5,13,11)(7,7)(11,5,13,11,5,13)(1,3,9,1,3,9)(7,7),
 (+,+,+,+,+)(+,-,-,+,-)(+,+)(+,-,-,+,-)(-,-,-,-,-)(-,-);

(1,9,25)(3,27,19)(5,45,13)(7)(11,43,51)(15,23,39)(17,41,33)(21)(29,37,53)(31,55,47) (35)(49);
 (1,9,3)(3,1,9)(5,11,13)(7)(11,13,5)(13,5,11)(11,13,5)(7)(1,9,3)(3,1,9)(7)(7),
 (+,+,+)(+,+)(+,-,+)(+)(+,-,-)(+,-,-)(+)(-,-,-)(-,-,-)(-,-);

N=8

(1,3,9,27,17,51,25,11,33,35,41,59,49,19,57,43)(5,15,45,7,21,63,61,55,37,47,13,39,53,31,29,23);
 (1,3,9,5,15,13,7,11,1,3,9,5,15,13,7,11)(5,15,13,7,11,1,3,9,5,15,13,7,11,1,3,9),
 (+,+,+,+,+,-,+,-,-,-,-,+,-,-)(+,+,-,+,-,-,-,-,+,-,-,+,-,+);

(1,7,49,23,33,39,17,55)(3,21,19,5,35,53,51,37)(9,63,57,15,41,31,25,47)(11,13,27,61, 43,45,59,29);
 (1,7,15,9,1,7,15,9)(3,11,13,5,3,11,13,5)(9,1,7,15,9,1,7,15)(11,13,5,3,11,13,6,3),
 (+,+,-,+,-,+,-)(+,+,+,-,-,-,-)(+,-,-,+,-,+,-)(+,+,+,-,-,-,+);

N=9

(1,5,25,53,49,29)(3,15)(7,35,31,11,55,59)(9,45)(13,65,37,41,61,17)(19,23,43,71,67,47) (21,33)
 (27,63)(39,51)(57,69);
 (1,5,11,9,13,7)(3,15)(7,1,5,11,17,13)(9,9)(13,7,1,5,11,17)(17,13,7,1,5,11)(15,3)(9,9)(3,15)(15,3),
 (+,+,+,-,-,+)(+,+)(+,+,+,-,-)(+,-)(+,-,-,-,+)(+,+,-,-,-)(+,+)(+,-)(-,-)(-,-);

N=10

(1,3,9,27)(5,15,45,55)(7,21,63,29)(11,33,19,57)(13,39,37,31)(17,51,73,59)(23,69,47,61)(25,75,65,35)
)(41,43,49,67)(53,79,77,71);
 (1,3,9,13)(5,15,5,15)(7,19,17,11)(11,7,19,17)(13,1,3,9)(17,11,7,19)(17,11,7,19)(15,5,15,5)(1,3,9,13)(
 13,1,3,9),
 (+,+,+,+)(+,+,-,-)(+,+,-,+)(+,+,+,-)(+,+,+)(+,-,-,-)(+,-,-,-)(+,-,-,+)(-,-,-,-)(-,-,-,-);

N=11

(1,3,9,27,81,67,25,75,49,59)(5,15,45,47,53,71,37,23,69,31)(7,21,63,13,39,29,87,85,79,61)(11,33)

1

Worked subarray sign-value:

{+5 +15 -5 -15}

CosMatrix - elements index(value):

5<0.9239) 15<0.3827) -5<-0.9239) -15<-0.3827)

15<0.3827) -5<-0.9239) -15<-0.3827) 5<0.9239)

-5<-0.9239) -15<-0.3827) 5<0.9239) 15<0.3827)

-15<-0.3827) 5<0.9239) 15<0.3827) -5<-0.9239)

X[2]=3 X[7]=8 X[17]=-18 X[12]=-13

* (3, 8, 18, 13)

5 -15.77 Y[1]=-47.49 + -15.77 = -63.27

15 -1.121 Y[3]=-18.68 + -1.121 = -19.8

5 15.77 Y[9]=-9.725 + 15.77 = 6.047

15 1.121 Y[27]=-12.39 + 1.121 = -11.27

2

Worked subarray sign-value:

{+7 -19 +17 -11}

CosMatrix - elements index(value):

7<0.8526) -19<-0.07846) 17<0.2334) -11<-0.6494)

-19<-0.07846) 17<0.2334) -11<-0.6494) 7<0.8526)

17<0.2334) -11<-0.6494) 7<0.8526) -19<-0.07846)

-11<-0.6494) 7<0.8526) -19<-0.07846) 17<0.2334)

X[3]=4 X[10]=-11 X[8]=9 X[14]=-15

X[16]=-17 X[9]=10 X[11]=-12 X[5]=6

* (-13, 1, -3, 9)

7 -17.71 Y[1]=-63.27 + -17.71 = -80.97

19 10.88 Y[3]=-19.8 + 10.88 = -8.921

17 -6.948 Y[9]=6.047 + -6.948 = -0.9014

11 11.63 Y[27]=-11.27 + 11.63 = 0.3594

-1

end

Worked row:

[0 4 6 8 12 16 20]

{+2 +6 +18 -14 } {+10 -10 } {+10 -10 } {+14 -2 -6 -18 } {-18 +14 -2 -6 } {-14 +2 +6 +18 }

0

Worked subarray sign-value:

{+2 +6 +18 -14}

CosMatrix - elements index(value):

2<0.9877) 6<0.891) 18<0.1564) -14<-0.454)

6<0.891) 18<0.1564) -14<-0.454) 2<0.9877)
 18<0.1564) -14<-0.454) 2<0.9877) 6<0.891)
 -14<-0.454) 2<0.9877) 6<0.891) 18<0.1564)

X[0]=1 X[10]=-11 X[9]=-10 X[19]=20

X[1]=2 X[8]=-9 X[11]=-12 X[18]=19

X[4]=5 X[14]=-15 X[5]=-6 X[15]=16

X[13]=-14 X[3]=4 X[16]=17 X[6]=-7

*(0, 0, 0, 0)

2 0 Y[2]= 0 + 0 = 0
 6 0 Y[6]= 0 + 0 = 0
 18 0 Y[18]= 0 + 0 = 0
 14 0 Y[26]= 0 + 0 = 0

1

Worked subarray sign-value:

{+10 -10}

CosMatrix - elements index(value):

10<0.7071) -10<-0.7071)

-10<-0.7071) 10<0.7071)

X[2]=3 X[7]=-8
 X[17]=18 X[12]=-13

*(21, 21)

10 0 Y[2]=0 + 0 = 0
 10 0 Y[6]=0 + 0 = 0
 10 0 Y[18]=0 + 0 = 0
 10 0 Y[26]=0 + 0 = 0

-1

end

Worked row:

[0 4 5 6 7 8 12 16 20]

{+4 +12 -4 -12 } {020 } {020 } {020 } {020 } {-12 +4 +12 -4 } {-4 -12 +4 +12 } {-12 +4 +12
 -4 }

0

Worked subarray sign-value:

{+4 +12 -4 -12}

CosMatrix - elements index(value):

4<0.9511) 12<0.5878) -4<-0.9511) -12<-0.5878)

12<0.5878) -4<-0.9511) -12<-0.5878) 4<0.9511)

-4<-0.9511) -12<-0.5878) 4<0.9511) 12<0.5878)
 -12<-0.5878) 4<0.9511) 12<0.5878) -4<-0.9511)

X[0]=1 X[10]=11 X[9]=10 X[19]=20

X[1]=2 X[8]=9 X[11]=12 X[18]=19

X[4]=-5 X[14]=-15 X[5]=-6 X[15]=-16

X[13]=-14 X[3]=-4 X[16]=-17 X[6]=-7

* (42, 42, 42, 42)

4 -3.553e-015 Y[4]= 0 + -3.553e-015 = -3.553e-015

12 0 Y[12]= 0 + 0 = 0

4 3.553e-015 Y[36]= 0 + 3.553e-015 = 3.553e-015

12 0 Y[28]= 0 + 0 = 0

1

Worked subarray sign-value:

{020}

CosMatrix - elements index(value):

0<0)

X[2]=0 X[7]=0 X[17]=0 X[12]=0

* (42)

20 0 Y[4]=-3.553e-015 + 0 = -3.553e-015

20 0 Y[12]=0 + 0 = 0

20 0 Y[36]=3.553e-015 + 0 = 3.553e-015

20 0 Y[28]=0 + 0 = 0

-1

end

Worked row:

[0 4 8 12 16 20]

{+5 +15 -5 -15 } {-15 +5 +15 -5 } {-5 -15 +5 +15 } {-15 +5 +15 -5 } {+15 -5 -15 +5 }

0

Worked subarray sign-value:

{+5 +15 -5 -15 }

CosMatrix - elements index(value):

5<0.9239) 15<0.3827) -5<-0.9239) -15<-0.3827)

15<0.3827) -5<-0.9239) -15<-0.3827) 5<0.9239)

-5<-0.9239) -15<-0.3827) 5<0.9239) 15<0.3827)

-15<-0.3827) 5<0.9239) 15<0.3827) -5<-0.9239)

X[0]=1 X[7]=8 X[8]=9 X[16]=17 X[15]=16

X[1]=2 X[17]=18 X[14]=15 X[9]=10 X[6]=7

X[4]=-5 X[12]=-13 X[3]=-4 X[11]=-12 X[19]=-20

X[13]=-14 X[2]=-3 X[10]=-11 X[5]=-6 X[18]=-19

* (51, 52, 54, 53)

5 -3.154 Y[5]= 0 + -3.154 = -3.154
 15 -0.2242 Y[15]= 0 + -0.2242 = -0.2242
 5 3.154 Y[35]= 0 + 3.154 = 3.154
 15 0.2242 Y[25]= 0 + 0.2242 = 0.2242

 -1

 end

 Worked row:

[0 4 8 12 16 20]

{+7 -19 +17 -11 } {-5 -15 +5 +15 } {-9 +13 -1 -3 } {+3 +9 -13 +1 } {+11 -7 +19 -17 }

 0

 Worked subarray sign-value:

{+7 -19 +17 -11}

CosMatrix - elements index(value):

7<0.8526) -19<-0.07846) 17<0.2334) -11<-0.6494)
 -19<-0.07846) 17<0.2334) -11<-0.6494) 7<0.8526)
 17<0.2334) -11<-0.6494) 7<0.8526) -19<-0.07846)
 -11<-0.6494) 7<0.8526) -19<-0.07846) 17<0.2334)

X[0]=1 X[1]=-2 X[4]=5 X[13]=-14
 X[19]=-20 X[18]=19 X[15]=-16 X[6]=7

* (-19, -17, -11, 7)

7 -21.98 Y[7]= 0 + -21.98 = -21.98
 19 10.63 Y[21]= 0 + 10.63 = 10.63
 17 -3.323 Y[17]= 0 + -3.323 = -3.323
 11 0.3418 Y[29]= 0 + 0.3418 = 0.3418

 1

 Worked subarray sign-value:

{-5 -15 +5 +15}

CosMatrix - elements index(value):

-5<-0.9239) -15<-0.3827) 5<0.9239) 15<0.3827)
 -15<-0.3827) 5<0.9239) 15<0.3827) -5<-0.9239)
 5<0.9239) 15<0.3827) -5<-0.9239) -15<-0.3827)
 15<0.3827) -5<-0.9239) -15<-0.3827) 5<0.9239)

X[2]=-3 X[7]=-8 X[17]=18 X[12]=13

* (3, 8, 18, 13)

5 15.77 Y[7]=-21.98 + 15.77 = -6.209
 15 1.121 Y[21]=10.63 + 1.121 = 11.76
 5 -15.77 Y[17]=-3.323 + -15.77 = -19.09
 15 -1.121 Y[29]=0.3418 + -1.121 = -0.7791

 2

 Worked subarray sign-value:

{-9 +13 -1 -3}

CosMatrix - elements index(value):

-9<-0.7604) 13<0.5225) -1<-0.9969) -3<-0.9724)
 13<0.5225) -1<-0.9969) -3<-0.9724) -9<-0.7604)
 -1<-0.9969) -3<-0.9724) -9<-0.7604) 13<0.5225)
 -3<-0.9724) -9<-0.7604) 13<0.5225) -1<-0.9969)

X[3]=-4 X[10]=11 X[8]=-9 X[14]=-15
 X[16]=17 X[9]=-10 X[11]=12 X[5]=6

* (-13, 1, -3, 9)

9 4.647 Y[7]=-6.209 + 4.647 = -1.562
 13 -11.72 Y[21]=11.76 + -11.72 = 0.03947
 1 18.97 Y[17]=-19.09 + 18.97 = -0.1235
 3 1.341 Y[29]=-0.7791 + 1.341 = 0.5616

 -1

 end

 Worked row:

[0 2 4 5 6 7 8 10 12 14 16 18 20]

{+8 -16 } {+8 -16 } {-0 } {-0 } {-0 } {-0 } {-16 +8 } {-16 +8 } {+8 -16 } {+8 -16 } {-16 +8 } {-16 +8 }

 0

 Worked subarray sign-value:

{+8 -16}

CosMatrix - elements index(value):

8<0.809) -16<-0.309)
 -16<-0.309) 8<0.809)

X[0]=1 X[4]=5 X[10]=11 X[14]=15 X[5]=6 X[9]=10 X[19]=20 X[15]=16

X[1]=-2 X[13]=-14 X[3]=-4 X[8]=-9 X[16]=-17 X[11]=-12 X[6]=-7 X[18]=-19

* (84, 84)

8 42 Y[8]= 0 + 42 = 42

16 42 Y[24]= 0 + 42 = 42

2

Worked subarray sign-value:

{-0}

CosMatrix - elements index(value):

-0<-1)

X[2]=-3 X[7]=-8 X[17]=-18 X[12]=-13

* (42)

0 -42 Y[8]=42 + -42 = 0

0 -42 Y[24]=42 + -42 = 0

-1

end

Worked row:

[0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20]

{+10 -10 } {+10 -10 } {-10 +10 } {-10 +10 } {+10 -10 } {+10 -10 } {-10 +10 } {-10 +10 } {-10 +10 } {-10 +10 }

0

Worked subarray sign-value:

{+10 -10}

CosMatrix - elements index(value):

10<0.7071) -10<-0.7071)

-10<-0.7071) 10<0.7071)

X[0]=1 X[4]=5 X[7]=8 X[12]=13 X[3]=4 X[8]=9 X[16]=17 X[11]=12 X[19]=20
X[15]=16

X[1]=-2 X[13]=-14 X[2]=-3 X[17]=-18 X[10]=-11 X[14]=-15 X[5]=-6 X[9]=-10
X[6]=-7 X[18]=-19

* (105, 105)

10 0 Y[10]= 0 + 0 = 0

10 0 Y[30]= 0 + 0 = 0

-1

end

Worked row:

[0 4 8 12 16 20]

{+11 -7 +19 -17 } {-15 +5 +15 -5 } {+3 +9 -13 +1 } {-1 -3 -9 +13 } {+17 -11 +7 -19 }

0

Worked subarray sign-value:

{+11 -7 +19 -17}

CosMatrix - elements index(value):

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 11<0.6494) | -7<-0.8526) | 19<0.07846) | -17<-0.2334) |
| -7<-0.8526) | 19<0.07846) | -17<-0.2334) | 11<0.6494) |
| 19<0.07846) | -17<-0.2334) | 11<0.6494) | -7<-0.8526) |
| -17<-0.2334) | 11<0.6494) | -7<-0.8526) | 19<0.07846) |

| | | | |
|-----------|----------|-----------|-----------|
| X[0]=1 | X[1]=-2 | X[4]=5 | X[13]=-14 |
| X[19]=-20 | X[18]=19 | X[15]=-16 | X[6]=7 |

* (-19, -17, -11, 7)

| | |
|------------|------------------------------|
| 11 -0.3418 | Y[11]= 0 + -0.3418 = -0.3418 |
| 7 21.98 | Y[33]= 0 + 21.98 = 21.98 |
| 19 -10.63 | Y[19]= 0 + -10.63 = -10.63 |
| 17 3.323 | Y[23]= 0 + 3.323 = 3.323 |

1

Worked subarray sign-value:

{-15 +5 +15 -5}

CosMatrix - elements index(value):

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| -15<-0.3827) | 5<0.9239) | 15<0.3827) | -5<-0.9239) |
| 5<0.9239) | 15<0.3827) | -5<-0.9239) | -15<-0.3827) |
| 15<0.3827) | -5<-0.9239) | -15<-0.3827) | 5<0.9239) |
| -5<-0.9239) | -15<-0.3827) | 5<0.9239) | 15<0.3827) |

| | | | |
|---------|--------|----------|-----------|
| X[2]=-3 | X[7]=8 | X[17]=18 | X[12]=-13 |
|---------|--------|----------|-----------|

* (3, 8, 18, 13)

| | |
|-----------|--------------------------------|
| 15 1.121 | Y[11]=-0.3418 + 1.121 = 0.7791 |
| 5 -15.77 | Y[33]=21.98 + -15.77 = 6.209 |
| 15 -1.121 | Y[19]=-10.63 + -1.121 = -11.76 |
| 5 15.77 | Y[23]=3.323 + 15.77 = 19.09 |

2

Worked subarray sign-value:

{+3 +9 -13 +1}

CosMatrix - elements index(value):

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 3<0.9724) | 9<0.7604) | -13<-0.5225) | 1<0.9969) |
| 9<0.7604) | -13<-0.5225) | 1<0.9969) | 3<0.9724) |
| -13<-0.5225) | 1<0.9969) | 3<0.9724) | 9<0.7604) |
| 1<0.9969) | 3<0.9724) | 9<0.7604) | -13<-0.5225) |

| | | | |
|-----------|----------|----------|----------|
| X[3]=4 | X[10]=11 | X[8]=-9 | X[14]=15 |
| X[16]=-17 | X[9]=-10 | X[11]=12 | X[5]=-6 |

* (-13, 1, -3, 9)

| | | |
|----|--------|---------------------------------|
| 3 | -1.341 | Y[11]=0.7791 + -1.341 = -0.5616 |
| 9 | -4.647 | Y[33]=6.209 + -4.647 = 1.562 |
| 13 | 11.72 | Y[19]=-11.76 + 11.72 = -0.03947 |
| 1 | -18.97 | Y[23]=19.09 + -18.97 = 0.1235 |

-1

end

Worked row:

[0 4 8 12 16 20]

{+13 -1 -3 -9} {+15 -5 -15 +5} {+11 -7 +19 -17} {+17 -11 +7 -19} {+9 -13 +1 +3}

0

Worked subarray sign-value:

{+13 -1 -3 -9}

CosMatrix - elements index(value):

| | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 13<0.5225) | -1<-0.9969) | -3<-0.9724) | -9<-0.7604) |
| -1<-0.9969) | -3<-0.9724) | -9<-0.7604) | 13<0.5225) |
| -3<-0.9724) | -9<-0.7604) | 13<0.5225) | -1<-0.9969) |
| -9<-0.7604) | 13<0.5225) | -1<-0.9969) | -3<-0.9724) |

| | | | |
|-----------|----------|----------|-----------|
| X[0]=1 | X[1]=-2 | X[4]=-5 | X[13]=-14 |
| X[19]=-20 | X[18]=19 | X[15]=16 | X[6]=7 |

* (-19, -17, -11, 7)

| | | |
|----|-------|--------------------------|
| 13 | 12.39 | Y[13]= 0 + 12.39 = 12.39 |
| 1 | 47.49 | Y[39]= 0 + 47.49 = 47.49 |
| 3 | 18.68 | Y[37]= 0 + 18.68 = 18.68 |
| 9 | 9.725 | Y[31]= 0 + 9.725 = 9.725 |

1

Worked subarray sign-value:

{+15 -5 -15 +5}

CosMatrix - elements index(value):

| | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 15<0.3827) | -5<-0.9239) | -15<-0.3827) | 5<0.9239) |
| -5<-0.9239) | -15<-0.3827) | 5<0.9239) | 15<0.3827) |
| -15<-0.3827) | 5<0.9239) | 15<0.3827) | -5<-0.9239) |
| 5<0.9239) | 15<0.3827) | -5<-0.9239) | -15<-0.3827) |

| | | | |
|--------|---------|-----------|----------|
| X[2]=3 | X[7]=-8 | X[17]=-18 | X[12]=13 |
|--------|---------|-----------|----------|

* (3, 8, 18, 13)

| | | |
|----|--------|-------------------------------|
| 15 | -1.121 | Y[13]=12.39 + -1.121 = 11.27 |
| 5 | 15.77 | Y[39]=47.49 + 15.77 = 63.27 |
| 15 | 1.121 | Y[37]=18.68 + 1.121 = 19.8 |
| 5 | -15.77 | Y[31]=9.725 + -15.77 = -6.047 |

2

Worked subarray sign-value:

{+11 -7 +19 -17}

CosMatrix - elements index(value):

11<0.6494) -7<-0.8526) 19<0.07846) -17<-0.2334)
 -7<-0.8526) 19<0.07846) -17<-0.2334) 11<0.6494)
 19<0.07846) -17<-0.2334) 11<0.6494) -7<-0.8526)
 -17<-0.2334) 11<0.6494) -7<-0.8526) 19<0.07846)

X[3]=4 X[10]=-11 X[8]=9 X[14]=-15
 X[16]=-17 X[9]=10 X[11]=-12 X[5]=6

* (-13, 1, -3, 9)

11 -11.63 Y[13]=11.27 + -11.63 = -0.3594
 7 17.71 Y[39]=63.27 + 17.71 = 80.97
 19 -10.88 Y[37]=19.8 + -10.88 = 8.921
 17 6.948 Y[31]=-6.047 + 6.948 = 0.9014

-1

end

Worked row:

[0 4 6 8 12 16 20]

{+14 -2 -6 -18 } {+10 -10 } {+10 -10 } {+18 -14 +2 +6 } {+6 +18 -14 +2 } {-18 +14 -2 -6 }

0

Worked subarray sign-value:

{+14 -2 -6 -18}

CosMatrix - elements index(value):

14<0.454) -2<-0.9877) -6<-0.891) -18<-0.1564)
 -2<-0.9877) -6<-0.891) -18<-0.1564) 14<0.454)
 -6<-0.891) -18<-0.1564) 14<0.454) -2<-0.9877)
 -18<-0.1564) 14<0.454) -2<-0.9877) -6<-0.891)

X[0]=1 X[10]=-11 X[9]=-10 X[19]=20
 X[1]=-2 X[8]=9 X[11]=12 X[18]=-19
 X[4]=-5 X[14]=15 X[5]=6 X[15]=-16
 X[13]=-14 X[3]=4 X[16]=17 X[6]=-7

* (0, 0, 0, 0)

14 0 Y[14]= 0 + 0 = 0
 2 0 Y[38]= 0 + 0 = 0
 6 0 Y[34]= 0 + 0 = 0
 18 0 Y[22]= 0 + 0 = 0

1

```

-----
Worked subarray sign-value:
{+10 -10}
CosMatrix - elements index(value):
10<0.7071)   -10<-0.7071)
-10<-0.7071) 10<0.7071)

```

```

X[2]=3      X[7]=-8
X[17]=18    X[12]=-13

```

```

* ( 21, 21)

```

```

10 0      Y[14]=0 + 0 = 0
10 0      Y[38]=0 + 0 = 0
10 0      Y[34]=0 + 0 = 0
10 0      Y[22]=0 + 0 = 0

```

```

-----
-1

```

```

-----
end

```

```

-----
Worked row:

```

```

[0 2 4 5 6 7 8 10 12 14 16 18 20]
{+16 -8 } {+16 -8 } {+0 } {+0 } {+0 } {+0 } {-8 +16 } {-8 +16 } {+16 -8 } {+16 -8 } {-8 +16 }
{-8 +16 }

```

```

-----
0

```

```

-----
Worked subarray sign-value:
{+16 -8}
CosMatrix - elements index(value):
16<0.309)   -8<-0.809)
-8<-0.809) 16<0.309)

```

```

X[0]=1   X[4]=5   X[10]=11  X[14]=15  X[5]=6   X[9]=10   X[19]=20  X[15]=16
X[1]=-2  X[13]=-14  X[3]=-4   X[8]=-9   X[16]=-17 X[11]=-12  X[6]=-7   X[18]=-19

```

```

* ( 84, 84)

```

```

16 -42      Y[16]= 0 + -42 = -42
8  -42      Y[32]= 0 + -42 = -42

```

```

-----
2

```

```

-----
Worked subarray sign-value:
{+0}
CosMatrix - elements index(value):
0<1)
X[2]=3   X[7]=8   X[17]=18  X[12]=13
* ( 42)
0 42      Y[16]=-42 + 42 = 0
0 42      Y[32]=-42 + 42 = 0

```

-1

end

Worked row:

[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20]

{020 } {020 } {020 } {020 } {020 } {020 } {020 } {020 } {020 } {020 } {020 } {020 } {020 } {020 }
{020 } {020 } {020 } {020 } {020 } {020 }

0

Worked subarray sign-value:

{020}

CosMatrix - elements index(value):

0<0)

X[0]=0 X[1]=0 X[4]=0 X[13]=0 X[2]=0 X[7]=0 X[17]=0 X[12]=0 X[3]=0

X[10]=0

X[8]=0 X[14]=0 X[5]=0 X[16]=0 X[9]=0 X[11]=0 X[6]=0 X[19]=0 X[18]=0

X[15]=0

*(210)

20 0 Y[20]= 0 + 0 = 0

-1

end

Результат обчислення перетворення:

| | | |
|------------------|------------------|----------------|
| 210.000000000000 | 210.000000000000 | 0.000000000000 |
| -80.973433470667 | -80.973433470667 | 0.000000000000 |
| 0.000000000000 | -0.000000000000 | 0.000000000000 |
| -8.921358945174 | -8.921358945174 | 0.000000000000 |
| -0.000000000000 | -0.000000000000 | 0.000000000000 |
| -3.154322029899 | -3.154322029899 | 0.000000000000 |
| 0.000000000000 | 0.000000000000 | 0.000000000000 |
| -1.561584851449 | -1.561584851449 | 0.000000000000 |
| 0.000000000000 | -0.000000000000 | 0.000000000000 |
| -0.901418958085 | -0.901418958085 | 0.000000000000 |
| 0.000000000000 | 0.000000000000 | 0.000000000000 |
| -0.561595203155 | -0.561595203155 | 0.000000000000 |
| 0.000000000000 | -0.000000000000 | 0.000000000000 |
| -0.359354868419 | -0.359354868419 | 0.000000000000 |
| 0.000000000000 | 0.000000000000 | 0.000000000000 |
| -0.224170764584 | -0.224170764584 | 0.000000000000 |
| 0.000000000000 | -0.000000000000 | 0.000000000000 |
| -0.123450321757 | -0.123450321757 | 0.000000000000 |
| 0.000000000000 | 0.000000000000 | 0.000000000000 |
| -0.039472534062 | -0.039472534062 | 0.000000000000 |

Для продолжения нажмите любую клавишу . . .

Додаток Д

Акти впровадження результатів дисертаційної роботи

“ЗАТВЕРДЖУЮ”
 Директор Тзов “Uniservice”
 к.т.н., Грицків Ю.І.
 “ 20 ” квітня 2018 р.


АКТ

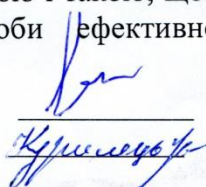
**про впровадження результатів дисертаційного дослідження
 «Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень
 на основі циклічних згорток»
 автора Процька Ігоря Омеляновича**

До ТОВ “Uniservice” розробника ліцензійного програмного забезпечення систем автоматизованого проектування м. Львів була передана науково-практична робота «Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток» (автор Процько І.О.) виконана в НУ “Львівська політехніка”, що містить результати однойменного дослідження зі створення комп’ютерних засобів синтезу алгоритмів та виконання обчислень дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. У науково-практичній роботі містяться результати та матеріали, які представляють значний інтерес для розробників відповідних технологій, архітектур, програмних продуктів, спеціальних апаратних пристроїв у сфері ІТ.

У ТОВ “Uniservice” дані результати були використані в процесі програмної розробки підсистеми спектрального аналізу, що застосовується для перевірки надійності роботи механічних систем трубопроводу в процесі моделювання роботи спроектованої мережі, яка піддається опусканню ґрунту, зовнішнім вібраціям, високому тиску рідин з великою питомою вагою. Розроблене програмне забезпечення обчислення дванадцяти різних дійсних дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі за єдиною методологією дозволило на вищому рівні використовувати підсистему спектрального аналізу в процесах діагностики на надійність спроектованої трубопровідної мережі. Високий показник часу обчислення перетворень для коротких обсягів на основі циклічних згорток дозволяє конструювати ефективні програмні засоби дискретних перетворень класу Фур’є великих обсягів на основі коротких для підсистеми спектрального аналізу.

ТОВ “Uniservice” вважає запроповану узагальнену методологію обчислення ДГП на основі циклічних згорток, яка охоплює послідовні й паралельні етапи синтезу алгоритмів та організації обчислень та розроблене програмне забезпечення, актуальною і такою, що ефективно доповнює існуючі обчислювальні методи та засоби ефективного виконання дискретних перетворень.

Керівник проекту
 Розробник



Рикмас Р. В.
 Курилець М. З.

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Директор
ТОВ «Лемберг Рішення»
Кравчук А. В.



17 березня 2018 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи
Процька Ігоря Омеляновича
“Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних
перетворень на основі циклічних згорток”

Даним актом засвідчується, що наступні наукові результати дисертаційної роботи Процька І.О., застосовуються в процесі розробки перспективних мобільних інформаційних систем:

- методологія приведення базису загальних дискретних перетворень Хартлі до блочно-циклічних структур;
- особливості синтезу алгоритмів дискретних перетворень Хартлі чотирьох видів;
- програмна модель синтезу алгоритмів довільних обсягів чотирьох видів дійсних дискретних перетворень Хартлі;
- структура узагальненої блок схеми синтезу та виконання дискретних перетворень Хартлі.

Отримані в дисертаційній роботі результати представляють практичну цінність при розробці програмних засобів для мобільних інформаційних технологій, що можуть застосовуватись в багатьох електронних пристроях. Запропоновані методологія, методи та моделі порівняно з відомими відзначаються розширенням функціональних можливостей для гармонічного аналізу дискретних сигналів в інформаційних технологіях. Це дозволяє, застосовуючи дані наукові результати, підвищити в широкому аспекті ефективність розробок інформаційних технологій для мобільних застосувань.

Даний акт не є основою для проведення фінансових взаєморозрахунків.

Члени комісії

к.е.н., Білоус Н.Б.

Булич Р. О.

Дутко Л. С.

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Директор
ТДВ "Самбірська швейна фабрика"
Михайлів І. П.
березня __ 2018 р.



АКТ

про впровадження науково-практичної розробки
"Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних
перетворень на основі циклічних згорток"

Процька Ігоря Омеляновича

Науково-практична розробка, яка базується на докторській дисертаційній роботі Процька І. О. "Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток", полягає у розроблені програмно-алгоритмічних засобів швидкого обчислення дискретних косинусних перетворень для формування гармонічного образу фрагментів тканин з регулярною текстурою.

Використання розробленої автором методики та програмно-алгоритмічних засобів дозволяє ефективно проводити аналіз та дослідження якості елементів тканин різної форми для швейних виробів. Відбір бездефектних елементів тканин комп'ютерними засобами забезпечує пошиття високоякісного чоловічого та жіночого одягу на швейній фабриці.

Виходячи з пріоритетних напрямків ТДВ "Самбірська швейна фабрика", а саме: «Розвиток комп'ютеризованих систем моделювання, проектування, розкрою, виготовлення та аналізу якості швейних виробів» вважаємо науково-практичну розробку автора Процька І.О. актуальною для застосування у виробництві.

Головний інженер



Вінярська У. І.



Затверджую
 Проректор за науково-педагогічної роботи
 НУ "Львівська політехніка"
 доц. Давидчак О.Р.
 0» травня 2018 р.

АКТ

про впровадження результатів докторської дисертації
 Процька Ігоря Омеляновича
 «Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень на
 основі циклічних згорток»
 у навчальний процес кафедри інформаційних систем і технологій

Даний акт складено комісією у складі:

- д.т.н., проф. Теслюк Василь Миколайович – завідувач кафедри ІСТ,
- к.іст.н., доц. Цубов Леонід Володимирович – заступник директора науково-педагогічної роботи,
- к.ф.-м.н., доц. Баран Мар'яна Михайлівна – доцент кафедри ІСТ

про те, що у навчальному процесі кафедри інформаційних систем і технологій використано результати дисертаційної роботи «Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток», а саме для магістрів спеціалізації «Комп'ютерний еколого-економічний моніторинг» в лекційному та лабораторному видах занять навчальних дисциплін «Сучасні системи передачі та обробки інформації», «Паралельні обчислення та GRID-технології».

Для студентів вивчення питань синтезу ефективних алгоритмів дискретного косинусного перетворення, дискретного синусного перетворення та дискретного перетворення Хартлі та їх ефективне обчислення на основі циклічних згорток дасть можливість поглибленого вивчення процесу виконання спектрального аналізу інформаційних даних для еколого-економічного моніторингу. При цьому функціональні можливості виконання даних перетворень на основі розробленої узагальненої методології є ширшими, ніж під час використання традиційних методів та програмних засобів.

Члени комісії

Теслюк В. М.

Цубов Л. В.

Баран М. М.

“ЗАТВЕРДЖУЮ”
 Перший проректор Львівського
 національного аграрного університету
 професор  Боярчук В.М.
 “ 15 ” квітня 2018 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи
 ПРОЦЬКА ІГОРЯ ОМЕЛЯНОВИЧА
 “Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень
 на основі циклічних згорток”

Даним актом засвідчується, що наукові і практичні результати, отримані доцентом Процько І.О. в дисертаційній роботі «Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток», впроваджені в лекційних курсах і лабораторних роботах дисциплін: «Комп’ютерні технології з основами програмування», «Алгоритмізація та програмування», «Інформаційні технології», «Моделювання систем», які проводяться кафедрою інформаційних систем та технології для студентів факультету механіки та енергетики Львівського національного аграрного університету.

В лекційному курсі «Алгоритмізація та програмування» використані такі наукові і практичні результати дисертаційної роботи Процька І.О.: метод зменшення обчислювальної складності алгоритмів дискретних гармонічних перетворень через аналіз матричних структур базису перетворення та структура програмного засобу виконання ефективних дискретних косинусних/синусних перетворень, а в курсі «Моделювання систем» – методологія аналізу та синтезу дійсних гармонічних перетворень на базі циклічних згорток та спосіб приведення дійсних гармонічних перетворень до блочно-циклічних структур для інформаційних технологій технічної діагностики механічного обладнання.

Матеріали дисертаційної роботи використані при розробці методичних вказівок до лабораторної роботи «Косинусне перетворення для стиснення інформаційних даних» з курсу «Алгоритмізація та програмування», а також методичних вказівок до лабораторної роботи «Спектральний аналіз даних» з курсу «Моделювання систем» для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології».

Завідувач кафедри електротехнічних систем
 д. т. н., в.о. професора



Тригуба А.М.

Додаток Е

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації :

- [1] I. Prots'ko, "Algorithm of Efficient Computation of DCT I-IV Using Cyclic Convolutions", *Int. J. Circuits, Syst. and Signal Process.*, vol. 7, iss. 1, pp. 1-9, 2013. (Indexes: Compendex, Scopus, IET Inspec, etc.)
- [2] I. Prots'ko, "Algorithm of efficient computation of generalized discrete Hartley transform based on cyclic convolutions", *IET Signal Process.*, vol. 8, iss. 4, pp.301-308, 2014. (Indexes: Scopus, IET Inspec, SCI, Ei Compendex).
- [3] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Algorithm of efficient computation DST^{I-IV} using cyclic convolutions", *WSEAS Trans. Signal Process.*, vol. 10, pp. 278-288, 2014. (Indexes: Compendex, Elsevier, Scopus, IET Inspec, etc.)
- [4] I. Prots'ko, and R. Rykmas, "The Runtime Benchmarking of DCT-II based on Cyclic Convolutions", *Int. J. Condition Monitoring and Diagnostic Engineering Management*, vol. 21, no. 2, pp. 11-16, 2018. (Indexes: Scopus, Inspec, Acoustics Abstracts, Engineering Index Monthly, International Aerospace Abstracts, etc.)
- [5] I. Prots'ko, "The algorithm and structures for efficient computation of type II/III DCT/ DST/ DHT using cyclic convolutions", *Int. J. Signal Proces. Syst.*, vol. 2, no. 2, pp. 119-127, 2014. (Indexes: IET Inspec, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, etc.)
- [6] I. Prots'ko, and R. Rykmas, "Becoming of Discrete Harmonic Transform Using Cyclic Convolutions", *American J.Circuits, Syst. and Signal Process.*, vol. 1, no.3, pp. 114-119, 2015. (Indexes: Worldcat, ResearchBib, Academickeys).
- [7] I. Prots'ko, "Synthesis of Efficient Algorithms of DST for Types I, IV via Cyclic Convolutions", *Int. J. Electronic Engineering and Computer Science*, vol. 1, no.1, pp. 6-13, 2016.
- [8] I. Prots'ko, and V. Teslyuk, "Development of WFTA based on the hashing array", *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 2(45), с.135-142, 2018.

(Indexes: Web of Science, Index Copernicus, INSPEC, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat)

- [9] І. Процько, "Підхід ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень через циклічні згортки", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 626, с. 74-78, 2008.
- [10] І. Процько, "Взаємозв'язок ефективних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток для обсягів 2^n ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 685, с. 125-130, 2010.
- [11] І. Процько, та Р. Рикмас, "Аналіз циклічних підматриць в структурі базису дискретних гармонічних перетворень", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №710, с. 209-214, 2011.
- [12] Р. Никифорчин, та І. Процько, "Формування блочно-матричних структур для алгоритмів гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Автоматика, вимірювання та керування*, № 530, с. 175-180, 2005.
- [13] Р. Никифорчин, та І. Процько, "Секціонування базової матриці дискретного гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 564, с. 40-45, 2006.
- [14] І. Процько, "Обчислювальні структури адаптивного до обсягу ШПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 651, с. 145-151, 2009.
- [15] І. Процько, "Особливості обчислення циклічних згорток для ідентичних послідовностей", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 719, с.200-206, 2011.

- [16] І. Процько, "Аналіз алгебраїчної системи аргументів для простого обсягу ДПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 711, с. 48-53, 2011.
- [17] І. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДКП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 732, с.274-280, 2012.
- [18] І. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДКП на основі циклічних згорток", *Моделювання та інформаційні технології*" збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, Вип. 65, с. 110-118, 2012.
- [19] І. Процько, "Ефективне обчислення дискретних косинусних перетворень", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 591, с. 58-63, 2007.
- [20] І. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДСП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі*, № 743, с. 140-151, 2012.
- [21] І. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДСП на основі циклічних згорток", *Збірн. наук. праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*, Вип. 65, с. 196-205, 2012.
- [22] І. Процько, "Приведення до ефективних обчислень довільних обсягів ортогональних перетворень Хартлі", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 522, с. 85-89, 2004.
- [23] І. Процько, "Ефективне обчислення дискретного перетворення Хартлі на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи та мережі*, № 688, с. 190-196, 2010.

- [24] І. Процько, "Синтез та обчислення основних типів ДПХ на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 744, с.302-311, 2012.
- [25] І. Процько, "Схема алгоритму синтезу гармонічних дискретних перетворень в підсистемі аналізу САПР", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №694, с. 297-302, 2011.
- [26] О. Грищук, та І. Процько, "Обчислення значень канонічного розкладу одновимірної величини", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування.Теорія і практика*, №501, с. 30-32, 2004.
- [27] І. Процько, "Розробка схеми узагальненого ефективного алгоритму гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі*, № 549, с.157-164, 2005.
- [28] І. Процько, "Узагальнене ефективне дискретне гармонічне перетворення даних", *Технічні вісті. Львів*, № 1(22), 2(23), с. 88-92, 2006.
- [29] І. Процько, "Розпаралелення на рівні підзадач алгоритму ШГП на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 826, с.306-312, 2015.

Наукові праці апробаційного характеру:

- [30] І. Процько, та В. Радомський, "Узагальнений підхід швидкого трансформування класу Фур'є на основі згорток" на *V Всеукр. міжн. конф. УкрОБРАЗ'2000*, Київ, 2000, с. 249-252.
- [31] І. Процько, та В. Радомський, "Обчислення швидкого трансформування Фур'є за допомогою згорток", на *II Національній наук.-практ. конф. "Системний аналіз та інформаційні технології": Збірка тез доповідей*, Київ: НТУУ "КПІ", 2000, с. 97-98.

- [32] I. Protsko, "Adaptive synthesis to transform size of Fast Fourier Algorithm", in *Proc. VIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2003)*, Lviv-Slavske, 18-22 february 2003. pp. 230-231.
- [33] I. Prots'ko, "Computational parallel models of the discrete harmonic transforms", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2005)*, Lviv-Polyana, 23-26 february, 2005, pp. 230-231.
- [34] R. Nykyforchin, and I. Prots'ko, "Computational algorithm of the discrete harmonic components for microelectronic systems", in *Proc. Ist Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2005)*, Lviv-Polyana, 25-28 may, 2005, pp. 21-22.
- [35] I. Protsko, "Fast Cosine Transform Algorithm on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. 2nd Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2006)*, Lviv-Polyana, 24-27 may, 2006, pp. 65-66.
- [36] I. Protsko, "The Efficient Algorithm of Discrete Cosine Transform", in *Proc. IXth Int.l Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2007)*, Polyana, 20-24 february, 2007, pp. 163-164.
- [37] I. Процько, "Обчислювальні паралельні моделі гармонічних дискретних перетворень", на *наук.-прак. конф. Математичне моделювання складних систем*, Львів, 2007, с. 214-219.
- [38] I. Prots'ko, "The generalized technique of computation the discrete harmonic transforms", in *Proc. IVth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2008)*, Polyana, 21-24 may, 2008, pp. 101-102.
- [39] I. Prots'ko, "Computational structure of adaptive to transform size FFT", in *Proc. Xth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2009)*, Polyana, 24-28 february, 2009, pp. 255-257.
- [40] I. Prots'ko, "The compare of computation FFT on base cyclic convolutions for size of $N=2^n$ ", in *Proc. Vth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2009)*, Polyana, 22-24 april, 2009, pp. 70-72.

- [41] I. Prots'ko, " Interconnection discrete harmonic transforms sizes 2^n on base circular convolutions", in *Proc. VIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2010)*, Polyana, 20-23 april, 2010, pp.49-50.
- [42] I. Prots'ko, "The Efficient Computation of Discrete Hartley Transform on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. Vth Int. Scientific and Technical Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT 2010)*, Lviv, 14-16 october, 2010, pp.157-158.
- [43] I. Prots'ko, "The Efficient Computation DHT using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2011)*, Polyana, 24-28 february, 2011, pp. 85-86.
- [44] I. Prots'ko, and R. Rikmas, "Analysis cyclic submatrices in structure of basis discrete harmonic transform", in *Proc. VIIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2011)*, Polyana, 12-14 may, 2011, pp. 64-66.
- [45] I. Prots'ko, "The specific of computation cyclic convolutions for identical sequences", in *Proc. VIth Int.Scienc. and Tech. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2011)*, Lviv, 16-19 november, 2011, pp. 301-302.
- [46] I. Prots'ko, "Analysis algebraic system of arguments for prime size DHT", in *Proc. XIth Int. Conf. Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET'2012)*, Lviv-Slavske, 24-28 february, 2012, pp. 428.
- [47] I. Prots'ko, "Generalized approach for synthesis and computation DST using cyclic convolutions", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2012)*, Polyana, 18-21 april, 2012, pp.66-67.
- [48] I. Prots'ko, and R. Rikmas "Analysys parallel processing DHT using convolution on SIMT model", in *Proc. VIIth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2012)*, Lviv, 20-24 november, 2012, pp.136-137.

- [49] I. Prots'ko, "The Module of DCT^{II} for Size N=8 using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2013)*, Polyana, february 2013, pp. 299-301.
- [50] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The program implementation of the synthesis the efficient algorithms for computation of DCT-II via cyclic convolutions", in *Proc. IXth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2014)*, Lviv, 18-22 november, 2014, pp. 116-118.
- [51] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Computational structure of DST-II using convolvers", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2015)*, Polyana, february, 2015, pp.200-202.
- [52] I. Prots'ko, R. Rikmas, and M. Mashevskya "Performance evaluation of the program of DCT-II using cyclic convolutions", in *Proc. XIIth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2017)*, Lviv, 5-8 september 2017, pp.116-118.
- [53] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The efficient computation of integer DCT based on cyclic convolutions", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Computer Sciences & Information Technologies (CSIT'2018)*, Lviv, 11-14 september 2018, pp.245-248.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації :

- [54] І. О. Процько, "Спосіб приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток", *G06F 17/16 (2006.01), H03M 7/30 (2006.01), Патент 96540 Україна*, 10.11.2011, Бюл. № 21.
- [55] І. О. Процько, та В. А. Радомський, "Пристрій для обчислення швидкого трансформування Фур'є", *G06F7/00, G06F15/00, Декл. патент 346144 Україна*, 15.03.2001, Бюл. № 2.
- [56] І. О. Процько, та В. М. Теслюк, "Пристрій канонічного розкладу числа на множники", *G06F7/04(2006.01), G06F17/10(2006.01), Патент 116912 Україна*, 25.05.2018, Бюл. № 10.